SECUNDARIA

TEXTO DE MATEMÁTICA 3







REPÚBLICA DEL PERÚ

MINISTERIO DE EDUCACIÓN

El ciudadano que queremos



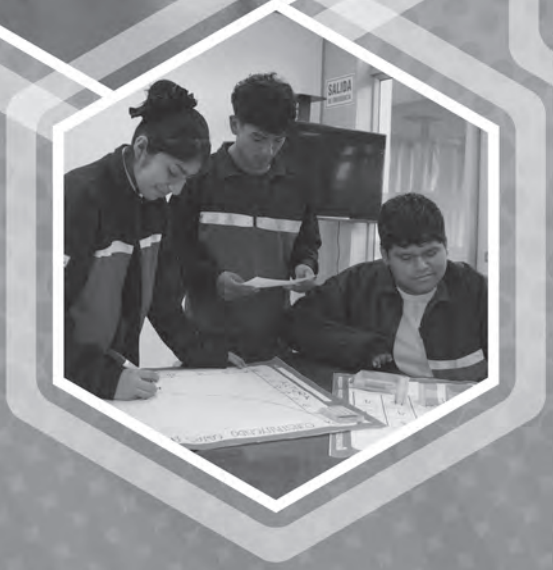
(*) Este aprendizaje es para aquellos estudiantes que tienen como lengua materna una de las 48 lenguas originarias o lengua de señas, y que aprenden el castellano como segunda lengua.

Currículo Nacional

TEXTO DE MATEMÁTICA 3







MINISTERIO DE EDUCACIÓN

TEXTO DE MATEMÁTICA 3

El presente material educativo para estudiantes de tercer grado ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias en el área de Matemática, propuestas en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Edición:
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193
San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta pedagógica y edición
Pedro David Collanqui Díaz

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Diseño gráfico
Ana Matilde Morales Vásquez
Carlos Héctor Boza Loayza

Elaboración de contenido
Mariela Quispe Quille
Fredy Anccasi Cayllahua
Pedro David Collanqui Díaz

Revisión pedagógica
Pedro David Collanqui Díaz

Corrección de estilo
Carlos Alberto Zavala Félix
Laura Iris De la Cruz Espinoza

Diagramación
Carmen Rosa Domínguez Reyes

Ilustración
Estela Mogrovejo Prado
Marina Victoria Benites Iparraguirre

Primera edición: octubre de 2025
Tiraje: 495 590

Impresión
Se terminó de imprimir en noviembre de 2025, en los talleres gráficos de Pacífico Editores S.A.C.,
sito en Jr. Castrovirreyna 224 - interior 1.er piso, Urb. Azcona, Breña, Lima - Perú.
RUC N.° 20519049822

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2025-07556

PEFC Certificado
Este producto procede de bosques gestionados de forma sostenible y fuentes controladas
PEFC
PEFC/01-31-484
www.pefc.es

Presentación

Querido estudiante:

Aprender matemática es mucho más que resolver operaciones, es una experiencia formativa que fortalece valores, orienta propósitos y guía procesos de evaluación para favorecer el crecimiento personal, la participación activa y el compromiso con la sociedad.

Este texto de Matemática ha sido diseñado con un enfoque práctico y cercano a la vida real, porque busca despertar el interés y ayudarte a interpretar la realidad, tomar decisiones fundamentadas y, con ello, desarrollar los conocimientos matemáticos con el fin de darles sentido y uso en tu propio contexto; además, el texto brinda oportunidades para que te desenvuelvas en otros escenarios y te integres plenamente en una sociedad que cada día está más vinculada a las ciencias.

En este camino, los valores como la responsabilidad, la solidaridad y el respeto orientan la convivencia escolar y el trabajo colaborativo. Los propósitos marcan el rumbo de los aprendizajes que queremos que alcances, vinculados a tu desarrollo integral y al de cada uno de tus compañeros; y la evaluación, entendida como una oportunidad de reflexión y mejora, permite reconocer avances, superar dificultades y asumir un rol protagónico en el aprendizaje.

El presente texto está organizado por unidades, las cuales ofrecen experiencias variadas para el desarrollo de las competencias matemáticas mediante:

- Problemas reales y significativos, que muestran la utilidad de las matemáticas en diferentes contextos.
- Proyectos colaborativos, que estimulan la investigación, la gestión del aprendizaje, la creatividad y el trabajo en equipo, así como la integración de las competencias.
- Recursos prácticos, que favorecen la comprensión de conceptos y el desarrollo de ideas matemáticas en un sentido experimental, inductivo y relacional.
- La integración con herramientas digitales y pensamiento computacional, que enriquecen el aprendizaje y amplían sus posibilidades de aplicación.

De este modo, cada reto abre la puerta a pensar distinto, analizar información de diversas fuentes y encontrar soluciones creativas apoyadas en argumentos sólidos que te preparan para enfrentar los desafíos del presente y del futuro.

Estamos convencidos de que, al avanzar con este texto, apreciarás su valor y reconocerás su importancia en tu formación personal y ciudadana, siempre con base en los valores que fortalecen tu vida escolar y comunitaria.

Dirección de Educación Secundaria

Índice

UNIDAD 1

Resuelve problemas de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Proponemos una alimentación saludable desde la escuela

Investigamos pp. 12-17
- Diseño de un plan nutricional escolar
- Experimenta con la fermentación y las matemáticas

Exploramos pp. 18-23

Desarrollamos pp. 24-29
- Interpreta la densidad de los números racionales y argumenta la existencia de infinitos valores intermedios.
- Expresa y generaliza patrones numéricos y gráficos, emplea la regla de formación y justifica la validez del término general.
- Analiza ecuaciones lineales y sustenta si tienen una, ninguna o infinitas soluciones.

Formalizamos pp. 30-43
- Números racionales (ℚ)
- Progresión geométrica (P. G.)
- Ecuaciones lineales de las formas $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$
- Conceptos básicos de estadística
- Recolección de datos
- Organización y presentación de datos

Actividad lúdica pp. 44-45

UNIDAD 2

Resuelve problemas de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Usamos las matemáticas para optimizar la carga y producción agrícola

Investigamos pp. 48-55
- Pesando el éxito. Optimización de un servicio de carga
- Cosechando el futuro. Predice y optimiza la producción agrícola

Exploramos pp. 56-61

Desarrollamos pp. 62-65
- Representa y justifica proporcionalidad entre fracciones, aplicándola en repartos proporcionales.
- Interpreta datos agrupados, calcula media y mediana, y comunica conclusiones.

Formalizamos pp. 66-75
- Sistema Internacional de Unidades
- Magnitudes proporcionales
- Función lineal y lineal afín
- Medidas estadísticas

Actividad lúdica pp. 76-77

UNIDAD 3

Resuelve problemas de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construimos soluciones sostenibles para la salud y el bienestar comunitario

Investigamos pp. 80-87
- La cocina mejorada, una propuesta ecológica
- Construimos un modelo de invernadero andino

Exploramos pp. 88-93

Desarrollamos pp. 94-99
- Emplea fracciones para representar, relacionar partes y el total, justificando los resultados.
- Modela áreas con ecuaciones cuadráticas, determina dimensiones y justifica soluciones.
- Emplea procedimientos de descomposición para establecer relaciones, calcular áreas y comunicar soluciones.

Formalizamos pp. 100-119
- Operaciones con números racionales y propiedades
- Inecuaciones lineales
- Ecuaciones cuadráticas
- Formas bidimensionales
- Medidas de formas bidimensionales
- Formas tridimensionales
- Medidas de formas tridimensionales

Actividad lúdica pp.120-121

UNIDAD 4

Resuelve problemas de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Tomamos decisiones inteligentes para optimizar costos en un negocio

Investigamos pp. 124-129

- Mejora la producción a través del análisis de costos
- Analiza datos para incrementar las ventas

Exploramos pp. 130-135

Desarrollamos pp. 136-141

- Representa ahorros e inversiones, calcula interés simple y justifica opciones financieras convenientes.
- Representa ingresos con funciones cuadráticas, determina el vértice para maximizar ingresos y argumenta su validez contextual
- Analiza datos con medidas centrales y de dispersión y argumenta su homogeneidad.

Formalizamos pp. 142-149

- Interés simple
- Función cuadrática
- Medidas estadísticas

Actividad lúdica pp. 150-151

UNIDAD 5

Resuelve problemas de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Analizamos datos para predecir la demanda energética y la rentabilidad agrícola

Investigamos pp. 154-159

- Predecimos la demanda de energía y expansión de la infraestructura
- Maximizamos los beneficios económicos de diversos cultivos

Exploramos pp. 160-165

Desarrollamos pp. 166-171

- Representa y convierte magnitudes extremas usando notación científica, argumentando su utilidad.
- Modela y comunica isometrías, aplicando transformaciones y argumentando la conservación de forma y tamaño geométrica.
- Modela situaciones con sistema de ecuaciones lineales argumentando soluciones contextuales.

Formalizamos pp. 172-181

- Notación exponencial y científica
- Sistema de ecuaciones lineales
- Escala
- Transformaciones geométricas isométricas
- Transformaciones geométricas

Actividad lúdica pp. 182-183

UNIDAD 6

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Diseñamos soluciones eficientes para entornos urbanos y rurales

Investigamos pp. 186-193

- Diseño de un sistema de transporte en una ciudad con relieve variado
- Diseño de riego por goteo para la agricultura sostenible

Exploramos pp. 194-199

Desarrollamos pp. 200-205

- Establece relaciones entre múltiples magnitudes usando proporcionalidad compuesta, argumentado procedimientos.
- Modela situaciones con triángulos rectángulos, aplica razones trigonométricas y argumenta soluciones válidas.
- Resuelve problemas de sucesos dependientes e independientes, calcula probabilidades y argumenta resultados.

Formalizamos pp. 206-219

- Magnitudes proporcionales
- Formas bidimensionales
- Formas tridimensionales
- Escala
- Eventos probabilísticos

Actividad lúdica pp. 220-221

Índice temático

Números racionales ($\mathbb{Q}$)
- Expresión decimal de un número racional ...30
- Fracción generatriz de una expresión decimal ... 31
- Representación en la recta numérica de los números racionales ... 32
- Relación de orden de los números racionales ... 33
- Densidad de los números racionales ... 34

Operaciones con números racionales y propiedades
- Adición y sustracción de números racionales ... 100
- Multiplicación de números racionales ... 101
- División de números racionales ... 102
- Potenciación de números racionales con exponente positivo ... 103
- Propiedades de la potenciación de números racionales ... 104

Notación exponencial y científica
- Notación científica ... 172

Sistema Internacional de Unidades
- Conversión de unidades de masa ... 66
- Conversión de unidades de temperatura . 67

Progresión geométrica (P. G.)
- Regla de formación y término general (a_n) ..35
- Suma de los n primeros términos de una P. G. (S_n) ... 36

Ecuaciones lineales de las formas $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$
- Ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución ... 37

Sistema de ecuaciones lineales
- Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas ... 173
- Resolución con el método gráfico ... 174
- Resolución con el método de sustitución175

Ecuaciones cuadráticas
- Ecuación cuadrática ... 107
- Ecuaciones cuadráticas incompletas de las formas $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$ ... 108

Inecuaciones lineales
- Inecuaciones lineales con una incógnita de las formas $ax \pm b < 0$; $ax \pm b > 0$; $ax \pm b \leq 0$; $ax \pm b \geq 0$; $a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$ ... 105
- Propiedades de las inecuaciones ... 106

Magnitudes proporcionales
- Magnitudes directamente proporcionales 68
- Magnitudes inversamente proporcionales 69
- Magnitudes proporcionales compuestas 206
- Magnitudes proporcionales y regla de tres ... 207

Interés simple
- Concepto de interés simple ... 142
- Equivalencias entre tasas de interés ... 143

Función lineal y lineal afín
- Función lineal ... 70
- Función lineal afín ... 71
- Función lineal y lineal afín con pendiente negativa ... 72

Función cuadrática
- Concepto de función cuadrática ... 144
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$ ... 145
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ 146
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx$ ... 147

Escala
- Factores de escala en figuras y cuerpos geométricos ... 176
- Mapas: curvas de nivel ... 217

Formas bidimensionales
- Clasificación de triángulos ... 109
- Clasificación de cuadriláteros ... 110
- Rectas y puntos notables en el triángulo 111
- Triángulos congruentes ... 208
- Criterios de congruencia ... 209
- Triángulos semejantes ... 210
- Criterios de semejanza ... 211

Medidas de formas bidimensionales
- Perímetro de formas bidimensionales compuestas 113
- Áreas de formas bidimensionales compuestas 114
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos..... 212
- Triángulos rectángulos notables 213
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos notables..... 214

Formas tridimensionales
- Prismas rectos regulares e irregulares ... 115
- Proyección ortogonal 215
- Vistas ortogonales..... 216

Medidas de formas tridimensionales
- Prisma recto: área lateral y total..... 116
- Pirámide regular: área lateral y total..... 117
- Volumen del prisma recto y pirámide regular..... 118
- Cilindro recto: área y volumen..... 119

Transformaciones geométricas isométricas
- Traslación 177
- Rotación 178
- Simetría axial y central 179
- Composición de isometrías..... 180

Transformaciones geométricas
- Homotecias 181

Conceptos básicos de estadística
- Población, muestra y tipo de muestreo ... 38

Recolección de datos
- Encuesta y observación..... 39

Organización y presentación de datos
- Tabla de frecuencias para datos no agrupados 40
- Gráficos estadísticos para datos no agrupados 41
- Tabla de frecuencias para datos agrupados 42
- Gráficos estadísticos para datos agrupados 43

Medidas estadísticas
- Medidas de tendencia central: media aritmética para datos agrupados 73
- Medidas de tendencia central: mediana para datos agrupados..... 74
- Medidas de tendencia central: moda para datos agrupados..... 75
- Medidas de dispersión: rango para datos no agrupados..... 148
- Medidas de dispersión: varianza y desviación estándar para datos no agrupados 149

Eventos probabilísticos
- Probabilidad de sucesos independientes218
- Probabilidad de sucesos dependientes.. 219

Conoce tu libro

El libro del estudiante **Matemática 3** está compuesto de seis secciones claramente identificadas por los temas, las situaciones y sus colores característicos

Apertura

Este par de páginas iniciales brinda un panorama de la organización de la unidad.

Número y título de la unidad
Se definen a partir de situaciones significativas en diversos contextos.

Valores
Se promueven en los trabajos con tus compañeros.



Competencias
Las competencias y las nociones matemáticas a desarrollar son cuatro

- Resuelve problemas de regularidad equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Conocimientos
Se abordan situaciones relacionadas con los objetivos de desarrollo sostenible.

Investigamos

El propósito de esta sección es promover la gestión autónoma del estudiante al abordar una situación problemática y plantear soluciones. Para ello, te organizarás en equipos de trabajo y seleccionarás una situación problemática.

Situaciones
Asume un rol profesional, plantéate metas y luego brinda soluciones.

Orientaciones
En equipo, se apoyarán de las orientaciones para abordar la situación problemática.



Anexos
Se emplea información de apoyo mostrada en tablas e infografías.

Exploramos

El propósito de esta sección es asumir casos desafiantes que involucran activar y consolidar los aprendizajes previos del grado. En ese sentido, se propone lo siguiente:

Actividades numeradas
Actividades de participación individual y organizadas en equipos de trabajo

Preguntas retadoras
Interrogantes que promueven tomar posiciones, posturas y plantear soluciones



Fuentes
Fuentes de información real complementarias o contrapuestas

Conclusiones
Evaluación de las afirmaciones y planteamiento de ejemplos que las afirmen o rechacen

Desarrollamos

El propósito de esta sección es consolidar el aprendizaje de nociones matemáticas clave.

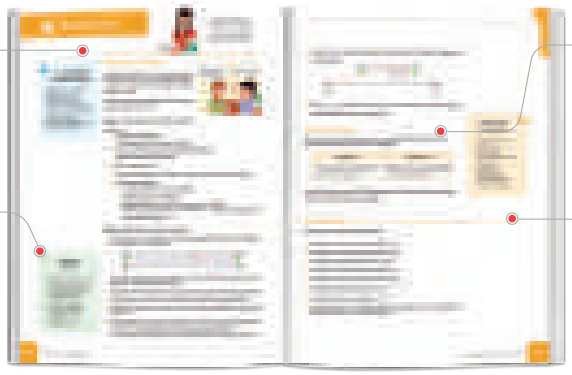
Pensamos y actuamos

Para resolver los problemas, realiza actividades experimentales, intuitivas e inductivas.

Cajas flotantes

Se presentan a partir de esta sección. Son las siguientes:





¿Qué construimos?

Desarrolla estrategias heurísticas.

Profundizamos

Brinda argumentos para ser evaluados y orientados a consolidar los aprendizajes.

Formalizamos

El propósito de esta sección es que, a partir de las situaciones problemáticas planteadas, inicies la indagación y la comprensión de las nociones matemáticas.

Situaciones problemáticas

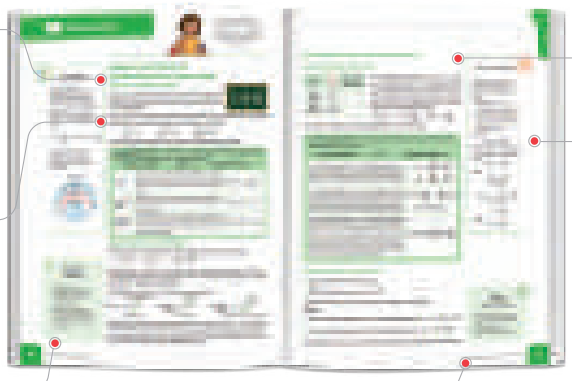
Se plantean problemas que se orientan a comprender las nociones matemáticas.

Resolución

Se plantean explicaciones a partir del problema planteado con el fin de facilitar la comprensión del tema.

Valores

Los valores a promover en los trabajos con tus compañeros.



Competencias

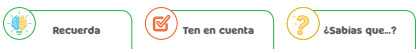
Las competencias que se desarrollan en esta sección se aprecian en el folio.

Desarrollo de conceptos

Se proponen las competencias y las nociones matemáticas a desarrollar.

Cajas complementarias

Se presenta información complementaria orientada a valorar la importancia de la matemática en diversos contextos. Son las siguientes:



Actividad lúdica

El propósito de esta sección es que te organices para abordar una situación problemática relacionada con el pensamiento computacional o lúdico.

Situación

Se promueven actividades de competencia o colaborativas.

Reglas

Es importante comprender las reglas del juego.



Desarrollo

Se busca la mejor estrategia y se reflexiona sobre lo desarrollado.

Logros

Se presenta la importancia de abordar situaciones relacionadas con los objetivos de desarrollo sostenible.

UNIDAD

1

Proponemos una alimentación saludable desde la escuela

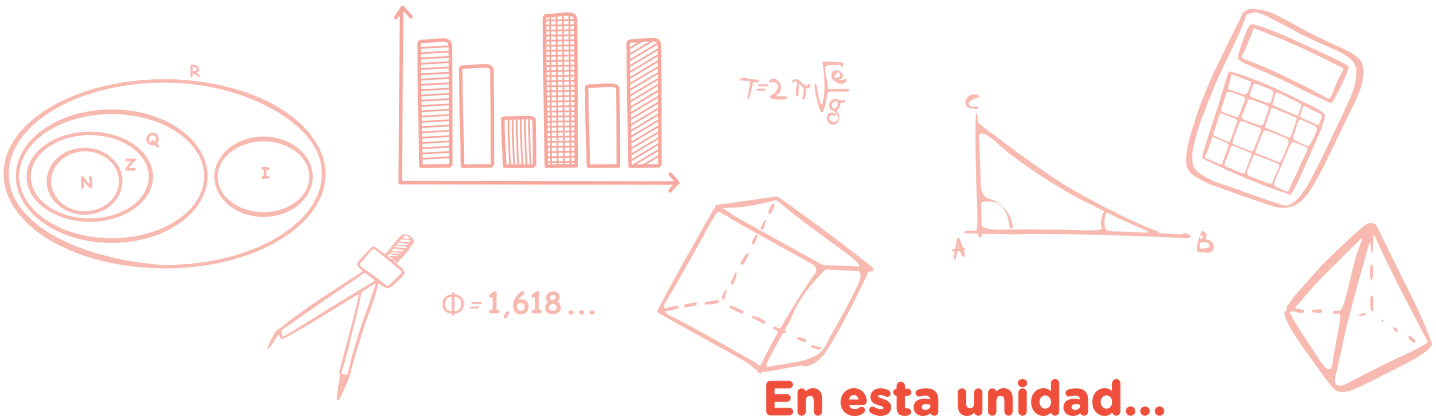


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

3 SALUD Y BIENESTAR

Este objetivo se vincula con la promoción de una alimentación saludable, especialmente en edad escolar. Tiene relación directa con:

- Se organiza con sus compañeros para valorar y registrar información matemática sobre los seres vivos de la comunidad, comprendiendo la importancia del hábitat en la comunidad y en el entorno escolar.
- Participa de forma activa en proyectos que involucran el cuidado del medio ambiente y gestión eficiente de los recursos naturales en la comunidad valorando el aporte de la matemática para la toma de decisiones.



En esta unidad...



Fuente: Municipalidad de Lima (2022).

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque intercultural
  - Respeto a la identidad cultural
  - Diálogo intercultural

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Números racionales ($\mathbb{Q}$)
- Expresión decimal de un número racional
- Fracción generatriz de una expresión decimal
- Representación en la recta numérica de los números racionales
- Relación de orden de los números racionales
- Densidad de los números racionales

Progresión geométrica (P. G.)
- Regla de formación y término general (a_n)
- Suma de los n primeros términos de una P. G. (S_n)

Ecuaciones lineales de las formas $ax + b = 0$; $a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$
- Ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución

Conceptos básicos de estadística
- Población, muestra y tipo de muestreo

Recolección de datos
- Encuesta y observación

Organización y presentación de datos
- Tabla de frecuencias para datos no agrupados
- Gráficos estadísticos para datos no agrupados
- Tabla de frecuencias para datos agrupados
- Gráficos estadísticos para datos agrupados

Investigamos



Observa cada situación, asume un rol, plantea soluciones matemáticas con apoyo del anexo y resuelve.

SITUACIÓN
Diseño de un plan nutricional escolar

Según el Ministerio de Salud, la situación de los adolescentes es preocupante debido al incremento del sobrepeso, consecuencia de una alimentación inadecuada que perjudica su bienestar. Asimismo, algunos alimentos aumentan de precio mensualmente, lo que afecta directamente la continuidad de un plan nutricional. Como nutricionista escolar, tu tarea es proponer un plan de alimentación saludable y garantizar que el presupuesto del comedor escolar sea sostenible frente al incremento de precios ocasionado por la inflación.

Ministerio de Salud

En el Perú, el 62.7% de personas de 15 años de edad a más padece de exceso de peso.

Nota de prensa

Según ENDES, este problema tiene mayor prevalencia en mujeres que en varones.



Fuente: Ministerio de Salud (2022).

¿Cómo puedes ajustar un plan de alimentación semanal que sea a la vez saludable y sostenible considerando la variación progresiva del costo de los alimentos debido a la inflación?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Elabora** una encuesta anónima para recolectar datos (edad, sexo, talla, masa) y hábitos alimentarios en una muestra de estudiantes. Presenta los resultados en tablas y gráficos estadísticos. Luego, contrasta los valores obtenidos con la tabla del IMC para la edad con el fin de identificar posibles necesidades nutricionales.
- **Establece** rangos de ingesta calórica y nutrientes recomendados según edad, sexo y necesidades nutricionales empleando intervalos abiertos y cerrados para definir los márgenes mínimos y máximos.
- **Ajusta** un plan de alimentación semanal, para ello, explora distintas combinaciones de alimentos; selecciona un día del menú semanal para aplicar el análisis calórico, ajusta porciones si es necesario mediante operaciones con números racionales (por ejemplo: calcular calorías o proteínas en 150 g de pollo, 200 mL de leche, etc.).
- **Simula** cómo varía el precio mensual de un grupo de alimentos básicos seleccionados aplicando un incremento porcentual (cualquier valor entre 1 %, 1,5 % o 2 %) de manera constante durante 6 meses. Utiliza una progresión geométrica para proyectar el precio individual de cada alimento mes a mes y el gasto total acumulado.
- **Elige** un alimento del menú escolar que esté acorde con las necesidades calóricas de los estudiantes. A partir de ello, formula problemas que incluyan el uso de ecuaciones lineales para encontrar valores desconocidos (por ejemplo, cuántos gramos de arroz deben servirse junto a una porción de pollo para que se cumpla con el requerimiento calórico total recomendado).

SITUACIÓN
Experimenta con la fermentación y las matemáticas

Según diversos estudios, el consumo responsable de alimentos fermentados favorece la salud digestiva. Como nutricionista de una campaña de salud, tu tarea será diseñar un plan de fermentación para un producto tradicional de tu comunidad y de fácil elaboración, como el yogur, la chicha o el tocosh, entre otros, considerando las condiciones óptimas para conservar sus nutrientes.

Ministerio de Salud

Festival de probióticos: conoce cinco marcas peruanas que ofrecen fermentos deliciosos y saludables

En esta nota descubre marcas locales que ofrecen kombucha, chucrut, kéfir y otras interesantes creaciones. Además, conversamos con una nutricionista, quien explica la importancia del consumo de estos alimentos.



En esta nota descubrirás opciones perfectas para iniciarte en el mundo de los fermentos, un grupo de alimentos ideales para cuidar la microbiota.

Fuente: Andina (2025).

¿Cómo puedes diseñar un plan de fermentación para un producto de tu comunidad usando modelos matemáticos que justifiquen el tiempo de fermentación óptimo para que el alimento conserve sus beneficios y propiedades saludables?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Diseña y aplica** una encuesta sobre conocimientos y preferencias alimentarias respecto a alimentos fermentados en tu comunidad. Organiza los resultados en tablas y gráficos estadísticos para interpretar tendencias y seleccionar dos alimentos tradicionales.
- **Compara** variables clave del proceso de fermentación, como temperatura, pH, tiempo y cantidad de microorganismos en dos alimentos seleccionados utilizando intervalos abiertos y cerrados para determinar sus condiciones óptimas, nutricionales y saludables.
- **Elabora** un presupuesto para alimento fermentado; para ello, considera cantidades, medidas y precio unitario, así como costos. Además, emplea operaciones con números racionales para calcular el total y evaluar su viabilidad económica en preparaciones caseras.
- **Plantea** un modelo basado en la progresión geométrica a partir del reconocimiento del crecimiento de microorganismos durante el proceso de fermentación con el fin de comprender su dinámica y comportamiento.
- **Estima** la pérdida de volumen por evaporación y el aumento térmico en el proceso de fermentación, para modelar su influencia considerando expresiones basadas en ecuaciones lineales.

Anexo A: Diseño de un plan nutricional escolar

1. Ficha técnica del plan nutricional escolar

a. Información general

El presente plan nutricional está diseñado para ajustarse a las necesidades calóricas y nutricionales de estudiantes en situación de sobrepeso o con necesidades específicas de ajuste de peso.

b. Considera

- Requerimientos calóricos diarios: varían según la edad, el género y el nivel de actividad física.
- Índice de masa corporal (IMC): utilizado para establecer si el estudiante necesita reducir, mantener o aumentar su peso.
- Macronutrientes: proteínas, carbohidratos y grasas. Ajustar de acuerdo con los requerimientos individuales.
- Distribución de comidas: desayuno, almuerzo, cena y refrigerios. Adecuar las porciones en función de las necesidades diarias.

2. Criterios para ajustar el plan de alimentación

a. Ejemplo de encuesta

Encuesta para mejorar el plan nutricional

Instrucciones: Marca con un aspa (X) o completa la siguiente información con honestidad y exactitud. Los datos serán usados únicamente con fines educativos y permanecerán en confidencialidad.

1. Edad: _____ años	**2. Sexo:** ☐ Masculino ☐ Femenino	**3. Grado o sección:** _____

4. Talla (altura en metros): _____ m **5. Masa (en kilogramos):** _____ kg

6. ¿Realizas actividad física regularmente (al menos 3 veces por semana)?

☐ Sí ☐ No ☐ A veces

7. ¿Con qué frecuencia consumes frutas y verduras?

☐ A diario ☐ 2 a 4 veces por semana ☐ Menos de 2 veces por semana ☐ Casi nunca

8. ¿Con qué frecuencia consumes comida rápida o procesada?

☐ A diario ☐ 2 a 4 veces por semana ☐ Menos de 2 veces por semana ☐ Casi nunca

9. ¿Duermes al menos 8 horas por noche?

☐ Sí ☐ No ☐ A veces

Información propuesta y adaptada para fines educativos

b. Rangos del índice de masa corporal

Fórmula para el cálculo del IMC

$$IMC = \frac{\text{Masa (kg)}}{\text{Estatura}^2\,(m^2)}$$

Categoría del IMC	Rango del IMC	Recomendación
Peso insuficiente	Menos de 18,5	Requiere incremento calórico controlado
Normal	18,5 - 24,9	Mantiene el balance energético
Sobrepeso	25,0 - 29,9	Requiere reducir ingesta calórica
Obesidad	30,0 o más	Necesita plan de restricción calórica severa

c. Necesidades calóricas diarias (según edad y sexo)

Edad (años)	Calorías recomendadas (kcal/día)	
	Masculino	Femenino
15 - 18	2800 - 3000	2200 - 2400
19 - 21	2600 - 2800	2000 - 2200

d. Recomendaciones de macronutrientes (porción diaria en g)

Macronutriente	Cantidad diaria recomendada (g)
Proteínas	50 - 70
Carbohidratos	275 - 300
Grasas	70 - 90

e. Menú escolar sugerido (para los dos primeros días de la semana)

Día	Desayuno	Almuerzo	Cena	Refrigerio
Lunes	Avena cocida (150 g), leche fresca hervida (200 mL), manzana (150 g)	Pollo a la plancha (150 g), arroz cocido (100 g), ensalada: lechuga (30 g), tomate (30 g), zanahoria rallada (40 g), naranja tangelo (150 g)	Jurel a la plancha (150 g), arroz (80 g), ensalada de espinaca (40 g), pepino (30 g), palta (30 g)	Plátano maduro (100 g), yogur descremado (150 mL)
Martes	Pan integral (60 g), queso fresco (40 g), infusión sin azúcar (200 mL), naranja (150 g)	Lentejas guisadas (150 g), huevo cocido (1 unidad), arroz (80 g), ensalada cocida: brócoli (50 g), zanahoria (50 g)	Sopa de verduras (250 mL), tortilla de espinaca (2 huevos, 80 g de verdura), papa sancochada (100 g)	Galletas integrales caseras (2 unid. ≈ 40 g), jugo de papaya natural (200 mL)

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Experimenta con la fermentación y las matemáticas

1. Ejemplo de modelo de encuesta

Encuesta sobre alimentos fermentados en la comunidad

Objetivo: Conocer las preferencias sobre alimentos fermentados tradicionales para seleccionar dos productos a analizar en el proyecto de fermentación.

Datos generales:

Edad: _____ años **Sexo:** ☐ Masculino ☐ Femenino

Ocupación: _____

Tiempo estimado de llenado: _____ minutos

Carácter de la encuesta: Anónima / Confidencial

Instrucciones

Marca con un aspa (X) la opción elegida.

- En preguntas abiertas, escriba su respuesta de manera breve y clara.
- No deje preguntas sin responder.

1. Marca los alimentos fermentados que conoces o has probado (puedes marcar más de uno):

☐ Chicha de jora ☐ Chicha morada fermentada ☐ Kiwicha fermentada
☐ Tocosh ☐ Chucrut andino ☐ Otro: _____
☐ Masato ☐ Salsa de rocoto

2. ¿Con qué frecuencia consumes alimentos fermentados?

☐ Nunca ☐ Rara vez ☐ A veces ☐ Frecuentemente

3. ¿Cuál de los siguientes alimentos te gustaría que se prepare o promueva más en tu comunidad? (Marca solo uno)

☐ Chicha de jora ☐ Tocosh ☐ Masato ☐ Otro: _____

4. ¿Qué importancia crees que tienen los alimentos fermentados para la salud?

☐ Muy importante ☐ Algo importante ☐ Poco importante ☐ No lo sé

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Tabla de alimentos fermentados oriundos del Perú

Alimento fermentado	Componentes clave	Valor nutricional destacado
Chicha de jora	Maíz germinado fermentado (jora)	Probióticos naturales, vitaminas del complejo B, enzimas digestivas
Tocosh de papa	Papa fermentada en pozas naturales	Penicilina natural, probióticos, hierro, vitamina C1
Chicha morada fermentada	Maíz morado, piña, especias	Antocianinas (antioxidantes), probióticos, fibra
Salsa de rocoto fermentado	Ají rocoto, salmuera o vinagre	Capsaicina (antiinflamatorio), vitamina C, bacterias lácticas
Chucrut andino	Repollo morado, hierbas locales	Fibra, vitamina K, *Lactobacillus*
Masato	Yuca fermentada	Probióticos inmunoestimulantes, carbohidratos complejos
Kiwicha fermentada	Pseudocereal andino en preparaciones como mazamorras	Proteína completa (15 - 18 %), lisina, hierro no hemo
Cacao fermentado	Granos de cacao amazónico	Teobromina, antioxidantes, mejora la salud cardiovascular

Fuente: Daniells, S. (2021).

3. Nivel de acidez (pH) de alimentos fermentados

El pH es una medida que sirve para establecer el nivel de acidez o alcalinidad de una disolución. La “p” significa 'potencial', por eso, el pH se llama potencial de hidrógeno. A continuación, se muestra una tabla con los niveles de pH de algunos alimentos fermentados.

Alimento fermentado	Nivel de pH (aprox.)
Chicha de jora	2,6 - 4,3
Tocosh de papa	3,6 - 4,7
Chicha morada fermentada	3,5 - 4,0
Salsa de rocoto fermentada	4,0 - 5,1
Chucrut andino	3,4 - 4,9
Masato	3,8 - 3,9
Kiwicha fermentada	3,8 - 4,8
Cacao fermentado	4,5 - 5,8

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Exploramos



La mejor forma de iniciar nuevos aprendizajes es aprovechar lo ya aprendido. ¡Resuelve estos problemas!

1. Envases de leche



Una empresa láctea lanza al mercado su nueva presentación de leche Vaquita feliz, disponible en envases de distintas capacidades y precios, según se detalla en la tabla.

Envase	Precio
$\frac{1}{4}$ litro	S/1,50
$\frac{1}{2}$ litro	S/2,50
1 litro	S/4,50
$1\frac{1}{2}$ litro	S/6,50
2 litros	S/8,50

a. Un comerciante necesita comprar 120 litros de leche, y decide adquirirlos solo en envases de 1 litro y $1\frac{1}{2}$ litros. ¿Cuántos envases de cada tipo podría comprar para minimizar sus gastos? ¿Cómo determinarías su gasto total?

b. Se afirma que para minimizar el gasto se debe comprar 6 litros de leche en envases de $\frac{1}{4}$ litro que en envases de $1\frac{1}{2}$ litros. ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.

2. Harina en la alacena

Doña Mercedes compró varios tipos de harina para preparar sus postres y creó la siguiente tabla con el fin de visualizar la distribución de cada uno en su alacena.



Harina de maíz	Harina de trigo			Harina de camote	
$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg	$\frac{1}{4}$ kg

Precios por kilogramo:

- Harina de maíz: S/4,00
- Harina de trigo: S/4,80
- Harina de camote: S/4,40

a. ¿Cuál es el exceso de gasto entre la harina de trigo y la de camote?

b. Si a la compra original decide agregar $\frac{1}{2}$ kg más de harina de maíz, ¿cuál sería la nueva distribución en la tabla? Diseña una nueva tabla que incorpore las equivalencias en forma de expresión decimal.

3. La bolsa de viaje

La familia Salazar desea salir de vacaciones, y dispone de un monto total de S/600 que repartirá a sus cuatro hijos para cubrir sus gastos menores de la siguiente manera:

- El primer hijo recibe S/240.
- El segundo hijo recibe la mitad de lo que recibió el primero.
- El tercer hijo recibe la cuarta parte del monto total.
- El cuarto hijo recibe una cantidad equivalente a la cuarta parte de lo que recibieron el primero y el segundo juntos.



A partir de la situación, responde.

a. ¿Qué parte del monto disponible recibe cada hijo? Elabora un esquema.

b. De la distribución anterior, considerando que ahora el segundo y tercer hijo reciben la mayor y menor parte del monto disponible, respectivamente, ¿de qué otra forma se podría distribuir ese monto? Plantea una propuesta.

4. Ingredientes para una deliciosa torta

Fiorella prepara una torta de fresa para vender. Ella registra en la siguiente tabla los ingredientes que utiliza según la cantidad de porciones.



a. Completa la tabla.

Ingredientes	10 porciones	20 porciones	50 porciones
Azúcar	$\frac{1}{2}$ taza		
Leche condensada		$1\frac{1}{2}$ latas	
Queso crema	$\frac{1}{5}$ kg		
Mantequilla			$\frac{1}{2}$ kg
Fresa			$2\frac{1}{2}$ kg

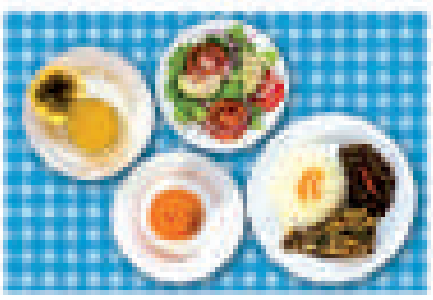
Nota: Las cantidades varían proporcionalmente con el número de porciones.

b. Se sabe que un cliente ha pedido torta de fresa para 35 porciones, pero Fiorella solo tiene 2 latas de leche condensada. ¿Le alcanzará?, ¿por qué?

5. Comidas saludables

Se muestran dos platos de comida recomendados por el Instituto Nacional de Salud.

Sudado de pescado con lentejitas con ensalada, fruta y refresco bajo en azúcar



Ingredientes para 4 porciones:

- $1\frac{1}{2}$ tazas de arroz
- $\frac{1}{4}$ kg de pescado
- $\frac{1}{4}$ taza de lentejas
- 1 diente de ajo
- 1 tomate
- 1 cebolla
- $\frac{1}{4}$ taza de aceite vegetal
- Sal yodada

Carne de res con rebosado de trigo con ensalada, fruta y refresco bajo en azúcar



Ingredientes para 4 porciones:

- 1 taza de arroz
- $\frac{1}{2}$ kg de carne de res
- $\frac{3}{4}$ de taza de trigo
- 1 cebolla
- 1 diente de ajo
- $\frac{1}{4}$ taza de aceite vegetal
- Sal yodada
- Aceite vegetal

a. Si se tiene que preparar 10 porciones de cada plato utilizando las recetas mostradas, ¿cuántas tazas de arroz más se utilizarán en el sudado de pescado que en la carne de res?

b. Un cocinero afirma que utilizando la misma receta: "El equivalente de la medida de una taza de lentejas sería tres tazas de trigo". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

c. Sabiendo que una taza de arroz tiene una capacidad de 200 g, ¿de qué formas puedes representar, en unidades de masa, la cantidad de arroz necesaria para una receta de sudado de pescado que corresponda a 14 personas?

1. Nuestros hábitos alimentarios

Un grupo de estudiantes realizó una encuesta para conocer qué prefieren tomar en el desayuno sus compañeros. A partir de ello, se obtuvieron los siguientes datos:

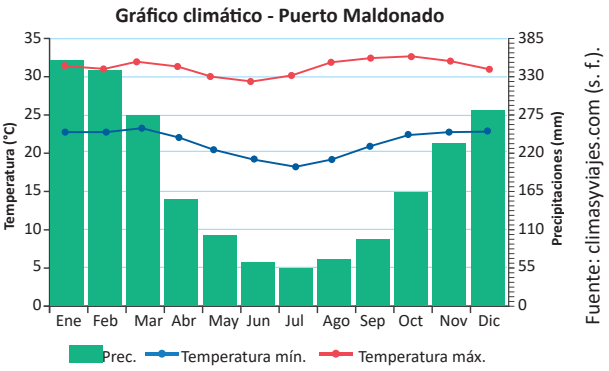
Desayuno	N.° de estudiantes
Chocolatada	9
Quinua	8
Yogur frutado	25
Avena con leche	10
Jugo de papaya	8
Total	60

a. Si ellos necesitan obtener más datos sobre los hábitos alimentarios, ¿qué otras preguntas plantearían considerando variables cualitativas y cuantitativas?

b. Un estudiante, al momento de interpretar los datos, afirma: "El 25 % de los encuestados prefieren tomar yogur frutado". ¿Estás de acuerdo con la afirmación?, ¿por qué?

2. El clima de Puerto Maldonado

El alcalde de la ciudad de Puerto Maldonado recibe el gráfico estadístico del clima de su ciudad sobre las temperaturas y los niveles de precipitación promedio en un año.



a. El asistente del alcalde afirma: "El gráfico muestra que durante los meses de junio, julio y agosto las precipitaciones fueron muy bajas". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

b. El alcalde pregunta: "¿En qué mes(es) se alcanza la temperatura máxima? ¿Y entre esos meses, cuál tiene la precipitación más alta? ¿En qué meses hay mayor variación de temperatura?". Realiza la estimación.

3. Análisis de estaturas

Una escuela cuenta con los equipos de básquet A y B. Se registró la estatura, en cm, de los jugadores, de modo que se obtuvieron los siguientes datos:

A	185	190	195	188	192	180	187
B	175	182	190	178	185	172	180



a. El entrenador, con esta información, debe analizar el comportamiento de los datos: ¿qué gráficos puedes construir para ayudar al entrenador?, ¿qué diferencia o semejanza se observa en los equipos? Justifica tu respuesta.

b. En ambos equipos A y B se desea reemplazar al jugador más bajo por jugadores de 185 y 180 cm, respectivamente. ¿Cómo afectan estos cambios al promedio y a la mediana de las estaturas? Justifica tu respuesta.

4. La cafetería de Fabiola

Con el objetivo de renovar el interior de su cafetería, Fabiola decidió aplicar una encuesta para saber qué edad tienen sus comensales. Ella registró los siguientes datos de las primeras 40 personas:

41; 19; 38; 21; 46; 22; 28; 33; 22; 29; 22; 23; 24; 25; 26; 27; 27; 28; 22; 28; 29; 22; 30; 31; 31; 32; 32; 22; 34; 35; 36; 20; 41; 18; 43; 43; 45; 46; 21; 47

a. Completa la tabla.

Edad	f_i	F_i	h_i	H_i
[18; 24[	12	12	0,3	0,3
[24; 30[	10	22		
[30; 36[	8			
[36; 42[	4		0,10	
[42; 48]	6			
Total	40		1	

b. Fabiola desea visualizar el comportamiento de los datos. ¿Qué gráfico utilizaría?, ¿por qué? Elabóralo.

5. Sobrepeso y obesidad en el Perú

El sobrepeso y la obesidad representan un problema significativo de salud pública, lo cual afecta a niños y adolescentes. Observa los gráficos para responder las siguientes preguntas:

a. ¿Qué variables cualitativas y cuantitativas se han considerado en este estudio? ¿Qué otras variables se pueden considerar para ampliar el estudio?

b. Al comparar la diferencia de sobrepeso entre urbano y rural en los adolescentes de 12 - 17 años con la diferencia de sobrepeso entre urbano y rural en los niños de 6 - 13 años, se afirma que la segunda es mayor en 5,4 %. ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica.

c. ¿Qué comparaciones puedes establecer entre los gráficos 1 y 2 respecto al sobrepeso y a la obesidad según sexo y residencia, y qué conclusiones adicionales puedes obtener de esta comparación?

Gráfico 1: Sobrepeso y obesidad en niñas, niños y adolescentes de 6 a 13 años

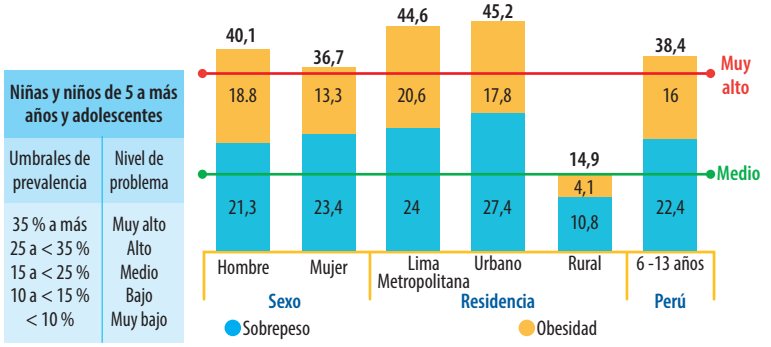
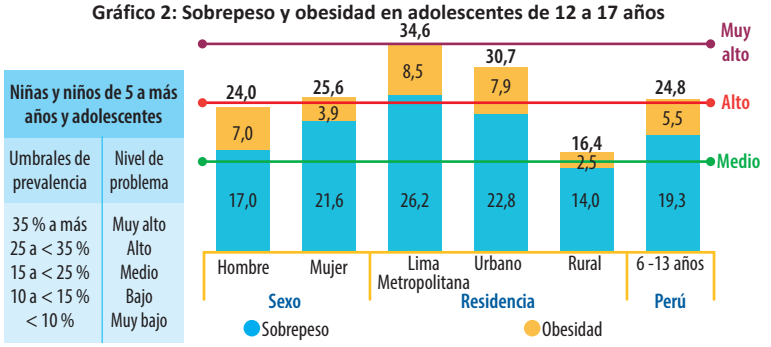


Gráfico 2: Sobrepeso y obesidad en adolescentes de 12 a 17 años



Fuente: Adaptado de Unicef (2023).

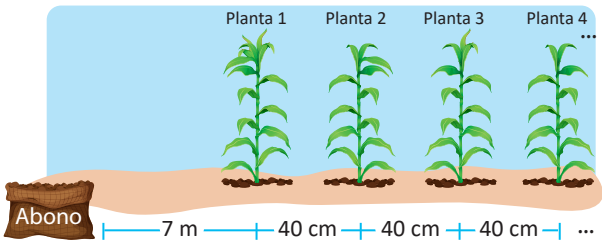
Los umbrales de prevalencia (en porcentaje) son puntos de corte que se utilizan para clasificar la magnitud de un problema de salud en una población. Por ejemplo:

35 % a más ⇒ Muy alto: indica que de 35 por ciento a más personas evaluadas presentan sobrepeso u obesidad.

25 a 35 % ⇒ Alto: de 25 a menos del 35 por ciento de personas evaluadas presentan sobrepeso u obesidad.

1. El cultivo de maíz

Un agricultor lleva el abono y lo vierte en el suelo junto a sus plantas de maíz, las cuales están separadas a una misma distancia. Se sabe que él avanza de planta en planta para dejar el abono.



a. Completa la tabla y responde.

Planta N.°	1	2	3	4	...
Distancia de ida (m)					...

Nota: Distancia de ida es la distancia desde el abono hasta la planta indicada.

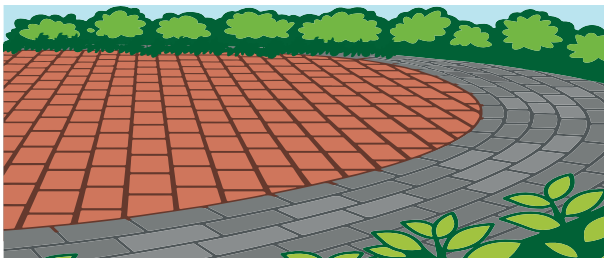
b. ¿Qué distancia recorre para llegar a la octava planta?

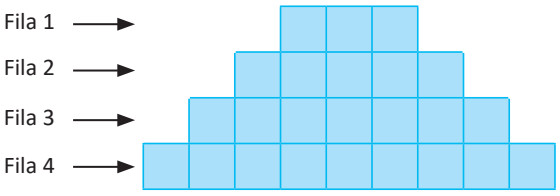
c. ¿Cuál sería la expresión matemática que permite calcular la distancia que debe recorrer según el número de la planta?

d. Se afirma: "La distancia recorrida es el doble si se duplica el número asignado a la planta". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. El diseño de un camino

Se diseña un camino de ladrillos para un parque, que comienza angosto y se ensancha progresivamente hasta cierta distancia.





a. ¿Cuántos ladrillos tendrá la décima fila?

b. ¿Cuántos ladrillos se usarán en la fila *n*?

c. Se considera: "La diferencia entre la cantidad de ladrillos de dos filas consecutivas mostradas cambia si aumenta el número de fila". ¿Consideras que esta afirmación es correcta? Argumenta tu respuesta.

3. Vasos apilados

Óscar está armando una pila de vasos. El primer vaso mide 55 mm, y cada vaso adicional añade solo 5 mm a la altura total de la pila de vasos.

a. Si la pila de vasos tuviera una altura total de 16 cm, ¿cuántos vasos se necesitarían?

b. ¿Cómo se relacionan el número de vasos y la altura total de la pila? Representa esta relación en el plano cartesiano.

c. ¿Qué tipo de gráfico obtienes y qué puedes deducir de él acerca de la relación entre el número de vasos y la altura total?

Nota: 1 cm = 10 mm



4. Figuras en expansión

Para descubrir la cantidad de cuadraditos empleados con el fin de formar las siguientes figuras, un estudiante reconoce extensiones formadas por cuadraditos y utiliza palotes verticales (en anaranjado) para contarlos. Observa.

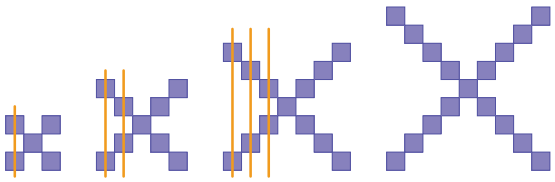


Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

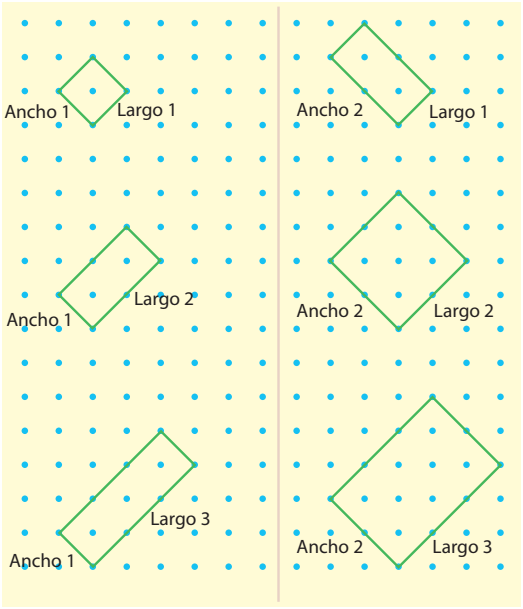
a. Completa la tabla.

N.° de fig.	Palotes	Cuadraditos por palote	Doble cuadraditos por palotes	Cuadradito central	Total de cuadraditos
1	1	2(1)	2(1) × 2	1	5
2	2	2(2)			
3	3	2(3)			
4	4	2(4)			
5	5	2(5)			
⋮	⋮				
n	*n*				

b. ¿A qué número de figura corresponden las que tienen 61 y 313 cuadraditos?

5. Puntos en rectángulos

Los rectángulos que se muestran a continuación están dibujados en un ángulo de 45° respecto a la horizontal. Dos de sus lados tienen pendiente igual a 1.



a. Completa las tablas.

Tabla para ancho (*A*) = 1

Ancho (*A*)	Largo (*L*)	Puntos internos (*d*)
1	1	1
1	2	2
1	3	
1	4	
1	5	
⋮	⋮	⋮

Tabla para ancho (*A*) = 2

Ancho (*A*)	Largo (*L*)	Puntos internos (*d*)
2	1	2
2	2	5
2	3	
2	4	
2	5	
⋮	⋮	⋮

b. ¿Qué expresión permite calcular el número de puntos internos en función del largo *L* en cada tabla?

c. Se dice que: "Si el ángulo o la pendiente del rectángulo cambia, la cantidad de puntos internos forma una progresión aritmética". ¿Te parece acertada esta afirmación? Sustenta tu respuesta.

Desarrollamos



Explora situaciones, muestra tus estrategias de resolución, organiza tus ideas matemáticas y amplía tus aprendizajes.

Tu propósito de aprendizaje

Representa y ordena números racionales (en su expresión decimal y fracción) en la recta numérica. Utiliza procedimientos de cálculo y conversión para hallar infinitos números intermedios entre dos valores dados. Justifica la propiedad de densidad de los números racionales y argumenta la existencia de infinitos valores entre cualquier par de números.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Promueve el trabajo colaborativo y el uso responsable de los materiales, reduce residuos y contribuye al cuidado sostenible de los recursos del entorno.
- Dialoga con respeto, apertura, valora las ideas y saberes de sus compañeros desde diversas perspectivas culturales.

Pensamos y actuamos

Susana le dice a Mirta: "Estoy pensando en un número entre 1,5 y 1,6". Mirta responde: "¡Eso es imposible! No hay ningún número entre 1,5 y 1,6".

¿Es cierto lo que dice Mirta? ¿Hay o no hay números entre 1,5 y 1,6?



Etapa 1: Exploración con material concreto

Material

- Una regla real (física)
- Una fuente de luz (lámpara, linterna)
- Una superficie blanca para proyectar la sombra
- Papel milimetrado (opcional)

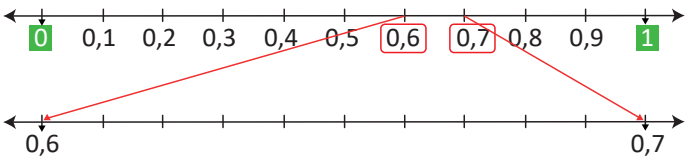
1. **Experimentación**

   a. Coloca la regla sobre la mesa y proyecta su sombra con la linterna.

   b. Observa y compara.
   - ¿Cuántos números hay en la regla?
   - ¿Cuántos hay en la sombra?
   - ¿Parece que hay más en la sombra que en la regla?
   - Reflexión guiada: ¿Cambian los números o solo su apariencia? ¿Qué representa cada uno?

Etapa 2: Exploración en la recta numérica

2. **Entre 0,6 y 0,7, ¿cuántos números decimales hay? Observa el siguiente procedimiento y complétalo:**

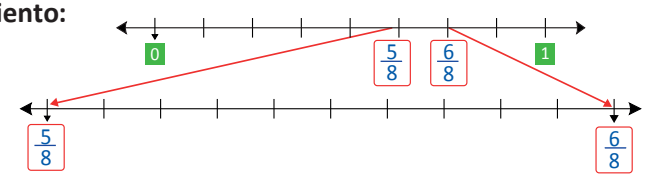


3. **En un esquema similar al anterior, divide la escala de 0,65 a 0,66 en diez partes y ubica los números correspondientes en la subescala. ¿Cuántos decimales hay entre 0,65 y 0,66? ¿Cuáles son los números?**

4. **Aplica la estrategia anterior para determinar cuáles son los números entre 0,651 y 0,652. ¿Qué conclusión puedes sacar de la estrategia empleada?**

5. **En otro momento, Susana volvió a decir: "El número que yo pensé está entre 1,58 y 1,59". ¿Cuál puede ser el número que pensó Susana? Con las pistas que da Susana, ¿se puede adivinar el número que pensó?**

6. **Entre $\frac{5}{8}$ y $\frac{6}{8}$, ¿cuántos números fraccionarios hay? Observa el siguiente procedimiento:**



7. **Entre $\frac{3}{5}$ y $\frac{4}{5}$, ¿cuántos números fraccionarios hay? ¿Es correcto decir que solo hay 10 fracciones?**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, cuatro estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3	Estudiante 4
Entre 0,65 y 0,66 hay infinitos números decimales (por ejemplo: 0,6501; 0,65001; 0,650005; ...).	Entre 1,5 y 1,6 solo existen los diez decimales 1,51; 1,52; ...; 1,59.	Entre dos números enteros siempre hay un número fraccionario o su equivalente en decimal.	Solo entre fracciones con el mismo denominador se puede encontrar una fracción intermedia.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de orden entre números racionales (en su expresión decimal y fracción) en la recta numérica y demuestra que siempre existe un número intermedio entre dos valores dados.
- Expresa con lenguaje matemático el concepto de densidad numérica e interpreta las posiciones relativas de distintos números en la recta.
- Emplea procedimientos de conversión entre decimales y fracciones para ubicar infinitos números intermedios entre dos valores extremos, y ordenalos aplicando criterios de comparación.
- Justifica la propiedad de densidad de los números racionales y evalúa con ejemplos y contraejemplos la validez de afirmaciones sobre la existencia de una cantidad finita o infinita de números entre dos valores.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Para unir dos aspersores se necesita una manguera cuya longitud esté entre $\frac{3}{5}$ m y $\frac{4}{5}$ m.**
   - a. Propón cinco longitudes posibles en fracción irreductible.
   - b. Justifica que existen infinitas longitudes posibles.
   - c. Convierte dos de tus fracciones a decimal.

2. **El letrero de una estación indica que el precio variará hoy entre S/6,37 y S/6,38 (sin incluir extremos).**
   - a. Escribe cuatro posibles precios con tres decimales que podrían mostrarse.
   - b. Si la pantalla solo muestra dos decimales, ¿cuántos precios distintos pueden aparecer estrictamente entre S/6,37 y S/6,38?
   - c. Da un procedimiento para generar nuevos precios posibles.

3. **Propón cinco fracciones irreductibles entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{4}$.**

4. **Demuestra que hay infinitas fracciones entre $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{5}$, luego, proporciona cinco ejemplos.**

Tu propósito de aprendizaje

Representa patrones numéricos y gráficos apoyado en tablas y emplea la regla de formación (término general) de una progresión geométrica; calcula el término *n*-ésimo y la cantidad total de términos identificando la razón o la diferencia correspondiente; y justifica el crecimiento y la validez del término general propuesto.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Participa activamente en actividades culturales, y valora la riqueza y diversidad cultural de nuestro país.
- Promueve la elaboración de murales ecológicos para sensibilizar a la comunidad sobre la importancia del cuidado del planeta.

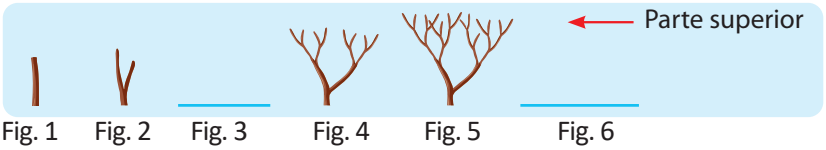
Pensamos y actuamos



Durante un festival, se decide decorar una plaza con árboles de luces utilizando modelos. Para ello, en cada modelo, el árbol comienza con una sola rama principal con una luz, y en los siguientes árboles, cada rama se divide en ramas más pequeñas, de modo que en cada extremo de una rama nueva se colocará una luz. ¿Cuántas luces habrá en la parte superior de cada árbol según el modelo? ¿Existe un patrón? ¿Puedes encontrar una expresión para saber cuántas luces se usarán en el árbol de la figura *n*?

Para el modelo A: rama doble

1. Completa la siguiente secuencia:



2. Completa la tabla para encontrar cuántas luces tienen algunos de los árboles del diseño en la parte superior. Si es necesario, dibuja los árboles en tu cuaderno.

Figura	N.° de luces
1	
2	
⋮	⋮
6	

3. Responde.

a. ¿Cómo calcularon el número de luces en el árbol de la figura 6?

b. ¿Cómo calcularían el número de luces en el árbol de cualquier figura?

c. ¿Cuántas luces tendrán los árboles de las figuras 9 y 15, respectivamente?

Exploremos el modelo B: rama triple

Cada rama se divide en tres nuevas ramas en cuyos extremos se colocarán nuevas luces. Para hallar el número de luces del árbol de la figura *n*, se realizó el siguiente procedimiento:

4. Observa la tabla.

Figura	N.° de luces
1	$\mathbf{1} = \mathbf{1} \times 3^0$
2	$3 = \mathbf{1} \times 3^1$
3	$9 = \mathbf{1} \times 3 \times 3 = \mathbf{1} \times 3^2$
⋮	⋮
n	$\mathbf{1} \times \underbrace{3 \times 3 \times \ldots \times 3}_{\text{“}n-1\text{” veces}} = \mathbf{1} \times 3^{n-1}$

5. **Responde.**
   a. ¿Qué expresión matemática resulta para el árbol de la figura 5?
   b. ¿Qué expresión matemática resulta para el árbol de la figura *n*?

Generalizamos el modelo A

Analiza lo desarrollado con el modelo B y responde.

1. **¿Qué se realizó para obtener la expresión general que permite calcular el número de luces para el árbol *n*?**
2. **¿Cuál sería el procedimiento para determinar el número de luces que tendrá el árbol *n* en el modelo A. Emplea la tabla de la pregunta 2 para generalizar.**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Si conocemos la expresión del término *n*-enésimo (a_n) de una sucesión, se puede deducir cualquier término de la progresión.	Dos sucesiones con la misma razón tienen los mismos términos.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Identifica patrones (numéricos o gráficos), determina la regla de formación y expresa el término general de una progresión aritmética o geométrica.
- Utiliza lenguaje algebraico (razón, diferencia, término *n*-ésimo) para describir la sucesión e interpreta mediante tablas y graficos su evolución.
- Aplica procedimientos para hallar la razón o diferencia y utiliza el término general para calcular cualquier término o la suma de los primeros *n* términos.
- Justifica con ejemplos si una sucesión es una progresión (evaluando la constancia de la razón/diferencia) y argumenta la validez de las predicciones futuras.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Una bacteria se reproduce de manera que su población aumenta cada hora. Si al inicio hay 2 bacterias y en la quinta hora hay 486 bacterias, ¿cuántas bacterias había en la tercera hora?**
2. **Dos personas A y B comienzan a ahorrar dinero de la siguiente manera:**
   a. La persona A ahorra S/100 el primer mes y cada mes duplica la cantidad que ahorró el mes anterior.
   b. La persona B ahorra S/600 el primer mes y cada mes ahorra la mitad de lo que ahorró el mes anterior.
      - ¿En qué mes la persona A superará el ahorro acumulado de la persona B?
3. **Una pelota rebota y, cada vez que toca el suelo, alcanza $\frac{2}{3}$. Si la altura inicial es 12 m, escribe una expresión para la altura después del *n*-ésimo rebote.**
4. **En cada sucesión determina el quinto, octavo y el *n*-ésimo término.**
   a. 2; 6; 18; ... b. 3; 12; 48; ... c. −4; −8; −16; ... d. 32; 16; 8; ...

Tu propósito de aprendizaje

Representa situaciones de igualdad mediante ecuaciones lineales de una incógnita utilizando tablas; emplea propiedades de la igualdad para obtener la solución; y, finalmente, justifica si la solución es única, infinita o inexistente y evalúa su validez en el contexto planteado.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Colabora en actividades que reutilizan materiales reciclables para representar situaciones matemáticas orientadas al cuidado y a la prevención de la contaminación del entorno.
- Respeta y valora los saberes y prácticas culturales de su comunidad relacionados con el reparto equitativo y la igualdad.

Pensamos y actuamos



En una feria, una máquina entrega cupones siguiendo una fórmula que el técnico ha olvidado. Sin embargo, se sabe que la cantidad total de cupones se relaciona con el número de cupones x mediante una expresión que podría corresponder a alguna de las siguientes ecuaciones lineales:

- $6 + 2x + 3(x - 1) - 3x = 2x + 3$
- $4(x - 1) = 4x + 2$
- $2x + 5 = 20 - 3x$

¿Cómo puede saber, sin resolver cada ecuación, si se obtendrá una única cantidad de cupones, infinitas o ninguna?

1. Completa las tablas sustituyendo los valores de x; con ello verifica si ambos lados de la ecuación son iguales.

Tabla 1

Valores de x	$6 + 2x + 3(x - 1) - 3x = 2x + 3$	¿Se cumple la igualdad? (Sí / No)
0		
1		
2		
3		

Tabla 2

Valores de x	$4(x - 1) = 4x + 2$	¿Se cumple la igualdad? (Sí / No)
0		
1		
2		
3		

Tabla 3

Valores de x	$2x + 5 = 20 - 3x$	¿Se cumple la igualdad? (Sí / No)
0		
1		
2		
3		

2. Responde.

a. ¿Qué notaste en la primera tabla? ¿Por qué se cumple siempre la igualdad?
b. ¿Qué ocurre en la segunda tabla? ¿Crees que alguna vez se cumplirá la igualdad?
c. ¿Qué ocurre en la tercera tabla? ¿Para qué valor de x se cumple la igualdad?
d. ¿Qué características presenta una ecuación lineal que no tiene solución?
e. ¿Qué tienen en común las ecuaciones lineales que sí tienen solución?
f. ¿Podrías predecir el tipo de solución de la ecuación lineal sin resolverla?

3. **Conclusiones**
   a. ¿Qué conclusiones puedes extraer de las ecuaciones presentadas?
   b. ¿Por qué crees que algunas ecuaciones tienen una única, infinitas o ninguna solución?

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Toda ecuación lineal con una incógnita tiene exactamente una solución.	Si una ecuación lineal con una incógnita tiene el mismo coeficiente en ambos lados, entonces siempre tiene una solución única.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece y representa ecuaciones lineales (una incógnita), luego tabula sus valores.
- Interpreta coeficientes para determinar el tipo de solución (única, infinita o incompatible).
- Emplea propiedades de la igualdad para hallar la solución y verificarla en tablas.
- Justifica el tipo de solución (única, infinita, ninguna) y evalúa con ejemplos y contraejemplos su validez en contexto.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

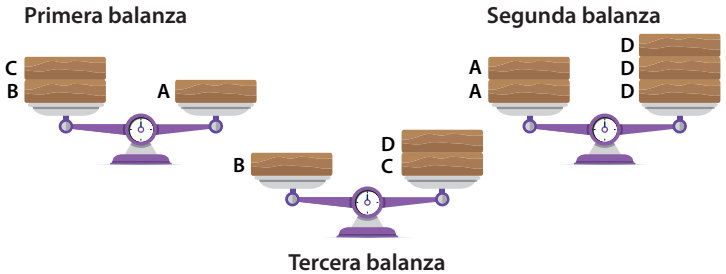
1. **Un libro de Comunicación y uno de Matemática cuestan en total S/28. Además, se sabe que tres libros de Matemática cuestan lo mismo que cuatro libros de Comunicación. ¿Cuánto cuesta un libro de Comunicación?**

2. **Daniel le dice a Katy:**

   a. Piensa un número.
   b. Súmale el número que sigue.
   c. Al resultado del paso anterior súmale 9.
   d. Divide el resultado entre dos.
   e. A lo que quedó, réstale el número que pensaste.

   Yo sé qué número obtuviste, ¿es 5 verdad?
   ¿Es verdad lo que dice Daniel? Ahora generaliza para saber por qué.

3. **Hay cuatro tipos de bloques de madera: A, B, C y D. Se muestran balanzas que están equilibradas con los bloques adecuados. Utiliza esta información para averiguar cuántos bloques C equilibrarán en la balanza a un bloque B.**



Formalizamos



Analiza los ejemplos y procedimientos, y dialoga en grupo para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

¿Sabías que...?

Los números racionales permiten comparar porciones y contenidos nutricionales, calcular porcentajes de azúcar, grasa y sal, y ajustar raciones según edad. Facilitan interpretar etiquetas, planificar menús equilibrados y controlar desperdicios. Con ellos se toman decisiones informadas, se modelan presupuestos del quiosco escolar y se promueve la ciudadanía responsable en alimentación saludable.

Recuerda

Los números racionales ($\mathbb{Q}$) lo conforman todos los números que pueden expresarse de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números enteros, y b es distinto de cero.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \ / \ a; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0 \right\}$$

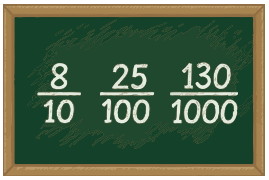
Practica valores

- Respeta y valora las tradiciones y costumbres culturales de sus compañeros, aunque sean diferentes a las propias.
- Muestra interés por conocer y aprender de otras culturas a través del diálogo y la convivencia.

NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

Expresión decimal de un número racional

Situación: La pizarra de Adela



La profesora Adela escribió en la pizarra las siguientes fracciones mostradas en la imagen. ¿Qué relación encuentras entre cada fracción y su forma decimal?

De las fracciones mostradas en la imagen, cada denominador es una potencia de 10. Cuando se efectúan los cocientes indicados en cada caso, se obtienen las siguientes expresiones decimales: $\frac{8}{10} = 0{,}8$ $\frac{25}{100} = 0{,}25$ $\frac{130}{1000} = 0{,}13$

Por lo tanto, a este tipo de decimales se les conoce como decimales exactos.

El análisis previo nos muestra que la **expresión decimal** de un número racional (en su forma fraccionaria) se obtiene al dividir el numerador entre el denominador.

Número racional ← $\frac{18}{100} = 0{,}18$ → **Expresión decimal**

Tipos de expresiones decimales:

Exacta	Tiene un número finito de cifras decimales y puede expresarse como una fracción decimal, es decir, aquella cuyo denominador es 10 o una potencia de 10.	$\frac{9}{2} = \frac{45}{10} = 4{,}5$ $\frac{4}{10} = 0{,}4$
Periódica pura	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que se repiten indefinidamente desde el primer decimal. Ese grupo se llama periodo.	$\frac{10}{3} = 3{,}33\ldots = 3{,}\widehat{3}$ (Periodo)
Periódica mixta	Su parte decimal está formada por un grupo de cifras que no se repiten y un grupo de cifras que se repiten indefinidamente.	$\frac{25}{6} = 4{,}166\ldots = 4{,}1\widehat{6}$ (Periodo; Anteperiodo)

Situación: Los números de Raquel

Raquel calcula la expresión decimal de algunas fracciones, y obtiene

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ $\frac{7}{3} = 2{,}333\ldots$ $\frac{17}{6} = 2{,}8333\ldots$

Ella afirma: "0,75 es un decimal exacto, mientras que 2,333... y 2,8333... son decimales periódicos puros porque tienen infinitas cifras decimales". ¿Estás de acuerdo? Justifica usando la teoría de expresión decimal.

Procedemos a clasificar las expresiones decimales.

Exacta $\frac{3}{4} = 0{,}75$ (parte entera; parte decimal)

Periódica pura $\frac{7}{3} = 2{,}\widehat{3}$ (parte entera; periodo)

Periódica mixta $\frac{17}{6} = 2{,}8\widehat{3}$ (parte entera; anteperiodo; periodo)

Estamos de acuerdo solo con el decimal exacto, ya que 2,333... es un periódico puro, porque desde el primer decimal se repite el 3 (grupo 3); mientras que 2,8333... es una expresión decimal periódica mixta, ya que tiene una cifra decimal que no se repite, el 8, y otra cifra que se repite infinitamente, el 3.

Fracción generatriz de una expresión decimal

Situación: El juego de las cartas

Jugador		Conversión a fracción
Laura	0,2	
Julián	1,75	
Boris	−0,25	
Gabriela	$0,\widehat{12}$	

Los jugadores convierten el número decimal de su carta en fracción para avanzar. ¿Cómo hallas las fracciones que generan esos decimales?

Hallamos.

Laura: $0,2 = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ Julián: $1,75 = \frac{175}{100} = \frac{7}{4}$

Boris: $-0,25 = -\frac{25}{100} = -\frac{1}{4}$ Gabriela: $0,\widehat{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

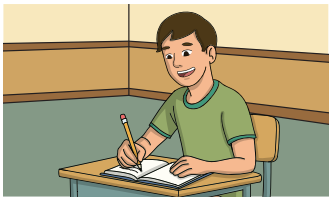
El problema resuelto muestra que la **fracción generatriz** de una expresión decimal es la fracción irreducible que da origen a una expresión decimal.

Expresión decimal ← $0,75 = \frac{3}{4}$ → **Fracción generatriz**

Tipos de fracción generatriz:

La **fracción generatriz** de un **decimal exacto** tiene como numerador el número completo sin la coma decimal y, como denominador, la unidad seguida de tantos ceros como cifras decimales tenga el número, luego se simplifica.	$0,345 = \frac{345}{1000} = \frac{69}{200}$ $2,46 = \frac{246}{100} = \frac{123}{50}$
La **fracción generatriz** de un **decimal periódico puro** se obtiene escribiendo como numerador el número sin coma, formado por la parte entera seguida del periodo, y restando la parte entera. El denominador se forma con tantos nueves como cifras tenga el periodo.	$4,\widehat{09} = \frac{409 - 4}{99} = \frac{405}{99} = \frac{45}{11}$ $0,\widehat{7} = \frac{7 - 0}{9} = \frac{7}{9}$
La **fracción generatriz** de un **decimal periódico mixto** tiene como numerador el número sin coma, formado por la parte entera y todos los decimales hasta completar el periodo, y se resta el número sin coma, formado solo por la parte entera y el anteperiodo. El denominador se construye con tantos nueves como cifras tenga el periodo, seguidos de tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo.	$8,41\widehat{3} = \frac{8413 - 84}{990} = \frac{8329}{990}$

Situación: Planteo de afirmaciones



Raúl plantea las siguientes afirmaciones:

1. La fracción generatriz de $3,\widehat{4}$ es $\frac{3}{4}$.
2. $\frac{183}{25}$ es la fracción generatriz de 7,32.

¿Todas las afirmaciones son correctas? Justifica tu respuesta.

Veamos.

1. $3,\widehat{4}$ es un decimal periódico puro y su fracción generatriz es $3,\widehat{4} = \frac{34 - 3}{9} = \frac{31}{9}$
2. 7,32 es un decimal exacto y su fracción generatriz es $7,32 = \frac{732}{100} = \frac{183}{25}$

No todas las afirmaciones son correctas; en este caso, la primera es incorrecta y la segunda correcta.

Ten en cuenta

Otra forma de obtener la **fracción generatriz** del decimal periódico puro $0,\widehat{ab}$ es

- Multiplica por una potencia de 10 que haga coincidir los periodos.
- Resta las dos ecuaciones.
- Resuelve para x.

Ejemplo:

Sea $x = 0,\widehat{25}$.

Multiplica por 100 a ambos miembros de la igualdad y obtienes

$$100x = 25,\widehat{25}$$

Resta.

$$100x = 25,\widehat{25}$$
$$x = 0,\widehat{25}$$

$$100x - x = 25,\widehat{25} - 0,\widehat{25}$$
$$99x = 25$$
$$x = \frac{25}{99}$$

$$\therefore \quad 0,\widehat{25} = \frac{25}{99}$$

Recuerda

Una fracción irreductible tiene numerador y denominador sin factores comunes mayores que uno. Ejemplo: $\frac{63}{25}$, porque MCD(63; 25) = 1; no puede simplificarse más dividiendo entre el mismo número. Por ello, es irreductible.

Reto matemático

¿Por qué

0,333... + 0,333... + 0,333... es igual a la unidad?

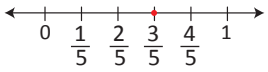
Recuerda

Cuando representes un número racional en forma de fracción en la recta numérica, recuerda que cada unidad de la recta se divide en tantas partes iguales como indique el denominador de la fracción.

Ejemplo:

Para representar $\frac{3}{5}$

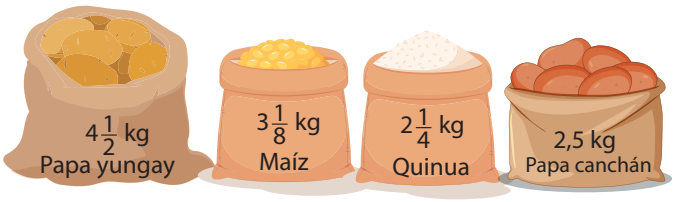
divide la unidad en 5 partes iguales y toma 3 de ellas.



Representación en la recta numérica de los números racionales

Situación: Cosecha de productos andinos

Se tiene la masa de cuatro costales con productos andinos como se muestra en la imagen. ¿Cómo podrías representar las masas de estos productos en la recta numérica?



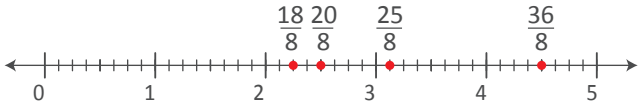
Expresamos todas las cantidades en fracciones.

$$4\frac{1}{2}=\frac{9}{2};\ 3\frac{1}{8}=\frac{25}{8};\ 2\frac{1}{4}=\frac{9}{4};\ 2{,}5=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$$

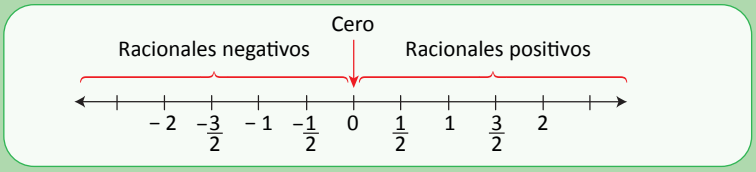
Luego, expresamos todas las fracciones con un mismo denominador.

$$\frac{9}{2}=\frac{36}{8};\ \frac{25}{8}=\frac{25}{8};\ \frac{9}{4}=\frac{18}{8};\ \frac{5}{2}=\frac{20}{8}$$

Después, dividimos cada unidad de la recta según lo que indica el denominador (en ocho partes iguales) y tomamos tantas partes como indique el numerador, así



El análisis previo nos muestra que los **números racionales** se representan en la recta numérica tanto a la izquierda como a la derecha del cero. A la derecha se hallan los racionales positivos y a la izquierda los racionales negativos.



Situación: Números en la recta

Explica cómo podemos representar $\frac{5}{2};\ \frac{7}{3};\ -\frac{9}{4};\ -\frac{14}{5}$ en la recta numérica.

Podemos utilizar su equivalencia en números decimales.

$$\frac{5}{2}=2{,}5 \qquad \frac{7}{3}=2{,}333\ldots \qquad -\frac{9}{4}=-2{,}25 \qquad -\frac{14}{5}=-2{,}8$$

Procedemos a representar en la siguiente recta, luego, situamos cada número entre los enteros correspondientes y consideramos su signo:



Aquí nos damos cuenta de que los números racionales pueden expresarse como números decimales para facilitar la representación en la recta considerando el signo.

Reto matemático

En la recta numérica, representa el número $\frac{7}{5}$. ¿Por qué este número no se encuentra entre 0 y 1? ¿Qué significa que el numerador sea mayor que el denominador?

Relación de orden de los números racionales

Situación: Fruta favorita

La profesora preguntó a sus 32 estudiantes qué fruta preferían y anotó las respuestas como una fracción del total. ¿Cuál es el orden de preferencia?

Fruta	Fracción respecto al total
Manzana	$\frac{4}{16}$
Plátano	$\frac{3}{8}$
Mandarina	$\frac{1}{4}$
Uva	$\frac{4}{32}$

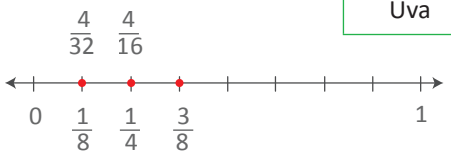
Para establecer el orden presentamos y comparamos las fracciones en la recta numérica (la escala es de octavos).

Manzana: $\frac{4}{16} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Plátano: $\frac{3}{8}$

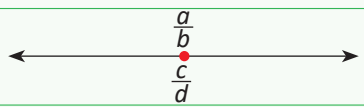
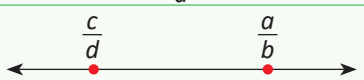
Mandarina: $\frac{1}{4} = \frac{2}{8}$

Uva: $\frac{4}{32} = \frac{1}{8}$



Según el gráfico, el primero es el plátano, seguido de la manzana o mandarina (son equivalentes) y finalmente la uva. Simbólicamente: $\frac{4}{16} = \frac{1}{4}$ y $\frac{3}{8} > \frac{1}{4} > \frac{4}{32}$.

De acuerdo con lo analizado, para los **números racionales** $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$, (con $b \neq 0$ y $d \neq 0$), en la recta numérica orientada se verifica una y solo una de las siguientes relaciones: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$

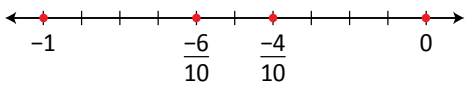
Representación en la recta	Relación de orden
	$\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ porque $\frac{a}{b}$ está a la izquierda de $\frac{c}{d}$ en la recta numérica.
	$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ porque les corresponde el mismo punto en la recta numérica.
	$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ porque $\frac{a}{b}$ está a la derecha de $\frac{c}{d}$ en la recta numérica.

También se puede comparar por productos cruzados: $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \times d < b \times c$.

Situación: Comparación de números racionales

Juan compara dos números racionales negativos utilizando el siguiente procedimiento:

- Obtenemos fracciones equivalentes cuyo denominador sea el mínimo común múltiplo de los dos denominadores de las fracciones $-\frac{4}{10}$ y $-\frac{6}{10}$
- Luego, representamos en la recta.



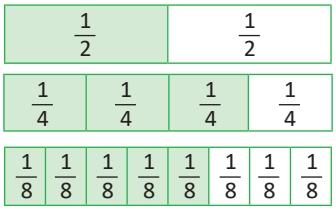
- Finalmente se establece la relación $-\frac{4}{10} < -\frac{6}{10}$

¿Estás de acuerdo con su procedimiento? Justifica tu respuesta.

Hay un error en comparación, puesto que en la recta numérica $-\frac{4}{10}$ está a la derecha de $-\frac{6}{10}$, por lo que $-\frac{4}{10} > -\frac{6}{10}$.

Ten en cuenta

Para comparar $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$ y $\frac{5}{8}$ puedes usar regletas



Observa lo siguiente:

$\frac{3}{4} > \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$

Recuerda

Para comparar fracciones heterogéneas, primero homogeneiza, y es mayor la que tiene mayor numerador.

Ejemplo:

Ordena de menor a mayor.

$\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{3}$

Calcula el m. c. m. de los denominadores (2; 4 y 3).

2 - 4 - 3	2
1 - 2 - 3	2
1 - 1 - 3	3
1 - 1 - 1	

m. c. m. = 2 × 2 × 3 = 12

Halla las fracciones equivalentes (< >). Para ello, multiplica por un mismo factor el numerador y el denominador; así se logra que todas las fracciones tengan denominador 12

$\frac{1 \times 6}{2 \times 6} = \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{1}{2} < > \frac{6}{12}$

$\frac{1 \times 3}{4 \times 3} = \frac{3}{12} \Rightarrow \frac{1}{4} < > \frac{3}{12}$

$\frac{1 \times 4}{3 \times 4} = \frac{4}{12} \Rightarrow \frac{1}{3} < > \frac{4}{12}$

Ordena de menor a mayor.

$\frac{3}{12} < \frac{4}{12} < \frac{6}{12} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$

Ten en cuenta

Entre dos racionales distintos hay infinitos racionales.
No existe "siguiente" ni "anterior" inmediato; cualquier intervalo con extremos racionales está repleto de fracciones intermedias.

Sea *m:* mediante

$m = \frac{a+c}{b+d}$, $\frac{a}{b} < m < \frac{c}{d}$.

$b > 0, d > 0, b \neq d$

Ejemplo: entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$

$m = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5}$,

$\frac{1}{3} < \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$.

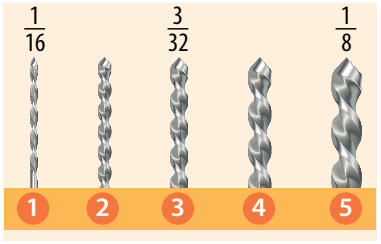
Evalúa tus progresos

- Establece la equivalencia entre un número racional y sus representaciones (fracción generatriz y expresión decimal).
- Clasifica e interpreta decimales (exactos, periódicos puros/mixtos) para convertirlos en fracción.
- Emplea procedimientos para obtener la fracción generatriz de decimales (exactos y periódicos), usando la simplificación.
- Plantea ejemplos y contraejemplos para que todo decimal exacto o periódico sea racional, y valida las conversiones y simplificaciones.

Densidad de los números racionales

Situación: Ordenamiento de brocas

Leonardo ordena brocas de menor a mayor grosor. Algunos perdieron su etiqueta, pero sus diámetros corresponden a una medida intermedia entre las brocas vecinas. Determina las medidas faltantes usando esta condición.



Usamos fracciones equivalentes con el mismo denominador.

- Broca 2: Encontramos una fracción entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{3}{32}$.

$\frac{1}{16} = \frac{4}{64}; \frac{3}{32} = \frac{6}{64} \Rightarrow \frac{4}{64}; \boxed{\frac{5}{64}}; \frac{6}{64}$ → Fracción entre $\frac{1}{16}$ y $\frac{3}{32}$

- Broca 4: Encontramos una fracción entre $\frac{3}{32}$ y $\frac{1}{8}$.

$\frac{3}{32} = \frac{6}{64}; \frac{1}{8} = \frac{8}{64} \Rightarrow \frac{6}{64}; \boxed{\frac{7}{64}}; \frac{8}{64}$ → Fracción entre $\frac{3}{32}$ y $\frac{1}{8}$

Las medidas faltantes son $\frac{5}{64}$ y $\frac{7}{64}$.

El problema resuelto ilustra que la **densidad en los números racionales** es una propiedad fundamental que establece que entre dos números racionales distintos siempre existe otro número racional. Así también tenemos un caso representativo:

Si $a, b \in \mathbb{Q}$ con $a < b$, entonces $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$ y $a < \frac{a+b}{2} < b$

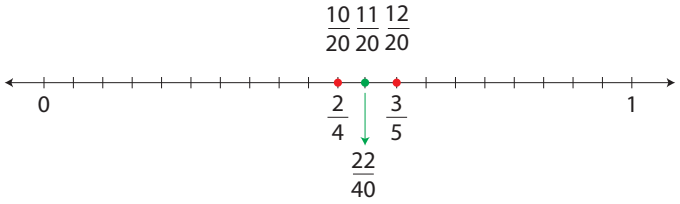
Situación: Análisis de números

Se afirma que es posible encontrar solo un número racional entre $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{5}$. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Entre dos números racionales siempre es posible encontrar un número racional.

$$\frac{\frac{2}{4}+\frac{3}{5}}{2} = \frac{\frac{10+12}{20}}{2} = \frac{\frac{22}{20}}{\frac{2}{1}} = \frac{22}{40} = \frac{11}{20}$$

Luego representamos en la recta $\frac{2}{4} = \frac{10}{20}; \frac{3}{5} = \frac{12}{20}$ y $\frac{11}{20}$



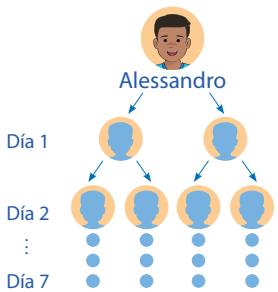
Este proceso puede continuar indefinidamente, por tanto, la afirmación es incorrecta y podemos decir que existen infinitos números racionales entre dos números dados.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P. G.)

Regla de formación y término general (a_n)

Situación: Mensajes en cadena

Alessandro comparte un mensaje el primer día con dos compañeros. El segundo día, cada uno de ellos lo reenvía a otras dos personas más. Luego, esas personas hacen lo mismo el tercer día, y así sucesivamente. ¿Cuántas personas habrán recibido el mensaje el día siete?



Organizamos los datos en una tabla y descubrimos un patrón.

Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5	Día 6	Día 7	...
2	4	8	16	32	64	128	...
	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	× 2	

En el día siete, el mensaje llegó a 128 personas.

La experiencia anterior permite reconocer que una **progresión geométrica** es una sucesión numérica en la que, a partir del segundo término, cada término se obtiene multiplicando el anterior por un número fijo, denominado razón, que se representa con r.

1.er término	2.° término	3.er término	4.° término	
a_1;	$\xrightarrow{\times r}$ a_2;	a_3;	a_4;	...

El **término general de una P. G.** es una expresión algebraica que permite calcular cualquier elemento de la sucesión a partir del primer término y la razón, sin necesidad de conocer los anteriores. Observa la construcción.

$$a_2 = a_1 \cdot r$$
$$a_3 = a_2 \cdot r = (a_1 \cdot r) \cdot r = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow a_3 = a_1 \cdot r^2$$
$$a_4 = a_3 \cdot r = (a_1 \cdot r^2) \cdot r = a_1 \cdot r^3 \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot r^3$$
$$\vdots \quad \vdots$$
$$\Rightarrow \boxed{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

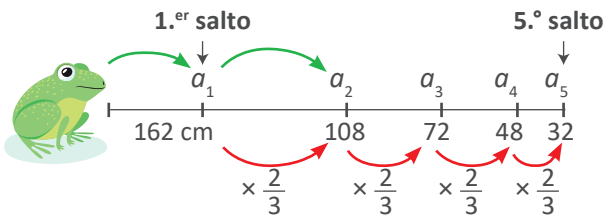
Donde

- a_n: término de lugar n o término n-ésimo
- a_1: primer término
- r : razón
- n : lugar que ocupa el término $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$

Situación: La rana saltarina

Una rana da saltos de manera que cada salto mide $\frac{2}{3}$ del anterior. El primer salto mide 162 cm. Explica cómo podrías hallar la longitud del quinto salto.

Elaboramos un gráfico con los datos.



Modelamos con una P. G.:

$a_1 = 162, r = \frac{2}{3}$

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$
$$a_5 = 162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{5-1}$$
$$a_5 = 162 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{4}$$
$$a_5 = 162 \cdot \frac{16}{81} = 32$$

La longitud del quinto salto será de 32 cm, decrece porque $r < 1$, $r = \frac{2}{3}$.

¿Sabías que...?

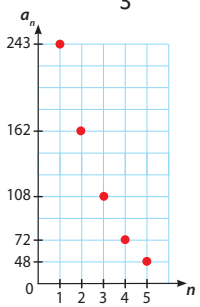
La progresión geométrica permite modelar cambios en hábitos alimentarios: reducción, aumento proporcional de actividad física, y crecimiento microbiano en alimentos sin refrigeración. Así, estudiantes estiman impactos acumulados, comparan escenarios, planifican presupuestos y toman decisiones responsables para la salud.

TIC

Ten en cuenta

La representación gráfica de una P. G. en el plano cartesiano se realiza a través de puntos discretos. En el eje X se considera el n.° de término n y en el eje Y, el valor del término n-ésimo (a_n)

Para $a_1 = 243$ y $r = \frac{2}{3}$; $a_n = 243\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$



Los puntos muestran una P. G. decreciente porque $0 < r < 1$.

Ten en cuenta

La interpolación consiste en insertar uno o más términos entre dos extremos conocidos, de modo que todos formen una P. G.
Para interpolar p términos proporcionales, se halla la razón r de la progresión que tiene por extremos a_1 y a_n.

p términos

a_1 ; ____ ; ____ ; ... ; a_n

$\times r$ $\times r$

La razón r se halla usando la expresión $r = \sqrt[p+1]{\frac{a_n}{a_1}}$

Ejemplo:

Interpolar 3 términos para una P. G. cuyo primer término es 5 y el quinto, 80.

Usa una tabla, luego halla la razón.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
5				80

$\times r$ $\times r$ $\times r$ $\times r$

$5r^4 = 80$

$r^4 = \frac{80}{5}$

$r = \sqrt[4]{\frac{80}{5}}$

$r = \sqrt[4]{16}$

$r = 2$

Los términos de la P. G. son 5; 10; 20; 40; 80.

Evalúa tus progresos

- Reconoce regularidades en sucesiones referidas a una P. G.
- Resuelve situaciones relacionadas con el término general y con la suma de términos de una P. G.

Suma de los n primeros términos de una P. G. (S_n)

Situación: Reflectores y más reflectores

Una organización imprime afiches para una campaña. Para escalar la difusión, cada tanda imprime el triple de afiches que la tanda anterior. En la tanda 1 se imprimen 6 afiches; en la tanda 2, 18; en la tanda 3, 54; y así sucesivamente hasta la tanda 6. ¿Cuántos afiches se habrán impreso en total al finalizar la sexta tanda?



Según los datos de la situación, tenemos

Tanda 1	Tanda 2	Tanda 3	Tanda 4	Tanda 5	Tanda 6
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
6	18	54	162		

$\times 3$ $\times 3$ $\times 3$

Observamos.

Suma de términos	Calculamos la suma
a_1	$S = 6$
$a_1 + a_2$	$S = 6 + 18 = 24 = 6 \times 4 = 6 \times \frac{8}{2} = 6 \times \frac{9-1}{2} = 6 \times \frac{3^2-1}{3-1}$
$a_1 + a_2 + a_3$	$S = 6 + 18 + 54 = 78 = 6 \times 13 = 6 \times \frac{26}{2} = 6 \times \frac{27-1}{2} = 6 \times \frac{3^3-1}{3-1}$
$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$	$S = 6 + 18 + 54 + 162 = 240 = 6 \times 40 = 6 \times \frac{80}{2} = 6 \times \frac{81-1}{2}$

Entonces, para sumar la cantidad de afiches hasta la tanda 6, procedemos así

$S = 6 \times \frac{3^6-1}{2} = 6 \times \frac{729-1}{2} = 6 \times \frac{728}{2} = 2184$

Se contará 2184 afiches en total hasta la tanda 6.

De lo observado en la situación inicial, concluimos que la **suma de los n primeros términos** de una progresión geométrica se calcula usando la siguiente expresión:

$$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}; \; r \neq 1$$

Donde

S_n: suma de los n primeros términos
a_1: primer término
r: razón
n: número de términos

Situación: La suma de términos en una P. G.

El profesor propone una progresión geométrica cuyo primer término es 2 y razón 4; al respecto, uno de sus estudiantes afirma que la suma de los seis primeros términos es 2760. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

Primero debemos reconocer los datos que proporciona el problema

$a_1 = 2$; $r = 4$; $n = 6$

- Como nos piden la suma de los 6 primeros términos, entonces tenemos

$S_n = \frac{a_1 (r^n - 1)}{r - 1}$

$S_6 = \frac{2 (4^6 - 1)}{4 - 1} = \frac{2 (4096 - 1)}{3}$

$S_6 = \frac{2 (4095)}{3} = 2730$

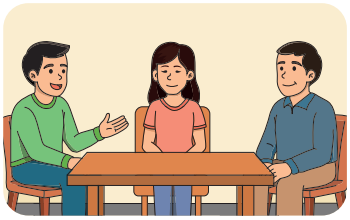
La suma de términos de la progresión es 2730, por tanto, la afirmación brindada no es correcta.

ECUACIONES LINEALES DE LAS FORMAS $ax + b = 0; a, b \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$

Ecuaciones con infinitas soluciones y sin solución

Situación: Un solo valor

Después de resolver la siguiente ecuación: $5x + 15 = 6(x + 3) - 3 - x$, Jaime afirma: "Al final, se obtiene $0x = 0$; entonces cancelamos el 0 en ambos miembros y tenemos que $x = 0$. Así que x tiene un solo valor". ¿Estás de acuerdo con su afirmación? Justifica.



Resolvemos la ecuación.

$$\begin{aligned} 5x + 15 &= 6(x + 3) - 3 - x \\ 5x + 15 &= 6x + 18 - 3 - x \\ 5x + 15 &= 5x + 15 \\ 5x - 5x &= 15 - 15 \\ 0x &= 0 \end{aligned}$$

Luego, x puede tomar cualquier valor porque el producto es cero y cumple la igualdad. Por ejemplo, reemplazamos valores en la ecuación simplificada.

$$5x + 15 = 5x + 15$$

Si $x = 2 \implies 5(2) + 15 = 5(2) + 15$

$25 = 25$ (Cumple)

Si $x = 3 \implies 5(3) + 15 = 5(3) + 15$

$30 = 30$ (Cumple)

La afirmación no es correcta debido a que no es posible cancelar el cero en ambos miembros. Luego, x puede tomar infinitos valores.

De acuerdo con lo analizado, la **ecuación con infinitas soluciones**, también denominada ecuación compatible indeterminada, es aquella en la que ambos miembros resultan idénticos para todo valor de x. Al simplificar o eliminar términos, se obtiene una igualdad verdadera, por ejemplo, $0 = 0$.

En este caso, cualquier valor de x satisface la ecuación, lo que significa que se trata de una identidad.

$ax + b = ax + b$

$0x = 0$ v $b = b$ (Identidad)

Situación: Solución imposible

En el aula, el profesor propone la siguiente ecuación: $4(x + 1) - 3 = 3(x - 2) + x$. Luego, pregunta: "¿Puede haber un valor de x que haga válida la igualdad?".

Como se trata de una igualdad, entonces

$$\begin{aligned} 4(x + 1) - 3 &= 3(x - 2) + x \\ 4x + 4 - 3 &= 3x - 6 + x \\ 4x + 1 &= 4x - 6 \\ 1 &= -6 \quad \text{(Contradicción)} \end{aligned}$$

Se observa una contradicción; por lo tanto, no existe valor de x que verifique la ecuación, y el conjunto solución es $\emptyset$.

La experiencia anterior permite reconocer que en una **ecuación sin solución**, también denominada ecuación incompatible o inconsistente, no existe ningún valor para la incógnita x que satisfaga la igualdad. La incógnita se elimina, pero queda una igualdad falsa, lo que confirma que es una contradicción. Su conjunto solución es el conjunto vacío y, por tanto, no tiene solución.

$ax + b = ax + c; b \neq c$ (Contradicción)

¿Sabías que...?

Las ecuaciones lineales con una incógnita ayudan a determinar porciones saludables, calcular cantidades de nutrientes requeridas y ajustar recetas escolares a presupuestos. Permiten fijar metas (calorías, sodio, azúcar) como igualdades, resolver precios y cantidades en compras, comparar ofertas, reducir desperdicios y sustentar decisiones alimentarias responsables en salud, ciencia y ciudadanía.

Ten en cuenta

Ecuación lineal con solución única:

- Se presenta cuando los términos con x son distintos en ambos lados.
- Es posible despejar la variable y hallar un único valor de x.

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 3x + 2 &= 5x - 6 \\ 2 &= 2x - 6 \\ 8 &= 2x \\ \implies x &= 4 \end{aligned}$$

Solución única: $x = 4$

Evalúa tus progresos

- Reconoce cuando una ecuación tiene infinitas soluciones o no tiene solución.
- Plantea ejemplos y contraejemplos para validar afirmaciones sobre las posibles soluciones de una ecuación lineal.

¿Sabías que...?

Los conceptos básicos de estadística permiten recolectar y organizar datos sobre el consumo escolar, calcular la media y mediana, comparar porcentajes de azúcar, sodio y calorías, y representar resultados en tablas y gráficos. Con evidencias, estudiantes argumentan cambios en menús, establecen metas de mejora y toman decisiones responsables para una alimentación saludable.

Recuerda

La **población** es un conjunto de elementos, objetos o individuos que comparten una o más características comunes, y sobre las cuales se desea obtener información.

La **muestra** es un subconjunto de la población de tamaño *n*, seleccionado de manera que permita obtener información, en lo posible, representativa.

A cada elemento de la población o muestra se le denomina individuo. El dato es el valor de una variable registrada en un individuo.

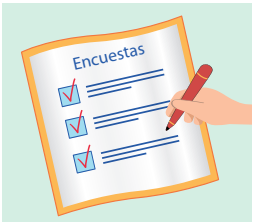
Practica valores

- Fomenta el trabajo colaborativo valorando el entorno y organizando responsabilidades equitativas.
- Respeta el interés por las lenguas originarias de sus compañeros, y solicita aclaraciones con apertura y respeto.

CONCEPTOS BÁSICOS DE ESTADÍSTICA

Población, muestra y tipo de muestreo

Situación: Mejora del quiosco



Los estudiantes del tercer grado deben proponer mejoras para el quiosco escolar. Como encuestar a los 400 estudiantes de secundaria es difícil, el profesor forma tres grupos y sugiere utilizar una muestra representativa de 50 estudiantes. Los grupos proponen distintos métodos

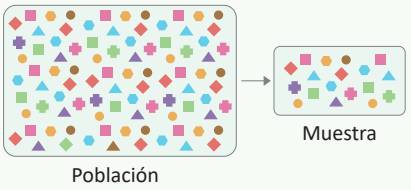
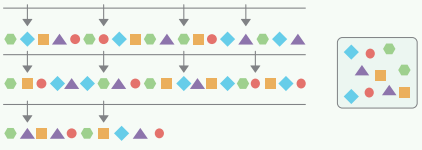
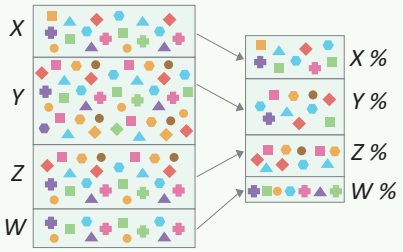
Grupo A: Encuestar a los primeros 50 estudiantes que salgan al recreo.
Grupo B: Elegir 10 alumnos al azar de cada grado (de 1.° a 5.°).
Grupo C: Pedir a 50 amigos que respondan una encuesta virtual.

¿Qué método representa mejor la opinión de todos?

Grupo A	No todos los estudiantes salen a tiempo (sesgo por puntualidad).
Grupo B	Incluye estudiantes de todos los grados y la selección es al azar.
Grupo C	La muestra puede estar influenciada por ser amigos (sesgo por amistad).

Luego, el grupo B es la mejor opción para representar la opinión de todos.

El problema resuelto ilustra que una **muestra aleatoria** es aquella que se escoge al azar, de forma que quien realiza el estudio no influye en la elección de los individuos. Cada miembro de la población tiene una probabilidad de ser elegido. Algunos tipos comunes de muestreo son los siguientes:

Tipos	Representación
Muestreo aleatorio simple. Se obtiene mediante un proceso aleatorio, como sorteos, tablas de números aleatorios o generadores digitales.	
Muestreo sistemático. Se aplica cuando la población está listada en algún orden (por ejemplo, por código, fecha, hora, etc.). Se elige un individuo al azar y a partir de él.	
Muestreo estratificado. Consiste en dividir previamente a la población en estratos homogéneos según una característica común (como grado, turno, sección, etc.), y luego se selecciona una muestra aleatoria dentro de cada estrato.	

RECOLECCIÓN DE DATOS

Encuesta y observación

Situación: Acceso al celular



Fuente: Freepik.es

Para conocer el acceso al celular entre los estudiantes y el momento en que obtuvieron su primer equipo, el profesor propone aplicar un cuestionario de dos preguntas

1. ¿Tienes celular? ( ) Sí ( ) No
2. ¿A qué edad y en qué año tuviste tu primer celular?

Como podemos observar, estas dos preguntas son diferentes. La primera tiene opciones para marcar y la segunda requiere una respuesta más elaborada y diversa. Así, la primera es de tipo cerrado y la segunda es de tipo abierto.

La experiencia anterior permite reconocer que las técnicas más comunes para recolectar datos son la encuesta y observación.

Encuesta. Técnica de recopilación de datos mediante un cuestionario con preguntas aplicadas a una muestra de la población. Su propósito es conocer opiniones, características o hechos. El proceso central es la interrogación y el registro de respuestas. El instrumento es el cuestionario. Cada pregunta responde a una variable que se desea investigar.

Observación. Técnica de recolección de información que consiste en registrar de manera sistemática el comportamiento, actitudes o acciones de personas o fenómenos en su contexto natural. El instrumento a usar es la ficha de observación.

Situación: Análisis de una encuesta

Observa el siguiente cuestionario aplicado a 200 habitantes del distrito de Huaraz:

Encuesta

1. ¿Cuál es tu sexo? ( ) Masculino ( ) Femenino
2. ¿Qué edad tienes actualmente?
3. ¿Desayunas diariamente? ( ) Sí ( ) No ( ) A veces
4. Menciona tres alimentos que acostumbras consumir en el desayuno.

   _____ _____ _____
5. ¿Cuál de estos alimentos consumes con mayor frecuencia?

   ( ) Verduras ( ) Granos ( ) Carnes ( ) Frutas
6. ¿Cuál es tu peso? Si lo sabes, escríbelo _____kg

Al respecto, Carlos realizó las siguientes afirmaciones:

a. Las preguntas 1, 3 y 5 son cerradas, pues las respuestas son de opción múltiple.

b. Las preguntas 2, 4 y 6 son abiertas, pues las respuestas son libres y dependen del encuestado.

¿Estás de acuerdo con estas afirmaciones?

Sí, pues las preguntas impares se restringen a respuestas predefinidas y las pares a dar una respuesta libre.

Recuerda

Variables estadísticas

La variable es la característica de los elementos de una población que puede tomar distintos valores dentro de un dominio.

Variable cualitativa	
Describe un atributo o cualidad.	
Nominal	**Ordinal**
Los datos no guardan necesariamente un orden lógico. Ejemplo: • Profesión (médico, ingeniero, ...) • Proveedor de correo electrónico (Gmail, Yahoo, Outlook, ...)	Las categorías tienen orden jerárquico. Ejemplo: • Grado de instrucción (primaria, secundaria y superior) • Medalla obtenida (oro, plata, bronce)

Variable cuantitativa	
Presenta solo valores numéricos.	
Discreta	**Continua**
Las variables toman valores enteros. Ejemplo: • Número de hermanos (0; 1; 2; ...) • Número de hijos (0; 1; 2; ...) En ninguno de los ejemplos pueden presentarse valores decimales.	Los valores están en un intervalo (incluidos los decimales). Ejemplo: • Estatura (1,48 m; 1,50 m; 1,58 m; ...) A partir de las estaturas de dos personas es posible que otras personas midan cualquier valor comprendido entre ambas.

Ten en cuenta

La estructura de una tabla de frecuencias tiene la siguiente forma:

Variable	f_i	F_i	h_i	h_i(%)
Total				

Recuerda

Una forma práctica de calcular las frecuencias absolutas acumuladas (F_i) es siguiendo las flechas y sumando progresivamente los f_i.

Variable	f_i	F_i
35	1	1
36	2	3
37	6	9
38	4	13
39	3	16
40	1	17
41	2	19
42	1	20

Reto matemático

Cuenta figuras geométricas visibles en el aula y arma una tabla por tipo con el número encontrado. Luego, diseña un juego usando una categoría elegida.

ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS
Tabla de frecuencias para datos no agrupados

Situación: Frutas preferidas

La profesora Yurico preguntó a sus estudiantes por sus frutas preferidas y obtuvo las siguientes respuestas:



Manzana	Plátano	Plátano	Mandarina	Manzana
Mandarina	Manzana	Mandarina	Manzana	Uva
Manzana	Plátano	Mandarina	Uva	Mandarina
Plátano	Mandarina	Manzana	Mandarina	Mandarina

Luego, realizó la siguiente pregunta: ¿cómo organizarías estos datos repetidos en una tabla de frecuencias para no listarlos uno por uno?

Observamos que los datos están dispersos, emplearemos una tabla para reunir los valores repetidos (f_i) y calcular su proporción o porcentaje sobre el total ($h_i = \frac{f_i}{n}$; h_i%), lo que facilita el análisis.

El problema resuelto ilustra que la **tabla de frecuencias** para **datos no agrupados** se utiliza para las variables cualitativas y cuantitativas discretas. Los tipos de frecuencias son

- **Frecuencia absoluta (f_i).** Cantidad de veces que aparece un valor (x_i).
- **Frecuencia absoluta acumulada (F_i).** Suma progresiva de las frecuencias absolutas. $F_i = f_1 + f_2 + f_3 + \ldots + f_n$
- **Frecuencia relativa (h_i).** Cociente entre f_i y el número total de datos (n). $h_i = \frac{f_i}{n}$
- **Frecuencia relativa porcentual (h_i%).** Indica el porcentaje que representa la frecuencia absoluta de una categoría respecto al total. $h_i(\%) = \frac{f_i}{n} \times 100\ \%$

Situación: Gustos por las bebidas

Sandra realizó una encuesta en el cafetín sobre el desayuno preferido de los docentes, y obtuvo los siguientes datos: 15 toman maca; 6, yogur; 12, quinua; 8, avena; y 9, jugo. A continuación, elaboró la siguiente tabla:



Desayuno	f_i	F_i	h_i	h_i(%)
Maca	15	15	$\frac{15}{50} = 0{,}30$	30 %
Yogur	6	21	$\frac{6}{50} = 0{,}12$	12 %
Quinua	12	33	$\frac{12}{50} = 0{,}24$	24 %
Avena	8	41	$\frac{8}{50} = 0{,}16$	16 %
Jugo	9	50	$\frac{9}{50} = 0{,}18$	18 %
Total	$n = 50$	-	1,00	100 %

Luego, realizó las siguientes afirmaciones:

- Los docentes que prefieren maca, yogur o quinua son 41.
- Quienes prefieren yogur, avena y jugo suman el 46 %.

¿Estás de acuerdo con las afirmaciones? Justifica tu respuesta.

La primera información de Sandra es incorrecta, pues la frecuencia absoluta acumulada (F_3), según la tabla, es de 33 docentes. La segunda sí es correcta, pues, al sumar los porcentajes 12 %, 16 % y 18 %, nos da 46 %.

Gráficos estadísticos para datos no agrupados

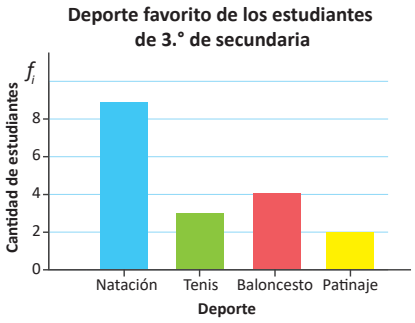
Situación: Deportes favoritos

La tabla muestra los deportes favoritos de un grupo de estudiantes del tercer grado de secundaria. Explica cómo construir un gráfico de barras y uno circular.

Deporte	f_i
Natación	9
Tenis	3
Baloncesto	4
Patinaje	2
Total	18

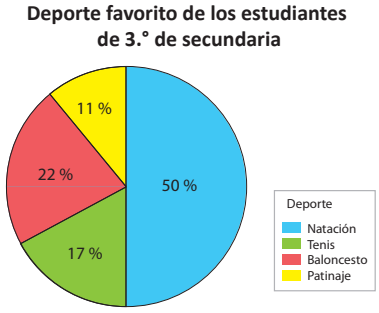
Para construir un gráfico de barras

- Trazamos dos ejes, uno horizontal, donde se colocan las categorías de la variable, y otro vertical, donde se indica la cantidad correspondiente a cada categoría (f_i).
- Dibujamos barras cuya altura coincide con la frecuencia absoluta de cada categoría (f_i).
- Colocamos un título adecuado considerando la variable de estudio.



Para construir un **gráfico circular**

- Dividimos un círculo en sectores que representan las diferentes categorías de la variable. La medida del ángulo de cada sector es proporcional al valor que representa la frecuencia absoluta de la categoría correspondiente.
- Calculamos la medida de los ángulos de cada sector.



Deporte	f_i	h_i	h_i(%)	m∠central
Natación	9	0,50	50 %	$\frac{9}{18} \times 360° = 180°$
Tenis	3	0,17	17 %	$\frac{3}{18} \times 360° = 60°$
Baloncesto	4	0,22	22 %	$\frac{4}{18} \times 360° = 80°$
Patinaje	2	0,11	11 %	$\frac{2}{18} \times 360° = 40°$
Total	18	1,00	100 %	360°

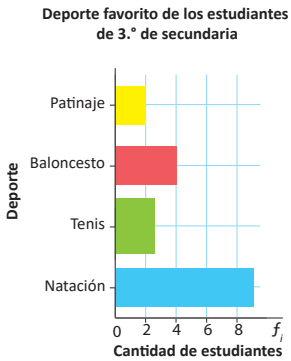
- Colocamos una leyenda considerando todas las categorías de la variable y un título adecuado tomando en cuenta la variable estudiada.

La experiencia anterior permite reconocer que un **gráfico de barras** se utiliza para comparar datos de tipo cualitativo o cuantitativo discreto. En esta representación, la altura de cada barra (o rectángulo) coincide con la frecuencia absoluta de los datos.

Asimismo, un **gráfico de sectores circulares** (diagrama de pastel) se utiliza para mostrar cómo se reparte un total entre varias categorías. Es conveniente cuando interesa saber la composición del 100 %, pero pierde eficacia si hay muchas categorías o diferencias muy pequeñas.

Ten en cuenta

El gráfico de barras de "deporte favorito..." también puede representarse en barras horizontales. Es útil cuando las categorías tienen nombres largos.



Recuerda

Para calcular la medida del ángulo central de cada sector usa la siguiente expresión:

$$\text{m}\angle\text{central} = \frac{f_i}{n} \times 360°$$

Evita usar h_i redondeado para no perder exactitud.

Reto matemático

¿Puede un gráfico de barras transmitir información engañosa? Explica con un ejemplo qué se manipuló.

Ten en cuenta

Rango

$$R = V_{máx} - V_{mín}$$

N.° de intervalos

$$k = \sqrt{n}$$

n: total de datos

(Si la raíz resulta decimal, se aproxima al entero próximo).

Amplitud

$$A = \frac{R}{k}$$

Recuerda

- Intervalo de clase (I_i): $[L_i; L_S]$

  L_i: límite inferior

  L_S: límite superior

  Ejemplo:

  [18; 22[

  L_i ↵ ↳ L_S

- Marca de clase (X_i): $\frac{L_i + L_S}{2}$

  Calcula las marcas de clase para cada intervalo de la tabla

$$x_1 = \frac{18 + 22}{2} = 20$$

$$x_2 = \frac{22 + 26}{2} = 24$$

$$x_3 = \frac{26 + 30}{2} = 28$$

$$x_4 = \frac{30 + 34}{2} = 32$$

$$x_5 = \frac{34 + 38}{2} = 36$$

La marca de clase también representa el intervalo en cálculos posteriores (media, varianza, etc.).

Tabla de frecuencias para datos agrupados

Situación: Asistencia a una conferencia

En un auditorio universitario, se preguntó la edad a 25 asistentes, de modo que se obtienen los siguientes datos:

18	20	18	34	38
19	31	27	34	19
21	20	26	28	25
31	18	35	38	25
21	20	35	23	26



¿Cómo elaborarías una tabla de frecuencias para datos agrupados? Explica. ¿Qué afirmaciones podrías plantear a partir de la distribución de los datos en la tabla?

Para construir la tabla de frecuencias, seguiremos estos pasos

1. Hallamos el rango de las edades: $R = 38 - 18 = 20$
2. Calculamos el número de intervalos: $k = \sqrt{25} = 5$ (5 intervalos)
3. Hallamos la amplitud (A) de cada intervalo: $A = \frac{20}{5} = 4$
4. Determinamos los límites de cada intervalo:

$I_1 = [18; 22[$ (+4) $I_2 = [22; 26[$ (+4) $I_3 = [26; 30[$ (+4)

Con estos datos construimos la tabla.

Contamos la cantidad de datos que se encuentran en ese intervalo. Esta cantidad corresponde a la frecuencia absoluta (f_i). Calculamos f_i, h_i y h_i(%).

Edad	Marca de clase X_i	f_i	F_i	h_i	h_i(%)
[18; 22[	20	10	10	0,40	40 %
[22; 26[	24	3	13	0,12	12 %
[26; 30[	28	4	17	0,16	16 %
[30; 34[	32	2	19	0,08	8 %
[34; 38]	36	6	25	0,24	24 %
Total	-	$n = 25$	-	1,00	100 %

Al observar el primer intervalo podemos afirmar que la mayoría de los asistentes (40 %) tiene menos de 22 años; mientras que el grupo menos numeroso corresponde a las edades entre 30 y 34. Finalmente cerca de la cuarta parte (24 %) de los asistentes se concentra en el último intervalo.

El problema resuelto ilustra que la tabla de frecuencias se utiliza para las variables cuantitativas tanto discretas como continuas. Esta permite organizar datos numéricos en intervalos, para facilitar el resumen de la información cuando hay muchos valores diferentes. Su construcción implica los siguientes pasos:

Rango o recorrido (R). Es el campo de variación de la variable. Se obtiene restando el valor mínimo al valor máximo del conjunto de datos.

N.° de intervalos (k). Su valor se calcula extrayendo la raíz cuadrada del total de datos y aproximando el valor al entero más cercano.

Amplitud (A) de cada intervalo. Es el cociente entre el rango o recorrido y el número de intervalos.

$$A = \frac{R}{k}$$

Gráficos estadísticos para datos agrupados

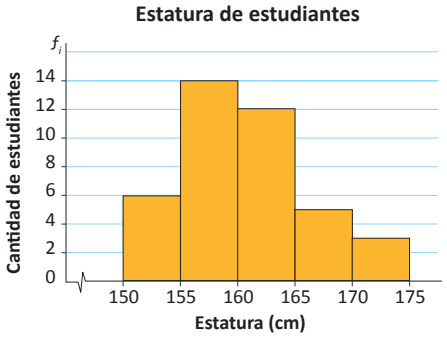
Situación: Estaturas en gráficos

Karla desea construir un histograma y polígono de frecuencias referido a las estaturas de sus compañeros. ¿Cómo elaboraría los gráficos? Explica.

Estatura (cm)	Marca de clase X_i	f_i
[150; 155[	152,5	6
[155; 160[	157,5	14
[160; 165[	162,5	12
[165; 170[	167,5	5
[170; 175]	172,5	3
Total	-	$n = 40$

Para construir el **histograma**

- En el eje X colocamos los intervalos y en el eje Y, las frecuencias.
- Dibujamos barras cuya altura sea la frecuencia de cada intervalo.
- Añadimos un título y etiquetas en los ejes para que el histograma sea claro y comprensible.

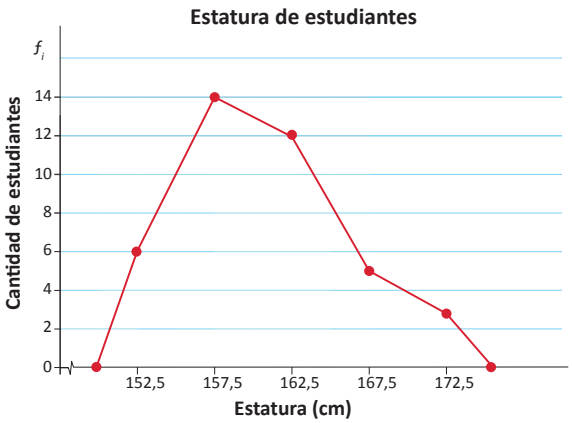


Como se aprecia en el ejemplo anterior, **el histograma** es la representación de barras contiguas cuyo eje horizontal muestra **intervalos de clase** y el eje Y, las frecuencias absolutas. Cuando las clases (intervalos) tienen igual amplitud, la altura de cada barra es f_i, que permite visualizar la distribución de los datos, simetrías, sesgos o modas.

El **polígono de frecuencias** es el gráfico de líneas que une las **marcas de clase** con sus frecuencias $(x_i; f_i)$. Por lo general, se dibuja sobre el histograma uniendo los puntos medios de las barras, y muestra la tendencia y forma de la distribución.

Para construir el **polígono de frecuencias**

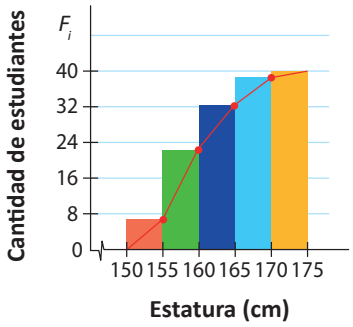
- En el eje X colocamos las marcas de clase (x_i) y en el eje Y, las frecuencias (f_i).
- Marcamos los puntos $(x_i; f_i)$ según cada frecuencia y los unimos con líneas rectas.



- Cerramos el polígono de frecuencias con los puntos sobre el eje X, que tienen frecuencia cero al inicio y al final.
- Colocamos un título apropiado, etiquetas en los ejes, y aseguramos que el polígono sea claro y comprensible.

Ten en cuenta

En un polígono de frecuencias acumuladas (ojiva), se unen los vértices superiores derechos de cada rectángulo del histograma.



Evalúa tus progresos

- Representa la distribución de datos agrupados en una tabla de frecuencias con intervalos y calcula la marca de clase (x_i).
- Expresa información e interpreta la distribución mediante histogramas y polígonos de frecuencia.
- Emplea procedimientos para obtener el rango, y la amplitud, y para determinar el número de intervalos y hallar las frecuencias.
- Justifica las tendencias de concentración o dispersión, y evalúa con ejemplos y contraejemplos la representatividad y las conclusiones a partir de la información de gráficos estadísticos.

Actividad lúdica



¡Analiza jugando! Observa las reglas del juego, compara estrategias y revisa tus resultados con sentido matemático.

Propósito de aprendizaje

Ordena números decimales basado en una tabla de algoritmos basada en bucles; evalúa y compara estrategias de comparación, inserción y desplazamiento para lograr el orden correcto con el menor número de pasos; y justifica la eficiencia argumentando qué tipos de bucles resultan más rápidos y por qué.

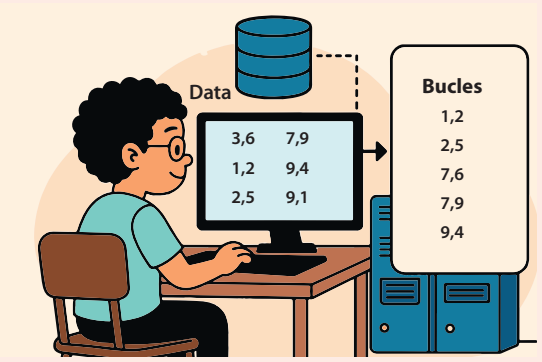
Practica valores

- Impulsa el trabajo colaborativo valorando el entorno y organizando responsabilidades y tiempos de manera equilibrada.
- Valora y respeta las lenguas originarias de sus compañeros, y solicita con interés aclaraciones cuando percibe pronunciaciones o expresiones diferentes.

En busca del bucle perfecto

1. Situación

En un sistema de bases de datos, los registros numéricos se cargan de forma desordenada, lo que afecta su eficiencia. A través de la simulación de operaciones básicas como bucles (procesos que se repiten indefinidamente), tú y tu equipo automatizarán el ordenamiento de una lista decimal. Asimismo evaluarán distintos métodos para encontrar el bucle más eficiente que optimice los recursos y mejore la calidad de los reportes.



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Forma equipos de 3 a 4 estudiantes.

b. Cada equipo crea una lista de 20 números decimales desordenados y lo comparten a otro equipo.

c. Cada equipo elige un bucle; para ello, debe contar con la guía que describe los seis bucles disponibles.

Con ello, deben:

d. Registrar en sus cuadernos u hojas de cálculo cuántos números están en su lugar correcto (ordenados de mayor a menor).

e. Contar cuántas operaciones (comparaciones o movimientos) se han realizado.

- En la siguiente ronda, pueden probar con otro bucle distinto y comparar los resultados.

Los seis bucles disponibles (acciones o algoritmos del juego)

N.°	Nombre	Tipo de acción o algoritmo	Ejemplo (orden de mayor a menor)
1	Intercambio de dos tarjetas adyacentes	Compara dos números seguidos y los intercambia si están en orden incorrecto.	{2,1; 3,5} ⇒ {3,5; 2,1}
2	Rotación de tres a la izquierda	Rota tres números: el primero pasa al final del trío.	{2,0; 4,1; 3,3} ⇒ {4,1; 3,3; 2,0}
3	Ordenar tres tarjetas	Ordena internamente un bloque de tres números.	{3,0; 1,5; 2,7} ⇒ {3,0; 2,7; 1,5}
4	Mover el mayor al final (pasada completa)	Compara de izquierda a derecha y coloca el número mayor al final.	{2,5; 5,0; 3,1} ⇒ {2,5; 3,1; 5,0}
5	Invertir el par o el trío si están desordenados	Si un número es menor que su vecino, invierte ese par o trío.	{3,1; 2,2} ⇒ {2,2; 3,1}
6	Búsqueda y posicionamiento (tipo inserción)	Toma un número y colócalo en su lugar dentro de un bloque.	{4,0; 1,9; 3,7} ⇒ {4,0; 3,7; 1,9}

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Preparación

a. Genera una lista de 20 números decimales de forma creativa (puedes usar fracciones, decimales, etc.).

b. Desordena la lista (de forma aleatoria o intercambiándola con otro equipo).

Aplicación de bucles

c. Elige un bucle.

d. Aplícalo tres veces consecutivas.

e. Cuenta operaciones y verifica las posiciones correctas.

Cambio de estrategia

f. Si desean mejorar el resultado, prueben con otro bucle.

g. Reflexionen sobre la eficiencia del bucle elegido.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué bucle fue más eficiente con su secuencia?, ¿por qué?

b. ¿Qué patrones observaron en el comportamiento de los números?

c. ¿Hubo algún bucle que parecía rápido, pero resultó ser ineficiente?

d. ¿Qué dificultades encontraron al ordenar decimales con muchas cifras o con ceros (por ejemplo: 3,10 vs. 3,2)?

e. ¿Un número como 4,01 puede ser mayor que 4,1? ¿Cómo lo verificaron?

f. ¿Por qué crees que algunas personas confunden 3,09 como mayor que 3,1?

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de orden entre números decimales, representa reglas de comparación y movimiento (bucles) mediante secuencias lógicas de pasos.
- Expresa con lenguaje decimal (décimas, centésimas) la comparación de números e interpreta las diferencias entre los algoritmos de ordenamiento.
- Emplea procedimientos de ordenamiento y estrategias lógicas (burbuja, inserción) para hallar la secuencia correcta de decimales en el menor número de intercambios.
- Justifica que la eficiencia de un bucle depende del número de comparaciones/ intercambios, y evalúa el algoritmo más rápido para ordenar números decimales.

UNIDAD

2

Usamos las matemáticas para optimizar la carga y producción agrícola

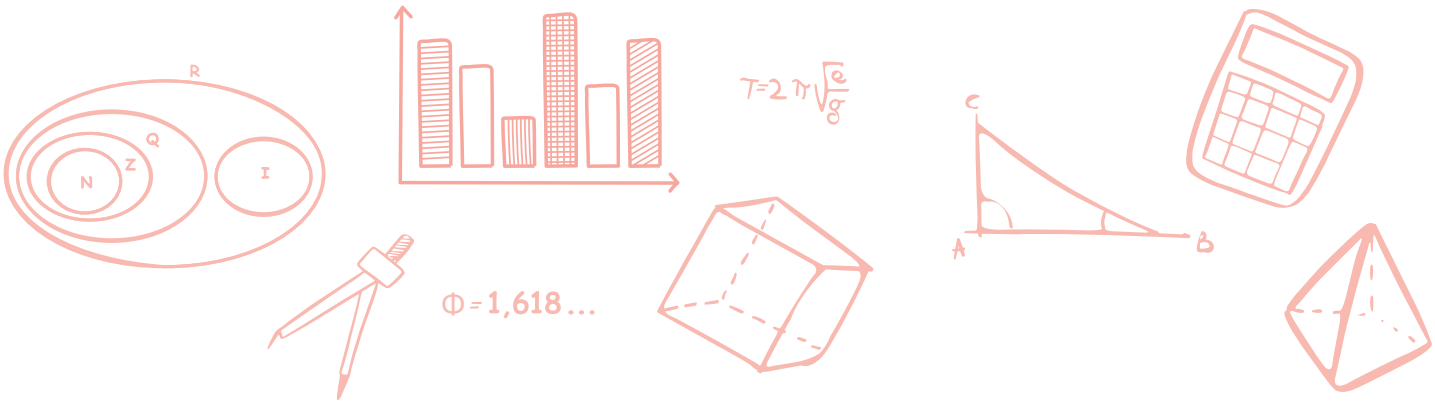


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

12 PRODUCCIÓN Y CONSUMO RESPONSABLES

Este objetivo busca transformar nuestros hábitos de producción y consumo para reducir el impacto ambiental, aprovechar mejor los recursos y promover estilos de vida más sostenibles. Se conecta directamente con:

- La planificación eficiente en la producción y distribución de alimentos y bienes.
- La reducción del desperdicio de alimentos, agua, energía y materiales.
- La implementación de prácticas agrícolas, industriales y logísticas sostenibles.





Fuente: Pexels.com

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque de orientación al bien común
  - Equidad y justicia
  - Responsabilidad
- Enfoque de derechos
  - Conciencia de derechos
  - Libertad y responsabilidad

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Sistema Internacional de Unidades
- Conversión de unidades de masa
- Conversión de unidades de temperatura

Magnitudes proporcionales
- Magnitudes directamente proporcionales
- Magnitudes inversamente proporcionales

Función lineal y lineal afín
- Función lineal
- Función lineal afín
- Función lineal y lineal afín con pendiente negativa

Medidas estadísticas
- Medidas de tendencia central: media aritmética para datos agrupados
- Medidas de tendencia central: mediana para datos agrupados
- Medidas de tendencia central: moda para datos agrupados

Investigamos



Explora cada situación, asume un rol, descubre ideas matemáticas con apoyo del anexo y resuelve.

SITUACIÓN
Pesando el éxito. Optimización de un servicio de carga

Imagina que eres asesor logístico en una empresa de transporte de carga. Tu tarea consiste en mejorar el servicio mediante el diseño de un tarifario que refleje de manera justa y eficiente los costos operativos. Para ello, deberás considerar la distancia de cada recorrido y las características del camión utilizado (modelo y peso). Además, este tarifario debe cumplir con las regulaciones establecidas para el tránsito en carreteras y puentes, para evitar sanciones o riesgos en la operación.



Fuente: Shuterstock (2023).

¿Cómo puedes diseñar un tarifario de transporte de carga que contemple tres destinos distintos: el modelo del camión, los costos de operación y un margen razonable de utilidad para la empresa?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Selecciona** un modelo de camión para tu empresa y calcula, en kilogramos, su peso neto, carga útil y peso bruto respetando las normativas de la Superintendencia de Transporte Terrestre de Personas, Carga y Mercancías (Sutran). Recuerda convertir las unidades de masa cuando sea necesario.
- **Planea** una propuesta de tarifario para el modelo de camión seleccionado. Para ello, considera los costos fijos, los costos variables, la distancia recorrida a tres destinos (ida y vuelta) y el porcentaje de ganancia que definirá la empresa.
- **Representa** gráficamente el comportamiento de la carga útil mensual para los tres destinos, según el modelo de camión. Para ello, agrupa los datos en intervalos, utiliza gráficos estadísticos y medidas de tendencia central. Luego, interpreta los resultados para identificar tendencias y patrones en la distribución de las cargas.
- **Calcula** la utilidad mensual que corresponde a cada socio de la empresa. Para ello, considera el modelo de camión, el número de camiones, el número de salidas, el tarifario y el destino de la carga. Simula que cada socio aporta una fracción del capital para cubrir los costos y considera el reparto proporcional para su distribución justa.
- **Analiza** cómo varían los ingresos mensuales por destino utilizando funciones lineales. Considera el tarifario y la cantidad de viajes posibles al mes con el camión seleccionado.

SITUACIÓN
Cosechando el futuro. Predice y optimiza la producción agrícola

La cooperativa agrícola de una comunidad ha notado que las variaciones climáticas afectan la producción de diversos cultivos. Como consultor agrícola, tu reto será desarrollar un modelo matemático que permita predecir la cantidad de cosecha esperada y, al mismo tiempo, optimizar su almacenamiento y comercialización tomando en cuenta datos históricos y actuales sobre el clima y los recursos disponibles.

infobae

Peligro de sobreproducción de papa blanca en Perú: Midagri insta a frenar nuevas siembras

El Ministerio de Desarrollo Agrario alerta sobre el riesgo de excedentes en el mercado agrícola debido al incremento en la siembra reciente y las lluvias sostenidas



Fuente: Infobae (2025).

¿Cómo puedes construir un modelo de predicción agrícola que optimice la producción, el almacenamiento y el transporte de un cultivo de tu comunidad considerando las variaciones climáticas y las necesidades de distribución?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Selecciona** un cultivo de tu región a partir del análisis de la tabla de producción de cultivos en el Perú considerando su variabilidad mensual.
- **Identifica** los insumos necesarios para la producción del cultivo seleccionado (como semillas, fertilizantes, agua, mano de obra, maquinaria, etc.) considerando la conversión de unidades y la proporcionalidad.
- **Estima** la cosecha del cultivo agrícola a partir de las hectáreas sembradas mediante una función lineal con el fin de tomar mejores decisiones para optimizar los recursos de almacenamiento y transporte.
- **Analiza** una lista de producción agrícola por regiones y, a partir de ello, representa los datos mediante la tabla de datos agrupados y gráficos estadísticos (barras, histogramas), y calcula medidas de tendencia central para resumir la producción a nivel nacional; identifica tendencias históricas con el uso de gráficos de línea.
- **Simula** que la cooperativa tiene tres socios y que cada uno aporta una fracción del capital (por ejemplo, $\frac{1}{6}C$, $\frac{2}{6}C$ y $\frac{3}{6}C$) para cubrir los costos. Considera el reparto proporcional para una distribución equitativa de la ganancia.

Anexo A: Pesando el éxito. Optimización de un servicio de carga

1. Información sobre dimensiones y carga máxima permitida

Según el Reglamento Nacional de Vehículos del Ministerio de Transporte y Comunicaciones, los camiones de carga deben respetar ciertos límites de dimensiones y pesos máximos permitidos.

a. Dimensiones y carga máxima permitida



Fuente: Gob.pe (2024).

b. Dimensiones y carga permitida de algunos modelos de camión categoría N

Modelo	Largo máx. (m)	Ancho máx. (m)	Alto máx. (m)	Peso neto (t)	Carga útil (t)	Peso bruto máx. (t)
Turbo 	4,80	2,30	2,30	4	4,5	8,5
Sencillo 	12,30	2,60	4,10	9	9	18
Patineta 	20,50	2,60	4,10	7	10	17
Mula de dos ejes 	20,50	2,60	4,10	12	20	32
Mula de tres ejes 	20,50	2,60	4,10	13	22	35

Nota: m = metros, t = toneladas. El peso neto y la carga útil pueden variar según el fabricante.

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Información sobre costos fijos, costos variables y distancias para elaborar el tarifario

a. Costos fijos mensuales (CF) por modelo de camión

Modelo	Pago del personal (S/)	Seguros (S/)	Amortización de vehículos (S/)	Mantenimiento y reparaciones (S/)	Alquiler de vehículos (S/)	Gastos administrativos (S/)
Turbo	3000	1500	2000	1200	1000	800
Sencillo	3500	1700	2200	1300	1100	900
Patineta	4000	2000	2500	1500	1200	1000
Mula de dos ejes	4500	2200	2800	1700	1300	1100
Mula de tres ejes	5000	2500	3000	1800	1400	1200

b. Costos variables (CV) por modelo de camión

Modelo	Combustible (S/ por km)	Mantenimiento y reparaciones (S/ por km)
Turbo	0,70	0,50
Sencillo	0,90	0,70
Patineta	1,20	0,90
Mula de dos ejes	1,30	1,10
Mula de tres ejes	1,40	1,30

c. Distancias (D) de Lima a diversas capitales regionales del país

Ruta	Distancia (km)
Lima - Arequipa	1000
Lima - Cusco	1080
Lima - Trujillo	560
Lima - Piura	980
Lima - Chiclayo	765
Lima - Ica	295
Lima - Puno	1285
Lima - Tacna	1215
Lima - Huancayo	305
Lima - Ayacucho	570
Lima - Iquitos	1735
Lima - San Martín	1035

Fuente: MEJORESRUTAS (s. f.).

Nota: Las distancias son aproximadas.

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Información sobre la carga útil mensual para los tres destinos, según el modelo del camión

a. Lima - Trujillo

Tipo de Camión	Carga útil (kg)																							
Turbo	4300	4600	4450	4550	4200	4700	4350	4400	4650	4500	4350	4480	4250	4380	4400	4500	4270	4300	4220	4540	4610	4520	4340	4280	4390
Sencillo	8800	9100	8950	9050	8700	9200	8850	8900	9150	9000	8920	8950	8810	8990	9060	8820	9010	8740	8740	8920	9120	8830			
Patineta	9800	10 100	9950	10 050	9700	10 200	9850	9900	10150	10 000	9970	9840	9990	9870	9780	10150	10180	9910	10 040	10 060	9830	10 060	9760	9770	
Mula de dos ejes	19 500	20 200	19 850	20 150	19 200	20 300	19 750	19 900	20 250	20 000	20 080	19 940	20 150	19 780	19 860	19 860	19 920	20 130	20 160	20 060	19 910	20 020	19 710	19 950	19 780
Mula de tres ejes	19 700	20 300	19 950	20 250	19 500	20 400	19 850	20 000	20 350	20 000	21 830	21 930	22 080	21 720	22 060	22 170	22 040	21 850	21 700	21 920	21 750	21 740	22 100		

b. Lima - Huancayo

Tipo de Camión	Carga útil (kg)																							
Turbo	4400	4380	4620	4360	4610	4570	4470	4470	4380	4290	4240	4500	4250	4320	4520	4240	4600	4270	4530	4660	4270	4680	4590	4240	
Sencillo	8920	8970	8930	8930	8950	9100	8830	8720	9150	9150	8930	8930	9070	8710	9070	9040	9050	8830	8890	8960	8810				
Patineta	10 050	10 150	9900	10 150	9840	9810	9790	9860	9810	10 070	9760	9860	9870	9960	9980	10 070	9730	10 110	10 110	9820	9960	10 180	9960	10 070	
Mula de dos ejes	19 790	19 970	19 970	20 120	20 160	19 960	19 710	19 930	19 800	19 840	20 080	20 080	19 900	19 830	19 830	20 010	19 760	19 950	19 860						
Mula de tres ejes	21 830	21 790	21 930	21 720	22 010	21 880	21 920	22 090	21 720	21 980	22 040	22 070	21 890	21 900	22 180	22 150	21 780	22 110	21 790	21 830	22 000	21 850	21 950	22 150	

c. Lima - Arequipa

Tipo de Camión	Carga útil (kg)																								
Turbo		4380	4620	4360	4610	4570	4470	4470	4380	4290	4240	4500	4250	4320	4520	4240	4600	4270	4530	4660	4270	4680	4590	4240	4500
Sencillo	9190	9100	8910	8730	9130	8900	8880	9080	9150	9050	8700	9060	9190	9170	8820	8800	8910	8720	8990	8710	8720	8970	9030		
Patineta	9880	10 060	1 0040	9970	9810	9960	9780	9950	10 160	9710	10 140	10 150	10 040	9770	9970	10 170	10 030	10 040	9790	9880	10 100	10 190	9800	10 150	9900
Mula de dos ejes	20 060	20 110	19 930	20 100	20 180	19 810	20 090	19 930	19 950	19 830	20 070	20 140	19 820	19 780	19 760	19 870	20 130	19 790	19 760	19 710	19 920	19 980			
Mula de tres ejes	21 910	21 860	21 740	22 000	22 050	21 810	22 020	22 130	21 790	22 170	22 050	21 970	21 910	21 840	21 900	21 800	21 950	21 760	22 180	21 820					

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Cosechando el futuro. Predice y optimiza la producción agrícola

1. Tablas informativas sobre los cultivos, los insumos, el rendimiento y los precios

a. Perú: producción de principales cultivos por mes. Enero 2024 - 2025 (tonelada)

Cultivos	Año	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic	Ene-Dic
Trigo	2024P 2025P	0 0	32	110	2244	17 233	48 269	67 775	52 421	7868	1974	546	3	198 474 0
Maíz amarillo duro	2024P 2025P	111 907 94 416	116 535	90 034	82 787	103 468	141 186	190 951	108 917	113 193	71 239	102 089	90 256	1 322 561 94 416
Maíz amiláceo	2024P 2025P	457 2162	458	1139	18 315	129 875	141 320	55 746	16 631	2778	226	129	107	367 183 2162
Arroz cáscara	2024P 2025P	198 729 173 871	169 256	348 269	451 526	532 936	618 346	285 531	163 450	142 422	151 031	178 580	277 702	3 517 778 173 871
Cebada grano	2024P 2025P	17 30	31	49	16 570	38 901	64 269	77 748	34 006	8375	172	12	0	240 150 30
Quinua	2024P 2025P	1953 1208	1136	2121	46 218	32 226	15 751	6051	2566	2499	1 53	1441	650	114 366 1208
Espárrago	2024P 2025P	21 167 21 806	25 518	26 675	23 182	23 123	21 082	24 353	30 478	36 947	36 572	32 628	30 432	332 159 21 806
Alcachofa	2024P 2025P	5101 3940	5120	3994	3359	3716	4556	6893	20 785	22 361	16 320	19 845	10 866	122 917 3940
Pimiento	2024P 2025P	2958 1864	3684	1872	4357	1698	2535	2827	2176	5444	8851	12 145	3260	51 807 1864
Tomate	2024P 2025P	20 355 22 883	20 398	14 597	14 794	14 488	17 239	13 639	16 028	13 446	19 603	22 011	71 909	258 508 22 883
Zapallo	2024P 2025P	22 883 23 938	20 480	23 883	23 730	17 911	20 468	21 284	23 522	23 851	11 299	12 062	16 926	239 353 17 159
Arveja grano verde	2024P 2025P	17 159 11 820	17 833	22 367	20 693	14 624	11 916	13 828	12 040	11 506	7 861	5 376	6906	156 769 11 841
Zanahoria	2024P 2025P	15 717 12 675	14 224	17 006	17 588	18 623	15 761	13 328	20 303	21 555	22 747	21 170	16 365	214 388 12 675
Papa	2024P 2025P	266 834 290 914	362 128	651 040	1504 823	1509 782	729 822	272 928	195 538	180 997	216 081	300 456	329 836	6520 264 290 914
Yuca	2024P 2025P	114 212 108 771	114 318	106 875	106 589	119 508	119 067	120 712	112 459	118 905	122 918	134 314	134 286	1 424 162 108 771
Camote	2024P 2025P	26 407 24 223	21 551	20 607	25 910	20 188	21 884	26 658	25 552	24 611	27 343	23 349	28 008	292 066 24 223
Oca	2024P 2025P	30 10	346	1883	39 311	56 341	29 221	8412	1772	100	27	6	0	137 450 10
Olluco	2024P 2025P	3415 3380	4750	10 716	35 170	78 804	51 613	14 624	2194	486	281	306	1106	203 465 3 380

Fuente: Midagri (2025).

Nota: P = preliminar

Información propuesta y adaptada para fines educativos

b. Insumos para la producción de cultivos

Cultivo	Semillas	Fertilizantes (kg/ha)	Agua (m^3/ha)	Mano de obra (jornales/ha)	Maquinaria (horas/ha)	Otros insumos
Trigo	150 - 200 kg/ha	80 - 120 N, 40 - 60 P, 40 - 60 K	4000 - 6000	20 - 30	10 - 15	Herbicidas, fungicidas
Maíz amarillo duro	20 - 25 kg/ha	150 - 200 N, 80 - 100 P, 60 - 80 K	5000 - 7000	30 - 40	15 - 20	Insecticidas, herbicidas
Maíz amiláceo	25 - 30 kg/ha	60 - 80 N, 40 - 60 P, 40 - 60 K + guano	4000 - 6000	40 - 50	10 - 15	Desinfectante de semillas
Arroz cáscara	150 - 180 kg/ha	120 - 150 N, 60 - 80 P, 60 - 80 K	12000 - 15000	50 - 60	20 - 25	Insecticidas, fungicidas, herbicidas
Cebada grano	120 - 150 kg/ha	60 - 80 N, 40 - 60 P, 40 - 60 K	3000 - 4000	20 - 30	10 - 12	Compost, estiércol
Quinua	8 - 10 kg/ha	40 - 60 N, 30 - 40 P, 30 - 40 K	3000 - 4000	40 - 50	5 - 8	Control de plagas, fungicidas
Espárrago	20 000 plántulas/ha	Abono orgánico, compost	6000 - 8000	100 - 120	15 - 20	Bioinsumos, abono verde
Alcachofa	5000 plántulas/ha	80 - 100 N, 60 - 80 P, 60 - 80 K	5000 - 6000	80 - 100	10 - 12	Insecticidas, fungicidas
Pimiento	0,5 - 1 kg kg/ha	80 - 100 N, 60 - 80 P, 60 - 80 K	4000 - 5000	60 - 80	8 - 10	Insecticidas, fungicidas
Tomate	0,3 - 0,5 kg	100 - 120 N, 80 - 100 P, 80 - 100 K	5000 - 6000	80 - 100	10 - 12	Insecticidas, fungicidas, herbicidas
Zapallo	2 - 3 kg	60 - 80 N, 40 - 60 P, 40 - 60 K	3000 - 4000	40 - 50	5 - 8	Control de plagas
Arveja grano verde	180 - 200	40 - 60 N, 30 - 40 P, 30 - 40 K	2000 - 3000	30 - 40	5 - 8	Inoculantes
Zanahoria	4 - 6	80 - 100 N, 60 - 80 P, 60 - 80 K	4000 - 5000	50 - 60	8 - 10	Control de malezas
Papa	2000 - 2500	120 - 150 N, 80 - 100 P, 80 - 100 K + guano	4000 - 5000	60 - 80	15 - 20	Insecticidas, fungicidas, herbicidas
Yuca	1500 - 2000 estacas	40 - 60 N, 30 - 40 P, 30 - 40 K	2000 - 3000	30 - 40	5 - 8	Control de plagas
Camote	25 000 - 30 000 esquejes	40 - 60 N, 30 - 40 P, 30 - 40 K	2000 - 3000	30 - 40	5 - 8	Control de plagas
Oca/olluco	1500 - 2000 kg	40 - 60 N, 30 - 40 P, 30 - 40 K	2000 - 3000	40 - 50	5 - 8	Control de plagas

Nota: N = nitrógeno, P = fósforo, K = potasio

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Modelo lineal para estimar la cosecha

Para estimar la cosecha del cultivo agrícola, se debe tener en cuenta el rendimiento promedio por hectárea y el número de hectáreas sembradas.

- Rendimiento promedio por hectárea: es la cantidad que normalmente se puede cosechar en una hectárea. Por ejemplo, si se siembra trigo y normalmente se cosechan 3 toneladas por hectárea, ese es el rendimiento promedio.
- Hectáreas sembradas: se refiere al tamaño del terreno. Si se tienen 10 hectáreas sembradas, ese es el valor a usar.

Luego, para estimar la producción, usamos la siguiente expresión:

$$P(x) = rx$$

Considera lo siguiente:

- $P(x)$ = producción de x hectáreas
- r = rendimiento promedio por hectárea
- x = número de hectáreas sembradas

3. Datos de producción de maíz amarillo duro por región (toneladas)

Región	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Sep	Oct	Nov	Dic
Costa norte	150	180	200	220	250	230	200	180	160	170	190	170
Costa sur	80	90	100	110	120	110	100	90	80	85	95	85
Sierra	50	60	70	80	90	80	70	60	50	55	65	55
Selva	120	130	140	150	160	150	140	130	120	125	135	125

Nota. Los datos mostrados en la tabla son hipotéticos.

4. Medidas de tendencia central

- Producción total anual por región: suma la producción mensual de cada región para obtener la producción total anual.
- Media mensual por región: calcula el promedio de producción mensual para cada región.
- Mediana mensual por región: identifica el valor central de la producción mensual para cada región.
- Producción total anual a nivel nacional: suma las producciones anuales de todas las regiones para obtener la producción total nacional.
- Media mensual a nivel nacional: calcula el promedio de producción mensual a nivel nacional.

Información propuesta y adaptada para fines educativos

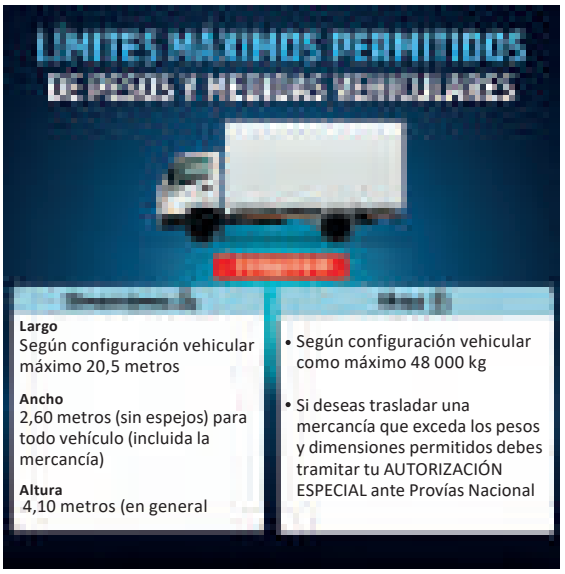
Exploramos



En las siguientes actividades, practica lo que has aprendido para construir nuevos aprendizajes.

1. Transporte de carga sin errores

A continuación, se presenta información sobre las dimensiones y la carga máxima permitida para los camiones de categoría N.



Fuente: Gob.pe (2024).

a. Si la capacidad de carga de un camión es el 60 % de su masa máximo permitido, ¿cuántas cajas de 45 kg, como máximo, puede transportar por viaje?

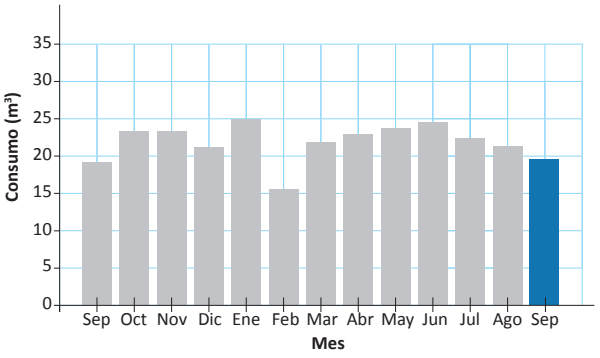
b. Un trabajador afirma: "Al expresar una masa en toneladas (t) en lugar de kilogramos, el resultado siempre es una expresión decimal con tres cifras decimales. Por ejemplo: 350 kg = 0,350 t porque 1 kg equivale a 0,001 t". ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.

2. Cálculo del consumo de agua

Una familia ha experimentado una disminución en su consumo de agua en m^3 durante los últimos meses, como muestra el siguiente gráfico:



Evolución de su consumo en el agua



a. ¿En qué mes se registró el menor consumo y cuántos litros, aproximadamente, se ahorraron respecto al mes anterior? (1 m^3 = 1000 L)

b. ¿Cuál fue el consumo estimado promedio de agua durante los trece meses mostrados?

c. Si un recibo indica un consumo de 20,253 m^3 y otro muestra 20,5 m^3, ¿cuál representa un consumo mayor? Justifica tu respuesta.

3. ¿Qué opción de compra es más conveniente?

Mariana fue al mercado a comprar azúcar rubia, y encontró las siguientes presentaciones que se muestran en la imagen:

a. Si desea adquirir 3 kg, ¿cuál crees que es la mejor opción y por qué?

b. Si Mariana planea comprar 18 kg de azúcar para reorganizarlos en paquetes de 6 kg, ¿qué estrategia de compra le recomendarías para minimizar su gasto?



4. Compras para la construcción

Una empresa inmobiliaria prevé la compra de cinco toneladas de cemento para la construcción de un edificio. Para ello, se cuenta con la siguiente información por bolsa.

Para cubrir el pedido, debe calcular cuántas bolsas necesita.



a. Completa la tabla y redondea al entero más cercano en caso de ser necesario.

Toneladas	1				5
Kilogramos		2000		4000	
N.° de bolsas	24		71		

b. Si tuvieras que abastecer dos obras distintas con cemento, crea dos planes de compra y entrega con cantidades de bolsas distintas manteniendo el total necesario. Explica cómo optimizaste el transporte o el almacenamiento en cada caso.

5. Productos de exportación

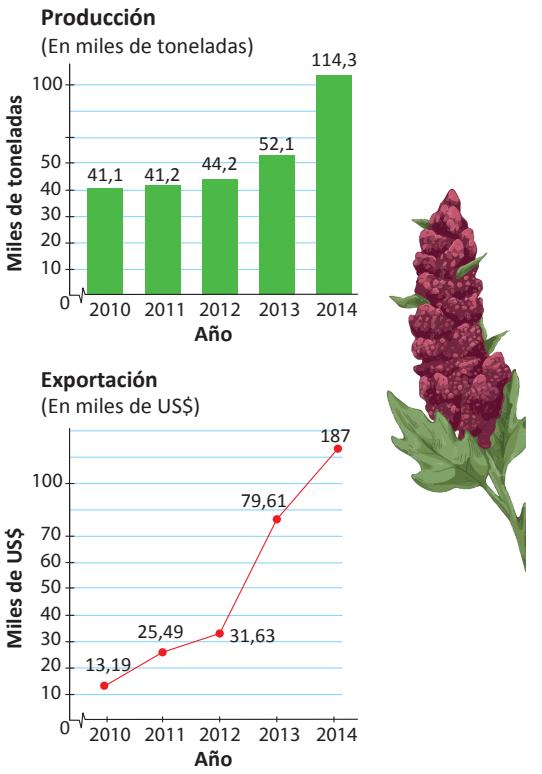
La quinua es un cultivo representativo de la agricultura peruana. Abastece tanto a los mercados nacionales como a los internacionales.

a. ¿Es correcto afirmar que la producción total de quinua entre 2010 y 2012 superó en 12 200 toneladas a la producción del año 2014? Justifica tu respuesta.

b. ¿Aproximadamente cuántas veces mayor fue la exportación del 2013 en comparación con la del 2011?

c. Entre 2013 y 2014, ¿el crecimiento del valor de exportación fue mayor que el de la producción? ¿Esto indica que el precio por tonelada muestra una variación porcentual? Justifica con la información de las gráficas.

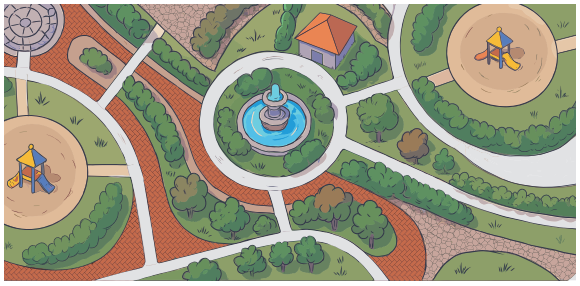
Producción y exportación de quinua



Fuente: Adaptado de Minagri (2016).

1. Dimensiones de un parque

Una municipalidad planea construir un parque rectangular. Se sabe que el largo del terreno es 18 m mayor que el ancho y se proyecta que el perímetro total será de 96 m.

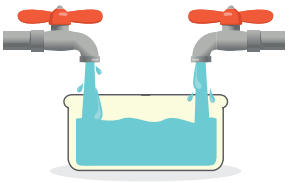


a. Sea x el ancho, escribe la expresión algebraica que permite determinar el perímetro del parque en razón al ancho. ¿Cuál es su largo y ancho?

b. Se dice que: "Si el perímetro del terreno se duplica y el largo es 18 metros mayor que el ancho, entonces el largo y ancho también se duplicarían". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Los caños

Un caño llena un depósito en 3 horas y otro lo hace en 6 horas (caudal constante).

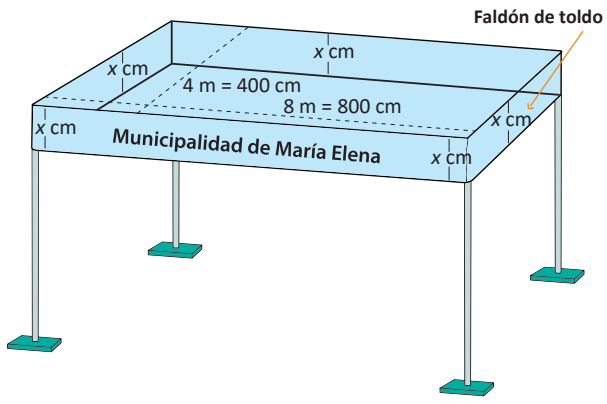


a. Si ambos caños se abren a la vez, ¿cuántas horas deben pasar para que el depósito esté completamente lleno?

b. Para calcular el tiempo que tardan ambos caños en llenar el depósito juntos, se plantea la ecuación lineal $\frac{1}{3}x + \frac{1}{6}x = 1$, donde x representa las horas de llenado. Un estudiante afirma: "Si multiplicamos toda la ecuación por el mínimo común múltiplo de los denominadores, se eliminan las fracciones y es más fácil resolverla". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

3. Medidas de un toldo

La Municipalidad de María Elena, como parte de su campaña "Ayudar al otro también es una forma de cuidarse uno mismo", encargó toldos para las ferias en distintas plazas, como se muestra en la imagen.



Faldón: parte vertical de la lona que cuelga del techo del toldo

a. ¿Qué expresiones algebraicas permiten relacionar el área total del toldo con la altura x del faldón del toldo?

b. Si se sabe que se utilizaron 39,2 m^2 de lona en total para armar el toldo, ¿cómo calcularías la altura del faldón (el faldón recorre todo el perímetro del techo del toldo)? Usa dos o más representaciones para mostrar tu razonamiento y explica cómo determinaste ese valor.

c. Crea tres diseños diferentes de toldos manteniendo la misma área total de lona (39,2 m^2), pero variando la altura del faldón y el largo/ancho del techo. Representa cada diseño con un esquema y las expresiones algebraicas usadas para el cálculo.

4. Análisis de gráficas

Observa las relaciones entre expresiones correspondientes a la función lineal y la función lineal afín.

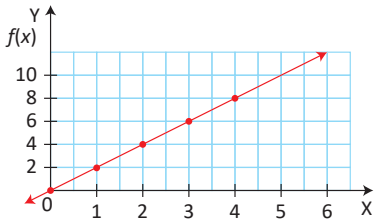


Figura 1

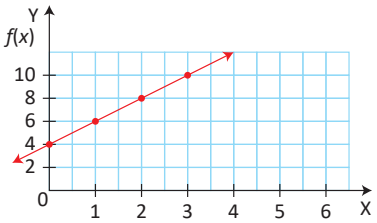


Figura 2

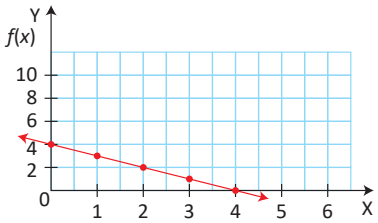


Figura 3

$f(x) = 2x + 3$ $g(x) = 2x$ $h(x) = -x + 4$ $r(x) = x + 4$

a. Verifica la relación entre las gráficas y la regla de correspondencia de las funciones. Si hubiera alguna que no corresponda, corrígela y explica por qué. Describe tu procedimiento.

b. Se afirma: "Las funciones lineales y lineales afines se caracterizan por una pendiente siempre positiva". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

5. Nutrición con números

A continuación, se muestran dos tablas de valor nutricional de porciones de 100 gramos de pechuga de pollo y de pescado:

a. Un plato preparado a base de pollo y pescado contiene 100 g más de pescado que de pollo. ¿Cómo expresarías algebraicamente el total de proteínas de este plato considerando la cantidad de pollo utilizado?

b. En una causa (comida típica peruana) se usa el triple de pollo que de pescado. ¿Cómo representarías algebraicamente la cantidad total de sodio en función de los gramos de pollo empleados?

Información nutricional

Pechuga de pollo

Porción	**100 g**
	Por porción
Energía	**816 kj**
	195 kcal
Proteína	**30 g**
Carbohidratos	**0 g**
Fibra	0 g
Azúcar	0 g
Grasa	**7,72 g**
Grasa saturada	2,172 g
Grasa poliinsaturada	1,646 g
Grasa monoinsaturada	3,005 g
Colesterol	83 mg
Sodio	390 mg
Potasio	243 mg

Información nutricional

Pescado

Porción	**100 g**
	Por porción
Energía	**351 kj**
	84 kcal
Proteína	**18 g**
Carbohidratos	**0 g**
Fibra	0 g
Azúcar	0 g
Grasa	**0,92 g**
Grasa saturada	0,195 g
Grasa poliinsaturada	0,364 g
Grasa monoinsaturada	0,16 g
Colesterol	58 mg
Sodio	80 mg
Potasio	351 mg

Fuente: Adaptado de Fatsecret (2025).

1. Análisis y modelación de datos de la encuesta

Se realizó una encuesta sobre las actividades favoritas de los estudiantes del tercer grado de secundaria.



Actividad favorita	Número de estudiantes
Teatro	𝍸 ||||
Baile	𝍸 𝍸 ||
Robótica	𝍸 𝍸 ||
Programación	𝍸 𝍸 𝍸
Ciberseguridad	𝍸 𝍸 ||

Nota: cada palote representa a un estudiante.

a. Organiza los datos en una tabla de frecuencias absolutas y relativas.

b. Se afirma lo siguiente: "El conjunto de datos es multimodal porque hay tres actividades con la misma frecuencia absoluta". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Registro de temperaturas

En las siguientes tablas se muestran las temperaturas máximas registradas durante el mes de febrero en una ciudad del país.

Día	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Temperatura (°C)	31	30	30	30	29	29	29	28	28	29	32	30	29	30

Día	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Temperatura (°C)	31	30	30	29	31	28	27	30	31	30	31	32	32	30

a. Organiza la información de las temperaturas en una tabla de frecuencias.

b. ¿Qué medida de tendencia central es la más conveniente para representar el conjunto de temperaturas?, ¿por qué?, ¿y cómo la interpretas?

c. Se afirma lo siguiente: "Durante la primera quincena, las temperaturas máximas fueron más regulares que en la segunda". ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta.

3. Distribución de puntajes en el torneo

En el torneo escolar de ajedrez se registraron los puntajes de todos los jugadores, como se muestra en la tabla.

Jugador	Puntaje
Mario	7,5
Guillermo	7,5
Víctor	7,5
Adrián	7
Cristóbal	6,5
Leonardo	6,5
Franco	6
Eduardo	6
Aaron	6
Gabriel	6
Carlos	6
Héctor	5,5
Saúl	5
Edgardo	5
Sebastián	5

a. ¿Qué medida de tendencia central usarías para explicar cómo fue, en general, el rendimiento de los participantes en el torneo?

b. ¿Qué tipo de representación visual puedes usar para representar estos puntajes? Elabora tu representación y explica el porqué de tu elección.

4. Encuesta familiar

Un grupo de jóvenes realizó una encuesta sobre cuántos hijos tiene cada familia. Los resultados se organizaron de la siguiente manera:

Número de hijos	0	1	2	3	4	5
Cantidad de familias	6	10	13	9	8	4



a. Completa la siguiente tabla con los datos de la encuesta:

Número de hijos	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia acumulada (F_i)
0	6	
1		16
2		
3		
4	8	
5		
Total		

b. ¿Cómo podrías calcular la media y la mediana del número de hijos?

c. ¿Qué observas al comparar la media con la mediana en este conjunto de datos? ¿Qué conclusiones puedes obtener sobre la distribución de familias según la cantidad de hijos?

5. Evaluación de acceso a la electricidad

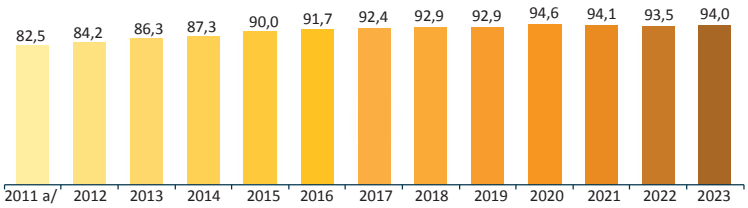
El acceso de los hogares a la energía eléctrica a través de la red pública es esencial para el desarrollo y el bienestar de la población.

a. Durante el periodo del 2011 al 2021, ¿el acceso al servicio de energía eléctrica mediante la red pública se reduce, se mantiene o aumenta?

b. ¿En cuántos puntos porcentuales es menor el acceso a la electricidad en la zona rural en el 2023 respecto al valor nacional del 2021?

Perú: Hogares con acceso al servicio de energía eléctrica mediante red pública, 2011 - 2023

(Porcentaje)

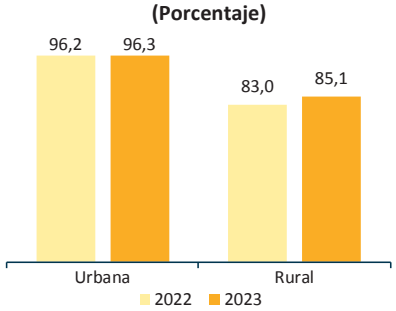


a/ Los datos corresponden al periodo abril – diciembre.

Fuente: Adaptado del INEI (2024).

Perú: Hogares con acceso al servicio de energía eléctrica mediante red pública, según área de residencia, 2022 - 2023

(Porcentaje)



Fuente: Adaptado del INEI (2024).

Desarrollamos



Analiza situaciones, muestra resoluciones, comunica ideas matemáticas y profundiza en tus comprensiones.

Tu propósito de aprendizaje

Representa y justifica las relaciones de proporcionalidad y equivalencia entre fracciones mediante procedimientos de simplificación y amplificación. Emplea estas relaciones para establecer repartos proporcionales entre el total y las partes, y comunica la fracción irreductible que corresponde a cada integrante.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

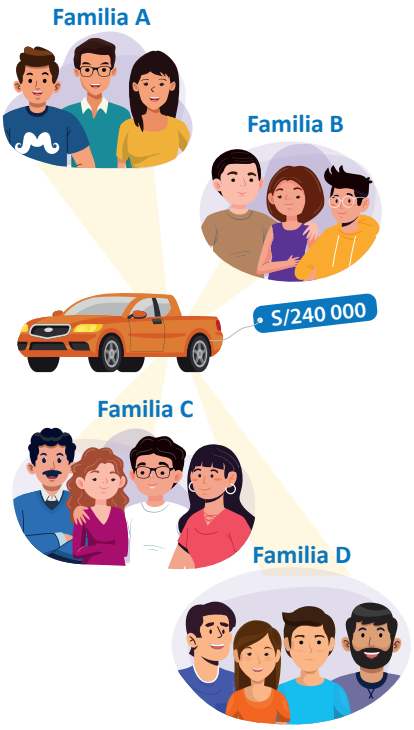


Practica valores

- Gestiona el trabajo en equipo planificando tiempos y acuerdos, priorizando responsabilidades compartidas, dialogando con respeto y valorando estrategias y procedimientos matemáticos diversos.

Pensamos y actuamos

Cuatro familias compraron una camioneta valorizada en S/240 000. Los aportes se repartieron proporcionalmente entre los miembros de la familia. ¿Qué fracción del valor total de la camioneta representa el aporte de cada miembro?



1. **Para reconocer el aporte en expresión fraccionaria que le corresponde a cada miembro, emplea un rectángulo para representar S/240 000. Luego, marca en el rectángulo la parte proporcional al aporte de cada integrante.**

Familia A	
Ana	S/80 000
Miguel	S/80 000
Luis	S/80 000

Familia B	
Camila	S/120 000
Hugo	S/60 000
Daniela	S/60 000

Familia C	
Irene	S/120 000
Diego	S/60 000
Rosa	S/30 000
Pablo	S/30 000

Familia D	
Blanca	S/60 000
Fernando	S/90 000
Néstor	S/50 000
César	S/40 000

2. **Compara tus respuestas con las de tus compañeros. Aunque algunas divisiones del rectángulo sean distintas, estas según cada familia deben representar la misma fracción del total. Comprueba que son equivalentes.**

3. **Observa lo realizado para la familia C en la tabla.**

Integrante	Aporte (S/)	Fracción del total	Fracción simplificada
Irene	120 000	$\frac{120\,000}{240\,000}$	$\frac{1}{2}$
Diego	60 000	$\frac{60\,000}{240\,000}$	$\frac{1}{4}$
Rosa	30 000	$\frac{30\,000}{240\,000}$	$\frac{1}{8}$
Pablo	30 000	$\frac{30\,000}{240\,000}$	$\frac{1}{8}$

Realiza el mismo procedimiento para las familias restantes.

4. **Pasado un tiempo, cada camioneta se devaluó, y ahora el valor de una camioneta es de S/220 800. Si cada familia vende su camioneta, ¿cuánto recibe cada integrante como recuperación de su inversión?**

Integrante	Aporte (S/)	Fracción del total	Fracción simplificada
Ana			
Miguel			
Luis			

Emplea la tabla y el procedimiento para cada familia.

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Un reparto es proporcional cuando cada persona recibe una cantidad que mantiene la misma relación con respecto al total, de acuerdo con los valores establecidos en la proporción.	Un reparto es proporcional siempre que al menos una de las partes sea la mitad del total.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de equivalencia entre las partes y el total en situaciones de reparto proporcional.
- Expresa la proporción del reparto mediante fracciones y represéntala de diversas maneras (gráfica y simbólica).
- Emplea procedimientos de simplificación para determinar la fracción del total que corresponde a cada parte y obten la fracción irreductible que mantiene la proporcionalidad.
- Justifica la equivalencia de fracciones y argumenta con ejemplos y contraejemplos por qué diferentes fracciones pueden representar la misma proporción.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Tres socios, José, Adrián y María, crearon una empresa con aportes de S/5000, S/8000 y S/10 000, respectivamente. Tras un tiempo, la empresa tiene S/46 000 de beneficios para repartir proporcionalmente a los aportes. ¿Qué cantidad corresponde a cada uno?**

2. **Una fuente cuenta con cuatro grifos de igual caudal (con un mismo flujo por hora) que dejan fluir un total de 120 m³ de agua. El primero estuvo abierto 2 horas; el segundo, 3 horas; el tercero, 4 horas; y el cuarto, 1 hora. ¿Cuántos metros cúbicos de agua dejó fluir cada grifo?**

3. **Tres agricultores alquilan un tractor por S/13 050 para labrar 2 ha, 3 ha y 4 ha de terreno, respectivamente. ¿Cuánto debe pagar cada uno proporcionalmente por las hectáreas trabajadas?**

Tu propósito de aprendizaje

Representa y argumenta a partir de datos agrupados en intervalos, y emplea procedimientos estadísticos para establecer relaciones, calcular la media y la mediana, y comunicar conclusiones pertinentes en una situación dada.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Durante los debates con ideas matemáticas, cede los turnos de palabra, reformulan las ideas de otros y construye acuerdos beneficiosos para el grupo.
- Cuida el tono en tus comentarios escritos, evita las ironías y expresaté con precisión para no generar confusión entre tus compañeros.

Pensamos y actuamos

Se realizó una encuesta a 25 estudiantes para registrar la cantidad de horas que dedican al uso del celular a la semana, y se obtuvieron los siguientes datos:

12; 15; 18; 20; 22; 24; 25; 26; 27; 28; 30; 31; 32; 33; 34; 35; 36; 38; 40; 41; 42; 44; 45; 8; 45



¿Cuántas horas en promedio usan el celular a la semana? ¿Cuántas horas, como máximo, utilizan el celular a la semana el 50 % de los estudiantes?

1. Completa la tabla de frecuencias.

Tiempo (h)	Marca de clase (x_i)	f_i	F_i	$x_i \cdot f_i$
[0; 10[	$\frac{0+10}{2} = 5$			
[10; 20[				
[20; 30[				
[30; 40[				
[40; 50]				
Total		$\sum f_i$		$\sum x_i \cdot f_i =$

2. Responde.

a. ¿Qué indica la columna de frecuencia absoluta (f_i)? ¿Cómo se obtiene la frecuencia absoluta acumulada (F_i)?

b. ¿Para qué se utilizan las marcas de clase (x_i) al estimar medidas (media, mediana, etc.) y construir polígonos de frecuencia?

3. Estima la media aritmética de las horas semanales que dedican los estudiantes al uso del celular usando la fórmula.

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i \cdot f_i}{\sum f_i}$$

4. Estima la mediana de las horas semanales que dedican los estudiantes al uso del celular. Para ello, identifica el intervalo de la mediana con $\frac{n}{2}$ y luego usa la fórmula.

$$Me = L_{inf} + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \cdot A$$

Donde

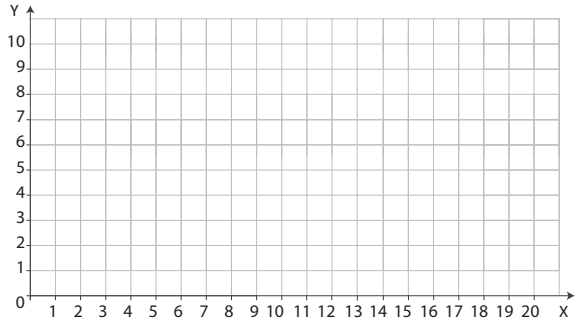
L_{inf} : límite inferior del intervalo mediano

F_{i-1} : frecuencia acumulada anterior

f_i : frecuencia acumulada de intervalos

A : amplitud

5. **Representa los datos usando un histograma, luego traza sobre el eje X dos líneas verticales y etiquétalas como $\bar{x}$ (media) y *Me* (mediana).**



6. **¿La media y la mediana coinciden en el histograma? Explica qué indica su posición relativa sobre la distribución (simétrica, asimétrica y presencia de valores externos).**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
La media puede estar influenciada por valores extremos, aunque los datos estén agrupados.	La mediana se calcula simplemente sumando todos los intervalos y dividiéndolos entre dos.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

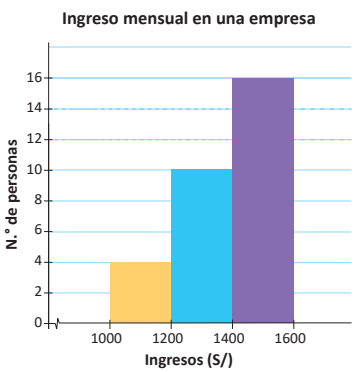
Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre los datos y las medidas de tendencia central para resolver una situación problemática.
- Representa los datos en tablas de distribución de frecuencias; exprésalos mediante histogramas y polígonos de frecuencia.
- Emplea procedimientos para obtener la media aritmética y la mediana en datos agrupados, e identifica valores a partir de estas medidas de tendencia central.
- Justifica la elección e interpretación de la media y la mediana como valores representativos del conjunto de datos, y argumenta conclusiones sobre el comportamiento del grupo de estudio.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Jorge ha recogido datos sobre los ingresos mensuales en una empresa y los representó en el histograma mostrado.**



   a. ¿Cuál es el ingreso promedio mensual en la empresa?

   b. ¿Cuánto puede ganar, como máximo, el 50 % de los empleados en un mes?

2. **La tabla muestra la cantidad de personas, según edad, que se encuentran afiliadas a una asociación del adulto mayor.**

Edad (años)	f_i
[60; 70[	18
[70; 80[	14
[80; 90[	6
[90; 100]	2
Total	40

   a. ¿Cuál es la edad promedio de las personas de la asociación?

   b. ¿Cuántos años puede tener, como máximo, el 50 % de las personas?

Formalizamos



Evalúa los ejemplos, dialoga, reflexiona y argumenta las respuestas para dar sentido a las ideas matemáticas en tus desafíos.

¿Sabías que...?

El Sistema Internacional de Unidades permite medir y comparar consumos de agua, energía y masa, planificar compras y reducir desperdicios. Favorece decisiones sostenibles, proyectos científicos y acuerdos ciudadanos con criterios claros y verificables.

Recuerda

El **Sistema Internacional de Unidades (SI)** es un sistema estandarizado de medidas que considera siete unidades básicas. Estas definen las magnitudes físicas fundamentales que se muestran en la tabla

Magnitud	Unidad de medida	Símbolo
Longitud	Metro	m
Masa	Kilogramo	kg
Tiempo	Segundo	s
Intensidad de corriente eléctrica	Amperio	A
Temperatura	Kelvin	K
Cantidad de sustancia	Mol	mol
Intensidad luminosa	Candela	cd

Practica valores

- Agradece el trabajo de sus compañeros y reconoce sus aportes en evaluaciones y decisiones grupales.
- Dialoga y acuerda con su equipo la elección de problemas de tu comunidad, y valora las matemáticas para mejorarla.

SISTEMA INTERNACIONAL DE UNIDADES

Conversión de unidades de masa

Situación: El pastel de cumpleaños

Marlene tiene un pastel de 1,2 kg, y desea repartirlo de forma equitativa entre sus 8 amigos. ¿Cuántos gramos debería tener cada porción del pastel?



Descomponemos: 1,2 kg = 1 kg + 0,2 kg

Buscamos la equivalencia: 1 × 1000 = 1000 g y 0,2 × 1000 = 200 g

Peso total de la torta: 1200 g

Dividimos entre las 8 personas: 1200 g ÷ 8 = 150 g

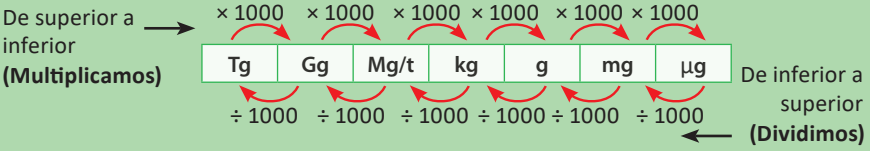
Cada compañero de Marlene recibiría 150 g de pastel.

El problema resuelto ilustra que la **unidad de masa** se usa para medir la cantidad de materia de un cuerpo o sustancia. Su unidad fundamental es el kilogramo (kg). La siguiente tabla muestra los múltiplos y submúltiplos del kilogramo:

	Unidades	Símbolos	Factores	Equivalencias
Múltiplos	Teragramo	Tg	10^9	1000 000 000 kg
	Gigagramo	Gg	10^6	1000 000 kg
	Megagramo	Mg	10^3	1000 kg
Unidad fundamental	**Kilogramo**	**kg**	**10^0**	**1 kg**
Submúltiplos	Gramo	g	10^{-3}	0,001 kg
	Miligramo	mg	10^{-6}	0,000001 kg
	Microgramo	µg	10^{-9}	0,000000001 kg

Nota: 1 t = 1000 kg

Para realizar las conversiones usamos el siguiente esquema:



Situación: Camiones de carga

Dos camiones transportan frutas al centro de una ciudad. Se sabe que el camión A transporta 15,3 toneladas de frutas y el camión B, 28,5 toneladas. Se afirma lo siguiente: "El camión B logra transportar 132 kg más que el camión A". ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.



Convertimos ambas cargas en kg.

- Camión A: 15,3 × 1000 = 15 300 kg
- Camión B: 28,5 × 1000 = 28 500 kg

Luego restamos: 28 500 kg − 15 300 kg = 13 200 kg

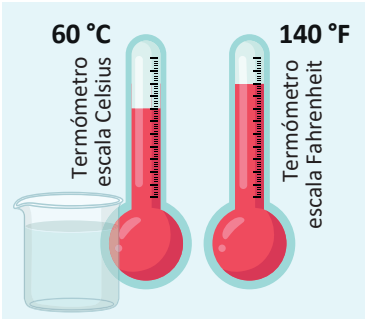
No estamos de acuerdo, porque la diferencia es 13 200 kg.

Conversión de unidades de temperatura

Situación: En el laboratorio

Hay dos tipos de termómetros, observa la imagen: uno mide en grados Celsius (°C) y otro en Fahrenheit (°F). Al medir un líquido, marca 60 °C y en el otro termómetro, 140 °F. ¿Por qué es importante convertir temperaturas entre °F y °C?

Porque ambas escalas usan referencias distintas, por ejemplo, 140 °F equivale a 60 °C. Saber convertir permite interpretar bien las mediciones.



Como se aprecia en el ejemplo previo, la **unidad de temperatura** es una magnitud física medible que se representa mediante números reales en una escala. Su unidad fundamental en el Sistema Internacional de Unidades es el kelvin (K). La siguiente tabla muestra las conversiones entre el kelvin y otras unidades de temperatura:

Unidad	Fórmula de conversión	Ejemplo
Celsius a Fahrenheit	$°F = (°C \times \frac{9}{5}) + 32$	25 °C = 77 °F
Fahrenheit a Celsius	$°C = (°F - 32) \times \frac{5}{9}$	77 °F = 25 °C
Celsius a Kelvin	K = °C + 273,15	25 °C = 298,15 K
Kelvin a Celsius	°C = K – 273,15	298,15 K = 25 °C

Situación: Aumento de la temperatura

Un estudiante afirma: “Según los datos del Senamhi, la temperatura promedio anual en Arequipa es de 18 °C en los últimos 30 años. Esto equivale a 35,6 °F y a 291,15 K, respectivamente”. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.



Conversión a Fahrenheit

Para convertir de Celsius a Fahrenheit multiplicamos por $\frac{9}{5}$ y sumamos 32.

$°F = \left(18 \times \frac{9}{5}\right) + 32$

$°F = 32,4 + 32 = 64,4\ °F \Rightarrow$ no coincide con 35,6 °F

Conversión a Kelvin

Para convertir de Celsius a Kelvin restamos 273,15.

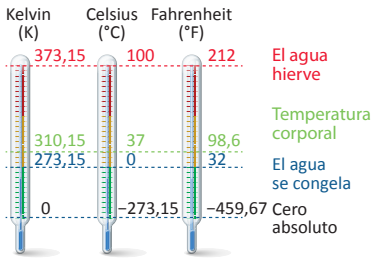
$K = 18 + 273,15$

$K = 291,15\ K \Rightarrow$ sí coincide

Por lo tanto, la afirmación es parcialmente correcta, ya que el valor Kelvin es correcto, pero el valor Fahrenheit no.

Recuerda

El siguiente gráfico muestra las equivalencias entre escalas de temperatura.



Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de proporcionalidad entre unidades de medida (Por ejemplo: kilogramos - gramos; grados Celsius - grados Fahrenheit) y resuelve situaciones problemáticas recurriendo a equivalencias.
- Representa las relaciones de equivalencia entre unidades (masa o temperatura) mediante potencias de base 10 cuando corresponda.
- Emplea procedimientos de multiplicación o división por potencias de base 10 para efectuar conversiones y determinar valores equivalentes.
- Justifica la elección de los procedimientos de conversión, y argumenta con ejemplos y contraejemplos la validez de las equivalencias al responder las preguntas planteadas en problemas contextualizados.

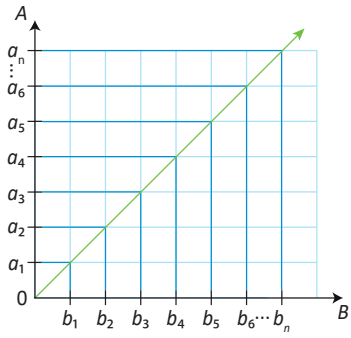
¿Sabías que...?

La proporcionalidad permite optimizar insumos y consumos, comparar rendimientos y costos, escalar recetas y planificar compras, justificar decisiones sostenibles basadas en datos para una gestión eficiente, responsable y equitativa.

Recuerda

Dos magnitudes A y B son directamente proporcionales (D. P.) cuando, al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor correspondiente de la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción.

Por ejemplo, si una se triplica, la otra también se triplica.



Se cumple

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \ldots = \frac{a_n}{b_n} = k$$

Practica valores

- Escucha con empatía y valora los aportes de tus compañeros al trabajar en equipo.
- Resuelve conflictos con respeto y propón soluciones que mantengan la armonía grupal.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes directamente proporcionales

Situación: Actividad en el colegio

Dos estudiantes participaron en la venta de comida. María trabajó 2 h y Diego, 3 h. Al final, se recaudó S/100 y se decidió repartir ese dinero entre ellos en razón al tiempo de trabajo realizado. ¿Es justo darles lo mismo a ambos? ¿Quién debería recibir más?



No es justo darles lo mismo a ambos porque a mayor tiempo trabajado, mayor será el dinero que debe recibir cada uno.

k		Luego
k	$3k$	$2k + 3k = 100$
k		$5k = 100$
k	$2k$	$k = 20$
k		

Reemplazamos.
María = $2(20) = 40$
Diego = $3(20) = 60$
Por lo tanto, Diego debería recibir más dinero.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que las **magnitudes directamente proporcionales** consisten en distribuir una cantidad total (T) en partes proporcionales a ciertos valores de referencia, por ejemplo, a, b y c.

Sea T la cantidad total que se desea repartir entre tres personas (A,B y C), de manera proporcional a los números a, b y c, respectivamente.

Se cumple: $\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{c} = k;\ A = ak;\ B = bk;\ C = ck$

$T = ak + bk + ck$ $\qquad$ $T = k(a + b + c)$ $\qquad$ Luego, $k = \frac{T}{(a + b + c)}$

Situación: Reciclaje de botellas

Cuatro estudiantes recogen botellas del mismo tipo por separado durante un día. Pedro recogió 5 botellas; Lucía, 7; Jaime, 8; y Carla, 10. La municipalidad premia al grupo con S/60 y reparte el dinero exclusivamente entre ellos, en proporción a las botellas recogidas. Una estudiante afirma: "Carla recibirá S/20 y Lucía, S/17 porque Carla recogió 3 botellas más que Lucía". ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta.

- Sean P, L, J y C lo que reciben Pedro, Lucía, Jaime y Carla, respectivamente.

$$\frac{P}{5} = \frac{L}{7} = \frac{J}{8} = \frac{C}{10} = k \quad \begin{cases} P = 5k \\ L = 7k \\ J = 8k \\ C = 10k \end{cases}$$

- Entonces $5k + 7k + 8k + 10k = 60$
$30k = 60$
$k = 2$

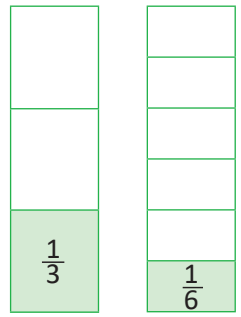
- Reemplazamos el valor de k.
$C = 10(2) = 20$
$L = 7(2) = 14$
Por lo tanto, Lucía debería recibir S/14, por lo que no es correcta la afirmación.

Magnitudes inversamente proporcionales

Situación: Llenado de una piscina

En una zona rural se utilizan dos grifos para llenar una misma piscina a caudal constante. Si se usan al mismo tiempo, ¿todos vierten la misma cantidad de agua por unidad de tiempo? Justifica tu respuesta.

No, el primer grifo tiene un mayor caudal, por eso, llena la piscina en menos tiempo, de modo que vertie más agua por minuto y el segundo tiene menos caudal, por ello, vierte menos agua por minuto.



1.er grifo 2.º grifo

La resolución de la situación anterior evidencia que las **magnitudes inversamente proporcionales** consiste en dividir una cantidad total T en partes que sean inversamente proporcionales a ciertos valores de referencia. Es decir, a menor valor de referencia, mayor será la parte asignada.

$$A \times a = B \times b = C \times c = k;\ A = \frac{k}{a};\ B = \frac{k}{b};\ C = \frac{k}{c}$$

$$T = \frac{k}{a} + \frac{k}{b} + \frac{k}{c} \qquad T = k\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \qquad \text{Luego, } k = \frac{T}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)}$$

Situación: Entre técnicos

Tres costureras remallan camisetas idénticas. Luisa termina el trabajo en 1 h; Fabiola, en 2 h; y Elena, en 3 h (todas en un ritmo constante). Al día siguiente trabajan juntas y reciben S/330. Un estudiante afirma: "Elena debe recibir más porque trabajó más tiempo, y Luisa menos porque acabó rápido". ¿Estás de acuerdo? Justifica.



Quien tarda menos es más eficiente y su aporte vale más. El pago debe hacerse en forma inversa al tiempo que tarda cada una.

- Sean L, F y E lo que reciben Luisa, Fabiola y Elena, respectivamente.

$$L \times 1 = F \times 2 = E \times 3 = k \begin{cases} L = \frac{k}{1} \\ F = \frac{k}{2} \\ E = \frac{k}{3} \end{cases}$$

- Entonces

$$\frac{k}{1} + \frac{k}{2} + \frac{k}{3} = 330$$
$$\frac{6k + 3k + 2k}{6} = 330$$
$$\frac{11k}{6} = 330$$
$$\frac{1k}{6} = 30 \qquad k = \frac{30 \times 6}{1} \Rightarrow k = 180$$

- Reemplazamos el valor de k.

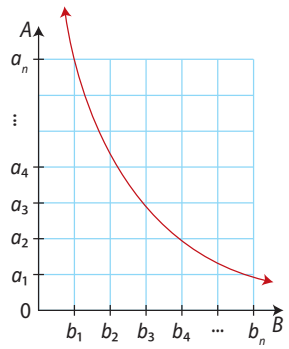
$$L = \frac{180}{1} = 180$$
$$F = \frac{180}{2} = 90$$
$$E = \frac{180}{3} = 60$$

Elena recibe S/60 mientras que Luisa S/180, de ahí que la afirmación es incorrecta.

Ten en cuenta

Dos magnitudes A y B son inversamente proporcionales (I. P.) cuando, al aumentar o disminuir el valor de una de ellas, el valor correspondiente de la otra disminuye o aumenta en la misma proporción.

Por ejemplo, si una se triplica, la otra se reduce a la tercera parte.



Se cumple

$$a_1 \cdot b_n = a_2 \cdot b_4 = a_3 \cdot b_3 = a_n \cdot b_1 = k$$

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones en situaciones de proporcionalidad directa o inversa, y justifica cuál corresponde.
- Representa los repartos mediante tablas y gráficos en el plano cartesiano.
- Emplea procedimientos para hallar la constante de proporcionalidad y determinar la cantidad asignada a cada parte.
- Justifica las diferencias y la validez del reparto en una situación dada, evaluando afirmaciones y comprobando los resultados.

Recuerda

En una **función lineal**, la relación entre la **variable independiente** y la **dependiente** es **directamente proporcional**. Esto significa que, si la variable independiente aumenta, la dependiente también aumenta. Si la variable independiente disminuye, la dependiente también disminuye.

Ejemplo:

$y = f(x) = 3x$

variable dependiente — variable independiente

Ten en cuenta

Dominio de una función

El dominio de una función $f: A \rightarrow B$ es el conjunto de todos los elementos del conjunto de partida A, para los cuales la función f está definida. Se representa como Dom(f).

Notación:

$\text{Dom}(f) = \{ x \in A / (x; y) \in f \}$

Rango de una función lineal

El rango de una función $f: A \rightarrow B$ es el conjunto de elementos que pertenecen al conjunto de llegada. Se representa como Ran(f).

Notación:

$\text{Ran}(f) = \{ y = f(x) \in B / x \in A \}$

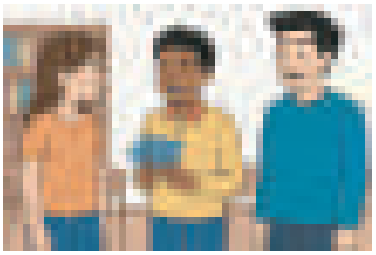
Practica valores

- Contrasta ideas matemáticas y consensúa conclusiones fundamentadas en evidencias. Gestiona residuos y energía, y optimiza recursos para cuidar el entorno.

FUNCIÓN LINEAL Y LINEAL AFÍN

Función lineal

Situación: Una rifa solidaria



Los estudiantes del tercer grado de secundaria organizan una rifa solidaria; cada boleto cuesta x soles ($x > 0$). Uno de los estudiantes se pregunta si ya terminó de vender los boletos asignados. ¿Vale la pena pedir boletos adicionales para recaudar una mayor cantidad de dinero?

Llamaremos p al valor de un boleto en soles, y x al número total de boletos que tiene que vender cada estudiante. Asimismo, notamos que, cuantos más boletos se vendan, mayor será el dinero recaudado.

N.° de boletos	Recaudación (soles)
1	$1p$
2	$2p$
⋮	⋮
x	$x \cdot p$

Esto nos muestra que la recaudación depende del número de boletos vendidos, entonces $f(x) = x \cdot p$.

El análisis previo nos muestra que la **función lineal**, o función de proporcionalidad, es una relación matemática de la forma

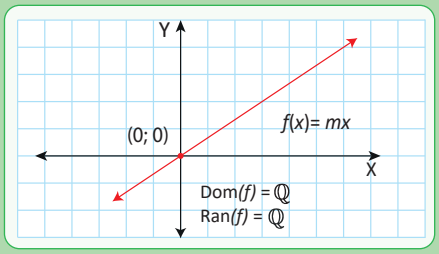
$y = f(x) = mx$ donde $m \neq 0$ y $m \in \mathbb{Q}$

m: pendiente

x: variable independiente

$y = f(x)$: variable dependiente

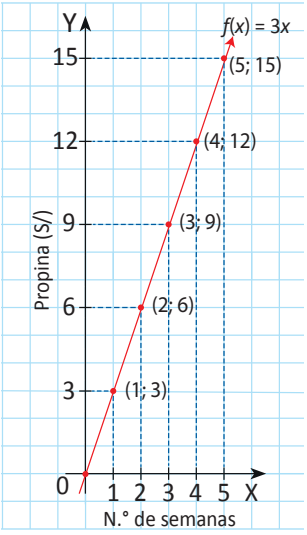
Su gráfica es una recta que pasa por el origen de coordenadas (0; 0).



Situación: Matías y su propina

Se muestra la tabla de valores y la gráfica de una función que representa el monto acumulado de propinas de Matías al finalizar x semanas desde que empezó a registrarlas. Matías afirma que en una semana podría recibir hasta S/40. ¿Estás de acuerdo? Justifica.

x	$f(x)$
0	$3(0) = 0$
1	$3(1) = 3$
2	$3(2) = 6$
3	$3(3) = 9$



A partir de la información escribimos la regla de correspondencia de la función lineal

$f(x) = 3x$

Luego, $3x = 40$

Despejamos $x = 13{,}333...$

Pero sabemos que x, como es un número de la semana, debe ser un número entero positivo, por lo tanto, la afirmación de Matías es incorrecta.

Función lineal afín

Situación: Menú escolar

El menú de un restaurante tiene un precio de S/9. Si se compra para llevar, se debe pagar un adicional fijo de S/2 por pedido. ¿Cuánto se gastaría si se compran cinco menús para llevar? ¿Cuál es la expresión que modela el costo total en función de la cantidad de menús?

Del enunciado, podemos evaluar

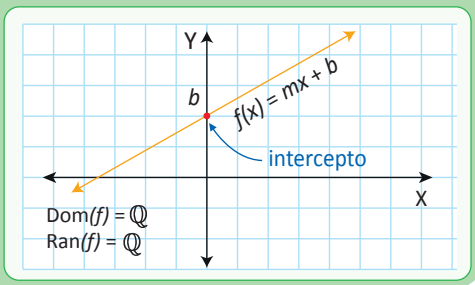
Cantidad de menús (x)	Costo total $f(x)$
1 menú	9(1) + 2 = 11
2 menús	9(2) + 2 = 20
3 menús	9(3) + 2 = 29
4 menús	9(4) + 2 = 38
5 menús	9(5) + 2 = 47

Por lo tanto, se gastó S/47 en cinco menús. Además, en general, si x es el número de menús y el costo total es y, entonces escribimos la expresión $y = f(x) = 9x + 2$, a la cual denominaremos función afín.

El problema resuelto ilustra que la **función lineal afín** es una relación matemática de la forma $y = f(x) = mx + b$, donde $b \neq 0$ y $m \neq 0$, y $m \in \mathbb{Q}$

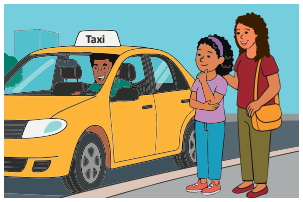
m: pendiente
x: variable independiente
b: constante
$y = f(x)$: variable dependiente

Su gráfica es una recta que corta al eje Y en el punto $(0; b)$, donde b es el intercepto con ese eje.



Situación: Precio del taxi

Sandra y su hija toman un taxi que cobra S/4 como mínimo más S/2 por kilómetro. Si recorren 5 km, la hija piensa: "El precio es 4 × 5 = 20 soles". ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.



- Identificamos los datos

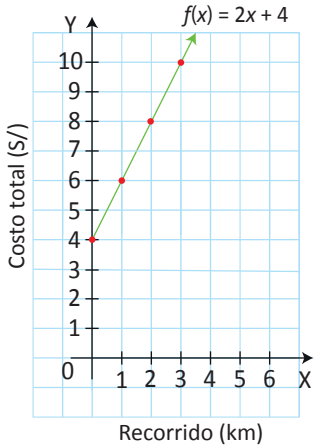
x: número de km recorridos
$y = f(x)$: costo total del viaje
$m = 2$: costo por km recorrido
$b = 4$: tarifa base
Luego, la función lineal afín es $f(x) = 2x + 4$.

- Tabulamos los valores.

x	$f(x)$
0	2(0) + 4 = 4
1	2(1) + 4 = 6
2	2(2) + 4 = 8
3	2(3) + 4 = 10

- Calculamos el pago por los 5 kilómetros.
$f(5) = 2(5) + 4$
$f(5) = 14$

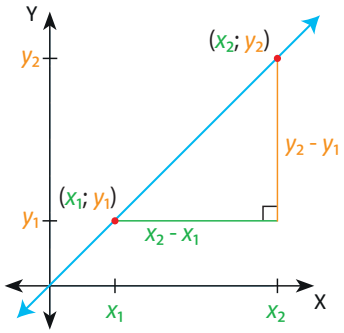
- Realizamos la gráfica de la función.



Por lo tanto, el pago sería S/14 y no S/20, como afirmó la hija.

Ten en cuenta

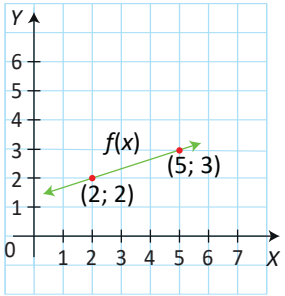
Observa cómo se obtiene la fórmula general para calcular la pendiente



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo:

Calcula la pendiente de la recta que aparece en la siguiente gráfica:



De la gráfica, se puede observar que la recta pasa por los puntos (2; 2) y (5; 3).

Reemplaza los valores en la expresión

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m = \frac{3 - 2}{5 - 2}$$

$$m = \frac{1}{3}$$

Por lo tanto, la pendiente es $m = \frac{1}{3}$

Si $m > 0$, la recta es creciente.
Si $m < 0$, la recta es decreciente.
Si $m = 0$, la recta es horizontal.

Ten en cuenta

Una función lineal con pendiente negativa podría modelar la depreciación de algunos artículos usados, cuyo valor disminuye a medida que pasa el tiempo. Por ejemplo, el valor de un auto, un teléfono, una refrigeradora, etc.

TIC

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de dependencia entre variables al resolver problemas referidos a funciones lineales o lineales afines.
- Expresa la relación de cambio constante en diagramas tabulares y gráficos en el plano cartesiano.
- Emplea procedimientos de tabulación, calcula la pendiente y el intercepto de una función, y halla valores de las variables para resolver problemas.
- Argumenta el significado de la pendiente como variación de la función, y con ejemplos y contraejemplos la validez de las afirmaciones.

Función lineal y lineal afín con pendiente negativa

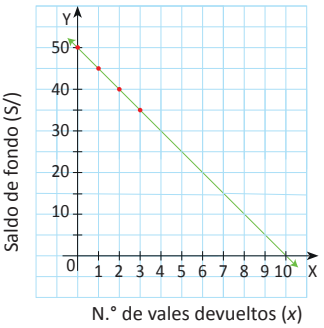
Situación: Devolución de vales

La feria cuenta con un fondo inicial de S/50 para devolver vales. Por cada vale devuelto se pagan S/5. ¿Cómo se expresa el saldo del fondo en función del número de vales devueltos?

x (vales)	Saldo $S(x)$
0	$50 - 5(0) = 50$
1	$50 - 5(1) = 45$
2	$50 - 5(2) = 40$
10	$50 - 5(10) = 0$

- El fondo inicia con S/50 y se reduce S/5 por vale devuelto. El saldo que queda en el fondo después de devolver x vales se puede representar con la función $S(x) = 50 - 5x$.
- La cantidad de dinero que pierde al devolver x vales se puede representar con la función $S(x) = 50 - 5x$.

Por lo tanto, la función es lineal decreciente con pendiente −5: cada vale baja S/5. Intercepto en 50 ($x = 0$) y se agota en $x = 10$.



De acuerdo con lo analizado, una función lineal $y = f(x) = ax$ y lineal afín $y = f(x) = ax + b$ tienen pendiente negativa si $a < 0$. La **pendiente negativa** establece una relación decreciente entre las variables, donde el aumento de x provoca una disminución lineal en y, de modo que se manifiesta gráficamente como una recta que desciende de izquierda a derecha.

Situación: Camino a casa

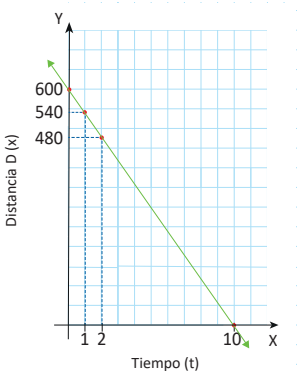
Yurico camina en línea recta del colegio a su casa, situada a 600 m, con velocidad constante de 60 m/min. Si t es el tiempo transcurrido (en min) desde que sale del colegio y $D(t)$ es la distancia que le falta recorrer (m), un estudiante afirma: "La distancia que falta recorrer está modelada por $D(t) = 60t - 600$". ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.



- Notamos que la distancia que falta recorrer va disminuyendo con el paso de los minutos, ya que Yurico se acerca a su casa.
- Procedemos a tabular y graficar

t	$D(t)$
0	$600 - 60(0) = 600$
1	$600 - 60(1) = 540$
2	$600 - 60(2) = 480$
⋮	⋮
10	$600 - 60(10) = 0$

- Luego, la distancia se expresaría así $D(t) = 600 - 60t$
- Graficamente obtenemos:



- La función tiene pendiente negativa.

La afirmación es falsa porque la función es diferente a $D(t) = 600 - 60t$ al evaluar en $t = 0$, esa función da −600 m, mientras que la correcta tiene un valor de 600 m.

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Medidas de tendencia central: media aritmética para datos agrupados

Situación: Promedios finales

En la universidad, el profesor organizó la distribución de promedios finales en Matemática. ¿En qué intervalo crees que se encuentra la media aritmética del grupo?

Intervalo	N.° de estudiantes
[10; 12[	2
[12; 14[	6
[14; 16[	10
[16; 18[	4
[18; 20]	3

Al observar los intervalos, notamos que la mayoría tiene notas entre 14 y 16. Hay pocos con notas muy altas o muy bajas. Entonces, se puede decir que la nota promedio se encuentra en este intervalo.

La resolución de la situación anterior evidencia que la **media aritmética** ($\overline{x}$) es la suma de los productos de las marcas de clase (x_i) por su frecuencia absoluta (f_i) correspondiente, dividida entre el número de datos (n). Se expresa como

$$\overline{x} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \ldots + x_i \cdot f_i}{\sum f_i} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i \cdot f_i)}{\sum f_i}$$

Donde f_i: frecuencia absoluta del intervalo

$\sum f_i$: número total de datos x_i: marca de clase del intervalo I_i

Situación: Actividad propuesta del profesor

Un docente presenta la siguiente tabla a sus estudiantes:

I_i	[10; 14[	[14; 18[	[18; 22[	[22; 26]
f_i	5	13	12	10

Él les pregunta por la media aritmética. Rubén presenta el siguiente cálculo:

$$\overline{x} = \frac{14(5) + 18(13) + 22(12) + 26(10)}{4} = \frac{70 + 234 + 264 + 260}{4} = \frac{828}{4} = 207$$

¿Estás de acuerdo con el procedimiento de Rubén? Justifica.

Rubén utilizó los límites superiores de los intervalos y no las marcas de clase. Asimismo, dividió la suma entre la cantidad de intervalos y no sobre el total de la muestra; por lo tanto, su procedimiento es erróneo. Un procedimiento adecuado sería el siguiente:

- Calculamos primero las marcas de clase de cada intervalo.

$$x_1 = \frac{10 + 14}{2} = 12; \quad x_2 = \frac{14 + 18}{2} = 16$$

$$x_3 = \frac{18 + 22}{2} = 20; \quad x_4 = \frac{22 + 26}{2} = 24$$

- Ahora calculamos la media.

$$\overline{x} = \frac{12 \times 5 + 16 \times 13 + 20 \times 12 + 24 \times 10}{5 + 13 + 12 + 10}$$

$$\overline{x} = \frac{748}{40} = 18{,}7$$

¿Sabías que...?

Las medidas estadísticas (media, mediana, moda y rango) permiten resumir consumos y desperdicios, comparar antes y después de acciones, y detectar extremos. Con estos indicadores, estudiantes monitorean agua, energía y alimentos, fijan metas cívicas, evalúan avances, justifican cambios de hábitos y toman decisiones sostenibles en producción, consumo y distribución local.

Recuerda

En el intervalo $I_i = [L_i; L_s[$, la marca de clase x_i se calcula así

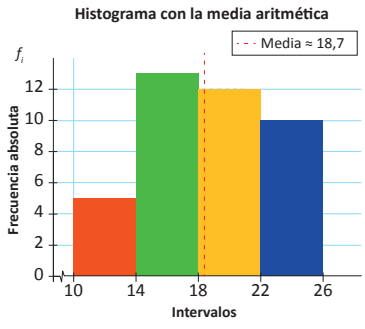
$$x_i = \frac{L_i + L_s}{2}$$

L_i: límite inferior

L_s: límite superior

Ten en cuenta

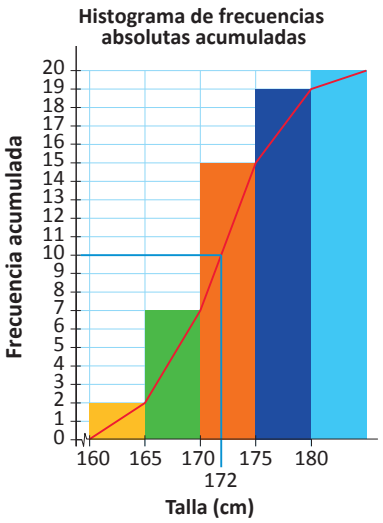
La **media aritmética** en un histograma se representa con una línea vertical. Esta línea muestra el valor promedio de los datos y señala el punto de equilibrio de la distribución: a la izquierda y a la derecha de ella se concentran las frecuencias de manera que balancean el conjunto de los datos.



Ten en cuenta

La mediana de los jugadores también se puede estimar utilizando un polígono de frecuencias absolutas acumuladas, así

Construye el histograma de las frecuencias absolutas acumuladas correspondiente a los datos de la tabla. Luego, dibuja el polígono de frecuencias uniendo el vértice superior derecho de todos los rectángulos. En seguida traza una recta horizontal que corte al eje Y en el dato 10. Finalmente, en el punto de intersección con el polígono de frecuencias acumuladas, baja la perpendicular, esta cortará al eje X en el valor estimado de la mediana.



Reto matemático

Un bus llega cada 10 minutos. Con 40 observaciones agrupadas, calcula la mediana y compárala con el promedio, ¿quién representa mejor la centralidad?

Medidas de tendencia central: mediana para datos agrupados

Situación: Atención en el hospital

Un hospital registró cuánto tiempo esperaron los pacientes para ser atendidos. ¿Qué tiempo esperó la persona que está justo en la mitad de la fila sabiendo que se atiende por orden de llegada?

Tiempo (min)	N.° de pacientes
[0; 10[	4
[10; 20[	6
[20; 30[	16
[30; 40[	3
[40; 50]	1

Observamos que, como son 30 pacientes, quien está en la mitad de la fila será el número 15. El intervalo donde se encuentra este paciente es [20; 30[. Por lo tanto, el tiempo de espera fue aproximadamente de 20 a menos de 30 minutos.

El problema resuelto ilustra que la **mediana** (*Me*) es el valor numérico del intervalo que divide al conjunto de datos ordenados en dos partes iguales. Se calcula usando la siguiente expresión:

$$Me = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \cdot A$$

Donde

L_i: límite inferior del intervalo de la mediana

F_{i-1}: frecuencia absoluta acumulada anterior al intervalo de la mediana

f_i: frecuencia absoluta del intervalo de la mediana

A: amplitud del intervalo de la mediana

n: total de datos

Situación: Tallas de jugadores

Se presenta la distribución de tallas de jugadores de básquet.

Talla (cm)	f_i	F_i
[160; 165[	2	2
[165; 170[	5	7
[170; 175[	8	15
[175; 180[	4	19
[180; 185]	1	20
Total	$n = 20$	

Cristian quiere calcular la mediana de las tallas y menciona: “Como hay 20 datos, la mediana está en la posición 10, la cual se ha acumulado en el intervalo [170; 175[, y su valor es 172,5 cm, porque es la semisuma de los extremos del intervalo”. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.

- Identificamos el intervalo de la mediana.
- Se calcula $\frac{n}{2} = \frac{20}{2} = 10 \rightarrow F_i$

Intervalo = [170; 175[con $f_i = 8$ y $F_i = 15$

- Estimamos el valor de la mediana.

$L_i = 170$
$n = 20$
$F_{i-1} = 7$
$f_i = 8$
$A = 5$

$$Me = 170 + \left(\frac{\frac{20}{2} - 7}{8} \right) \times 5$$

$$Me = 170 + \left(\frac{3}{8} \right) \times 5$$

$$Me = 170 + 1{,}88 = 171{,}88$$

Por lo tanto, Cristian acierta al identificar el intervalo de la mediana como [170; 175[, pero se equivoca al estimar su valor, ya que se obtiene un valor aproximado de 171,88 cm aplicando la fórmula respectiva y no la semisuma de los extremos del intervalo.

Medidas de tendencia central: moda para datos agrupados

Situación: La hora de la lectura

En la biblioteca, se registró la cantidad de libros leídos por un grupo de jóvenes.

Luego de observar los intervalos, ¿en cuál crees que se encuentra la mayoría de los jóvenes?

Libros leídos	N.° de jóvenes
[0; 2[	4
[2; 4[	10
[4; 6[	6
[6; 8[	2
[8; 10]	1

Observamos que el intervalo con más participantes es [2; 4[, ya que contiene a 10 jóvenes, de modo que supera claramente a los demás. Esto indica que la mayoría lee entre 2 y 4 libros al mes, por lo que ese intervalo es el más frecuente del grupo.

El análisis anterior nos muestra que la **moda** (*Mo*) es el valor central del intervalo modal, es decir, del intervalo con mayor frecuencia, se calcula mediante la siguiente expresión:

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2}\right) \cdot A$$

Donde

L_i: límite inferior del intervalo modal

d_1: $f_i - f_{i-1}$

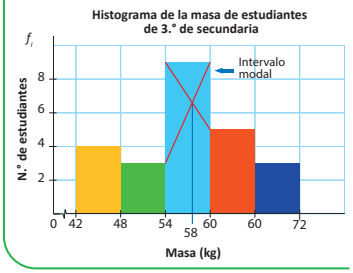
d_2: $f_i - f_{i+1}$

A: amplitud del intervalo modal

f_i: frecuencia de la clase modal

Ten en cuenta

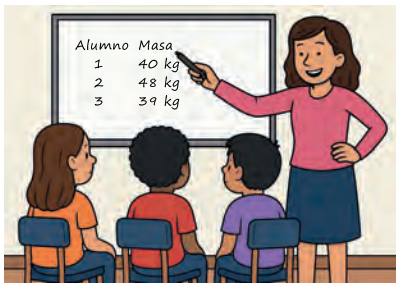
La moda de la masa puede estimarse con un histograma: construyelo y ubica el intervalo modal (rectángulo más alto). Traza un segmento del vértice superior izquierdo del modal al superior derecho del anterior, y otro del superior derecho del modal al superior izquierdo del siguiente. El punto de corte, proyectado al eje X, da la moda estimada gráfica.



Situación: Masas de estudiantes

La tabla registra la masa de 24 estudiantes del tercer grado de secundaria. Los estudiantes quieren saber la moda, y Susana afirma: "La moda de las masas es el intervalo que tiene mayor frecuencia, entonces la moda es [54; 60[".

¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.



Masa (kg)	f_i
[42; 48[	4
[48; 54[	3
[54; 60[	9
[60; 66[	5
[66; 72]	3
Total	$n = 24$

Identificamos el intervalo modal.

El intervalo con mayor frecuencia absoluta es [54; 60[con $f_i = 9$.

Estimamos la moda usando la fórmula

$L_i = 54$

$d_1 = 9 - 3 = 6$

$d_2 = 9 - 5 = 4$

$A = 6$ kg

$$Mo = 54 + \left(\frac{6}{6+4}\right) \times 6$$

$$Mo = 54 + \frac{6}{10} \times 6$$

$$Mo = 54 + 3{,}6 = 57{,}6$$

El valor estimado de la moda es 57 kg. Susana está confundiendo intervalo modal con el valor estimado de la moda.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre datos y resuelve problemas de contexto que involucran las medidas de tendencia central.
- Expresa la distribución de los datos en tablas de frecuencias y representa la distribución y las medidas de tendencia central utilizando histogramas y polígonos de frecuencia.
- Emplea procedimientos para datos agrupados a fin de determinar la media, mediana y moda, y halla el valor de estas medidas de tendencia central.
- Argumenta con ejemplos la interpretación del valor de cada medida, como el dato más representativo, evaluando afirmaciones.

Actividad lúdica



¡Explora el juego! Revisa las reglas, compara estrategias y da sentido matemático a tus ideas y procedimientos.

Propósito de aprendizaje

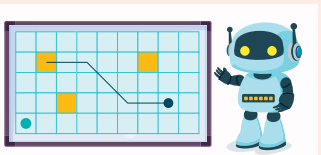
Representa y argumenta el movimiento de un robot mediante procedimientos algebraicos y gráficos para establecer relaciones con funciones lineales y afines, y comunicar la planificación de rutas y cambios de dirección.

Practica valores

- Revisa con atención las actividades, comunica sus comprensiones y expresa dudas para prevenir errores o dificultades en el trabajo en equipo.
- Acuerda con su grupo las formas de registrar los procesos, y define simbologías, tablas y esquemas que facilitan comprensión colectiva.

Desafío de la empresa

1. Situación



Una empresa ha creado un robot que se desplaza según una función matemática, destinado a operar en almacenes inteligentes. Tu equipo, como ingenieros programadores, debe simular su movimiento en un tablero cuadriculado. El reto consiste en programar su ruta con al menos tres cambios de dirección para evitar zonas restringidas y cumplir objetivos.
¿Lograrán calcular las coordenadas correctas, planificar una ruta con cambios estratégicos y llevar al robot a la meta antes que los demás?

2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Forma equipos de dos a cuatro estudiantes.

b. Cada equipo recibe un tablero (plano cartesiano grande, por ejemplo, de 10 × 10 o 20 × 20 casillas) con secciones sombreadas que serán las zonas restringidas.

c. El robot (representado por una ficha) comienza en una posición inicial asignada por el profesor o al azar.

d. El profesor señala una meta en el tablero: por par ordenado una casilla específica que representa el objetivo final.

e. El equipo debe calcular los puntos $(x; y)$ que seguirá el robot, de acuerdo con su función lineal o lineal afín.

f. El robot se desplaza paso a paso por el tablero.

g. El desplazamiento debe incluir al menos tres cambios de dirección.

h. Cada equipo propone al menos tres funciones (funciones lineales o funciones lineales afín) de tal forma que se realice el desplazamiento del punto de partida a la meta.

i. El equipo organiza una tabla de valores para cada tramo. Por ejemplo:

Para el tramo 1

- Punto de inicio (5; 11)
- $f(x) = 2x + 1$
- Dominio: $x \in [5; 7]$
- Rango: $f(x) \in [11; 15]$

Tabla de valores

Pasos	x	$f(x) = 2x + 1$
0	5	11
⋮	⋮	⋮
2	7	15

j. Gana el equipo que llegue correctamente a la meta y que cumpla con los cambios de dirección exigidos.

k. Modo 1 (opcional): dos o más robots se mueven en el mismo tablero y evitan colisiones, mientras siguen funciones diferentes.

l. Modo 2: cada equipo recibe tres o cuatro tarjetas con funciones lineales o lineales afines (por ejemplo, $f(x) = 2x + 1$; $f(x) = -x + 4$; $f(x) = 0{,}5x - 2$).

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Preparación

a. Observa la función lineal o lineal afín y representa algunos puntos en papel cuadriculado.

b. Planifica la ruta hasta la meta y anticipa posibles cambios de dirección y obstáculos.

c. Discute en equipo cómo adaptar el recorrido en caso de encontrarse con obstáculos o si deben evitar a otros robots.

Ejecución

d. Cada equipo presenta su plan inicial con los cálculos de coordenadas.

e. Por turnos, los robots se mueven en el tablero siguiendo sus funciones. Cada paso debe estar justificado con una coordenada calculada.

f. El profesor supervisa que los movimientos cumplan con la función asignada y valida los cambios de dirección.

g. Si un equipo se equivoca en una coordenada o no cumple con las condiciones, debe corregir su ruta en el siguiente turno.

h. El juego finaliza cuando uno o más robots llegan correctamente a la meta.

Finalización

i. Dibuja el recorrido completo del robot en un papel cuadriculado.

j. Marca los puntos por los que pasó e identifica claramente cada cambio de dirección.

k. Escribe la función lineal o lineal afín utilizada y explica cómo eligieron los valores de x.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué aprendimos sobre el comportamiento de las funciones al mover el robot?

b. ¿Cómo influye el valor de la pendiente en el recorrido?

c. ¿Qué desafíos enfrentamos al planear un recorrido con cambios de dirección?

d. ¿Cómo nos ayudó la representación gráfica a tomar decisiones durante el juego?

e. ¿Podemos pensar en aplicaciones reales de este tipo de trayectorias?

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre el avance del robot y el número de pasos mediante funciones lineales o lineales afines, y modela la trayectoria (incluidos tramos múltiples) para resolver la ruta.
- Expresa la trayectoria y las restricciones de la ruta mediante coordenadas en el plano cartesiano, y representa el desplazamiento con tablas de valores y gráficas de la función lineal o lineales afín.
- Emplea procedimientos para determinar la función lineal o afín que describe el desplazamiento entre dos puntos, y calcula las coordenadas exactas de llegada a la meta.
- Justifica la elección de las funciones empleadas en cada tramo y argumenta la necesidad de cambiar de dirección o de función para evitar zonas restringidas y cumplir el objetivo.

UNIDAD

3

Construimos soluciones sostenibles para la salud y el bienestar comunitario

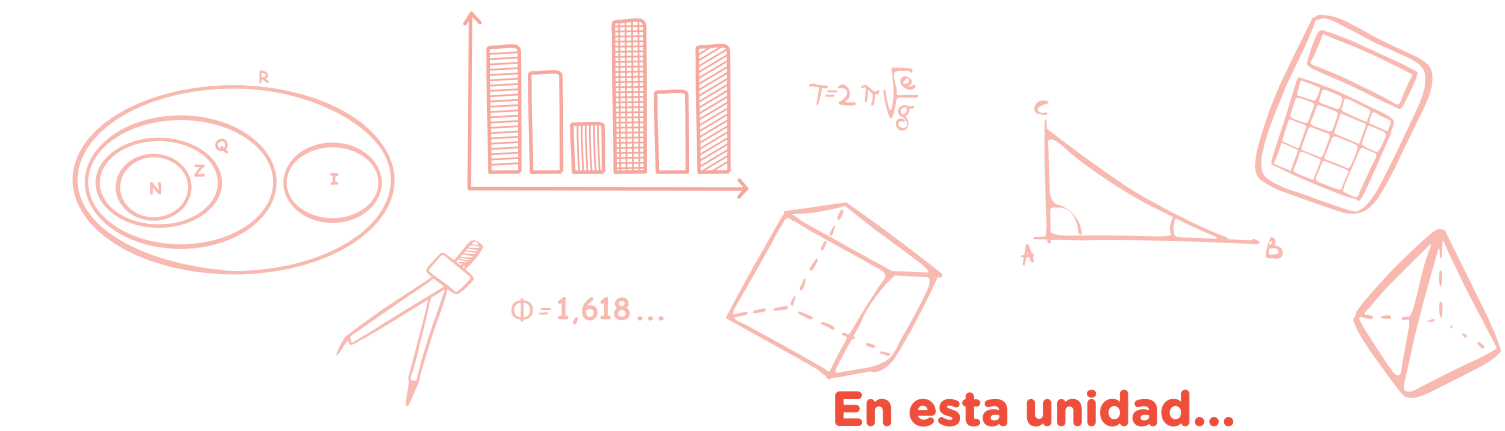


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

13 ACCIÓN POR EL CLIMA

Este objetivo promueve acciones desde lo local hasta lo global para reducir emisiones, adaptarse a fenómenos como sequías o heladas, y fomentar prácticas sostenibles. Se conecta directamente con lo siguiente:

- El diseño de soluciones sostenibles que protejan el medio ambiente y mejoren la salud.
- El uso de tecnologías ecológicas que reduzcan los efectos del cambio climático.
- La reflexión sobre el impacto ambiental de nuestras decisiones cotidianas y la propuesta de acciones para mitigarlo.



En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construyo mis conocimientos

Operaciones con números racionales y propiedades
- Adición y sustracción de números racionales
- Multiplicación de números racionales
- División de números racionales
- Potenciación de números racionales con exponente positivo
- Propiedades de la potenciación de números racionales

Inecuaciones lineales
- Inecuaciones lineales con una incógnita de las formas $ax \pm b < 0$; $ax \pm b > 0$; $ax \pm b \leq 0$; $ax \pm b \geq 0$; $a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$
- Propiedades de las inecuaciones

Ecuaciones cuadráticas
- Ecuación cuadrática
- Ecuaciones cuadráticas incompletas de las formas $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$

Formas bidimensionales
- Clasificación de triángulos
- Clasificación de cuadriláteros
- Rectas y puntos notables en el triángulo

Medidas de formas bidimensionales
- Perímetro de formas bidimensionales compuestas
- Áreas de formas bidimensionales compuestas

Formas tridimensionales
- Prismas rectos regulares e irregulares

Medidas de formas tridimensionales
- Prisma recto: área lateral y total
- Pirámide regular: área lateral y total
- Volumen del prisma recto y pirámide regular
- Cilindro recto: área y volumen



Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque de orientación al bien común
  - Empatía
  - Solidaridad

Fuente: Municipalidad de Lima (2022).

Investigamos



Observa cada situación, asume un rol, resuelve con apoyo del anexo y justifica tus ideas matemáticas.

SITUACIÓN
La cocina mejorada, una propuesta ecológica

Las cocinas tradicionales producen humo que aumenta el riesgo de enfermedades respiratorias y contamina el ambiente. Para reducir este problema, el programa de Cocinas Mejoradas de Foncodes promueve modelos sostenibles y de bajo costo que protejan la salud y el entorno familiar. Como responsable técnico del programa, debes evaluar y diseñar una propuesta que optimice materiales y presupuesto, cumpla las condiciones mínimas de construcción y favorezca la sostenibilidad ambiental.

Foncodes: más de 300 000 cocinas mejoradas a leña tienen impacto en la salud y el medio ambiente

Nota de prensa

Tecnología básica validada por Sencico se va masificando en sierra y selva con el proyecto Haku Wiñay/Noa Jayatai.



Fuente: Foncodes (2022).

¿Cómo puedes elaborar un diseño viable y adaptado a una comunidad específica considerando la cantidad de materiales, el presupuesto y las restricciones locales?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Selecciona** un modelo de cocina mejorada y representa sus vistas en un plano que muestre sus medidas a escalas y medidas reales.
- **Reconoce** la medida de la superficie, el volumen y el perímetro en las secciones que componen la cocina según el modelo seleccionado; luego, determina la cantidad de materiales que se requieren para construir. Toma en cuenta la distribución de ladrillos, las medidas de las hornillas, la chimenea, etc.
- **Estima** los costos unitarios y totales de los materiales necesarios para construir la cocina empleando operaciones con números racionales.
- **Modela** las dimensiones de la base de la cocina mejorada para aprovechar el máximo de superficie que puede ocupar, para ello, considera emplear una ecuación cuadrática.
- **Determina** la medida de la superficie de planchas de cocina en función del número de hornillas que tienen patrón creciente a partir de expresiones basadas en una ecuación cuadrática.
- **Presenta** un presupuesto para construir el modelo de la cocina mejorada con las condiciones mínimas. Plantea un modelo de ahorro familiar para construir la cocina mejorada considerando el tiempo de ahorro con el uso de inecuaciones lineales.

SITUACIÓN
Construimos un modelo de invernadero andino

Durante el invierno, las heladas en la sierra peruana provocan el descenso de la temperatura, lo que afecta a los cultivos (papa, quinua, haba) y a la crianza de animales; además, genera pérdidas económicas y alimentarias. Como ingeniero agrónomo, tu tarea es diseñar un modelo de invernadero adaptado a las condiciones climáticas y geográficas de la sierra andina, que sea viable con los recursos disponibles.

Heladas en el Perú: ¿Por qué ocurren y cuánto daño le hacen a la sierra sur y centro?



Fuente: RPP (2021).

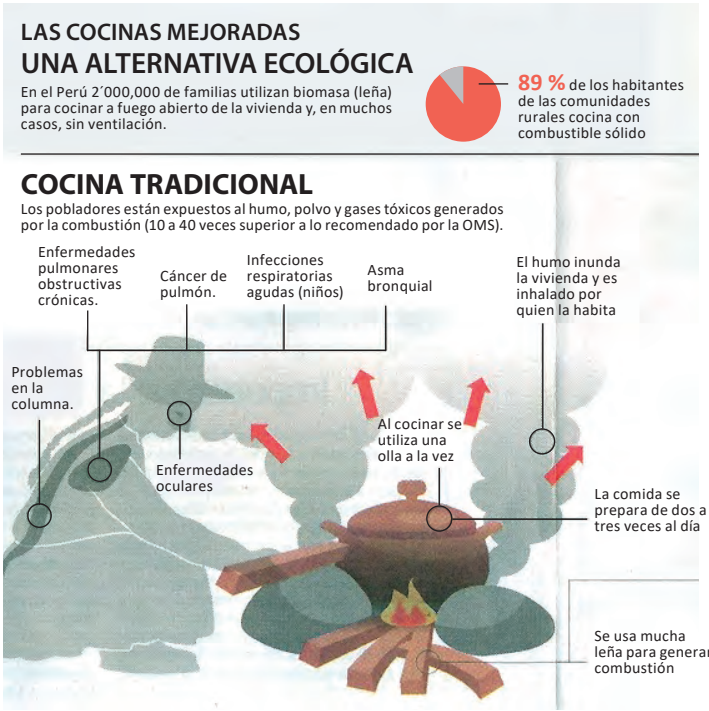
¿Cómo puedes diseñar un modelo de invernadero que optimice materiales y presupuesto, garantice resistencia frente a las condiciones extremas de la sierra y asegure la producción agrícola de manera sostenible?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Investiga** los tipos de invernaderos y elige el más adecuado según el clima, la geografía y los cultivos de tu contexto o localidad a proteger o producir.
- **Representa** el diseño del invernadero elegido en un plano que muestre sus medidas a escalas y medidas reales.
- **Reconoce** la medida según el diseño y las dimensiones empleando el área, el perímetro y el volumen de sólidos geométricos relacionados con el invernadero seleccionado y, luego, propón la cantidad de materiales a requerir para construir el invernadero (madera, tubos, polietileno, etc.).
- **Estima** el costo total de la construcción a partir de los precios locales tanto de los materiales principales como de los accesorios (puertas, ventanas, sistemas de riego, etc.), para ello, emplea operaciones con números racionales.
- **Propón** las superficies máximas que pueden tener la puerta y las ventanas considerando las ecuaciones cuadráticas, dadas las condiciones de medida del largo y ancho del invernadero.
- **Representa** las restricciones geográficas (altitud, temperatura, viento, agua) y de presupuesto, para ello, analiza su efecto en el diseño y funcionamiento del invernadero mediante inecuaciones lineales.

Anexo A: La cocina mejorada, una propuesta ecológica

1. La siguiente infografía muestra los beneficios de la cocina mejorada





Fuente: Cocinas Mejoradas (2011).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Modelos de cocina mejorada

Se muestran tres modelos de cocina mejorada y sus respectivas descripciones de prototipo.

a. Cocina mejorada La Fogoncita 2H



Descripción del prototipo de cocina mejorada la Fogoncita 2H		
Partes de la cocina	**Unidad**	**Cantidad**
Cuerpo de la cocina: hecha de ladrillo		
Dimensiones de la cocina:		
Largo	cm	90,0
Ancho	cm	80,0
Alto	cm	75,0
Plancha superficie superior, fabricada de fierro fundido		
Dimensiones de la plancha:		
Largo	cm	71,5
Ancho	cm	37,0
Espesor	cm	1,9
N.° de hornillas **Diámetro de los anillos reductores:** 17 cm, 22 cm y 31 cm (1.ª hornilla) / 17 cm y 22 cm (2.ª hornilla)	02	
Cámara de combustión: tipo directa elaborada por plancha de fierro fundido, 1/8 de forma trapezoidal, cuenta con una pendiente que asciende hasta la chimenea		

Dimensiones de la cámara de combustión:		
Ancho	cm	22,0
Altura (considerada desde la parrilla hasta la parte supeior de la cámara)	cm	12,0
Profundidad	cm	38,0
Parrilla: fabricada de fierro fundido		
Ancho	cm	22,0
Largo	cm	30,0
Espesor	mm	3,0
Chimenea: fabricada de plancha galvanizada con protector tipo sombrero		
Dimensiones de la chimenea:		
Diámetro	cm	12,0
Longitud	cm	240,0
Espesor de la plancha	mm	0,50
Protector de la chimenea: malla		
Dimensiones del protector:		
Espesor	cm	2,54
Diámetro	cm	14,0
Altura	cm	50,0

Fuente: Sencico (2023).

b. Cocina mejorada Tullpa +



Descripción del prototipo de cocina mejorada Tullpa +		
Partes de la cocina	**Unidad**	**Cantidad**
Cuerpo de la cocina: hecha de ladrillo		
Dimensiones de la cocina:		
Largo	cm	160,0
Ancho	cm	80,0
Alto	cm	75,0
Plancha superficie superior: fabricada de fierro fundido		
Dimensiones de la plancha:		
Largo	cm	90,0
Ancho	cm	50,0
Espesor	mm	1,5
N.° de hornillas **Diámetro de las hornillas:** 28 cm, 24 cm y 20 cm	03	
Cámara de combustión: tipo directo elaborada con ladrillos King kong		

Dimensiones de la cámara de combustión:		
Ancho	cm	26,0
Altura (considerada desde la rejilla hasta la parte superior de la cámara)	cm	21,0
Profundidad	cm	60 a 70
Rejilla: fabricada de fierro fundido		
Ancho	cm	22,5
Largo	cm	30,0
Altura	mm	4,0
Chimenea: fabricada de plancha galvanizada con protector tipo sombrero		
Dimensiones de la chimenea:		
Diámetro	cm	12,0
Longitud	cm	250,0
Espesor de la plancha	mm	0,55
Protector de la chimenea: construido de ladrillo King Kong		
Dimensiones del protector:		
Ancho	cm	37,5
Largo	cm	37,5
Altura	cm	35,0

Fuente: Sencico (2023).

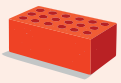
Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Tipos y precios de ladrillos y hornillas

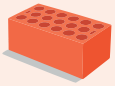
a. Tipos de ladrillos

Ladrillos para muros y tabiquerías

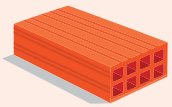
Los ladrillos King Kong son ideales para la construcción de muros portantes, los cuales soportan la carga de techos. Además se usan en la construcción de cercos.



Ladrillo
King Kong 30 %
- Medidas (cm): 24 x 13 x 9
- Unidades x m²: 38
- Peso kg.: 3,9
- Resistencia kg/cm²: 230

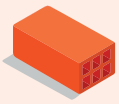


Ladrillo
King Kong 18
- Medidas (cm): 23 x 12,5 x 9
- Unidades x m²: 39
- Peso kg.: 2,8
- Resistencia kg/cm²: 202

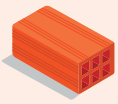


Ladrillo
Bloqueta 8
- Medidas (cm): 34 x 8 x 18
- Unidades x Sm²: 14
- Peso kg.: 2,8
- Resistencia kg/cm²: 4,0

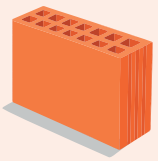
Los ladrillos Pandereta son ideales para la construcción de muros divisorios y tabiques, los cuales son para separar los ambientes de la casa



Ladrillo
Pandereta lisa
- Medidas (cm): 23 x 11 x 9,4
- Unidades x m²: 38
- Peso kg: 2,2



Ladrillo
Pandereta raya
- Medidas (cm): 23 x 11 x 9,4
- Unidades x m²: 38
- Peso kg: 2,2



Ladrillo tabicón
- Medidas (cm): 25 x 8 x 15
- Unidades x m²: 24
- Peso kg: 3,3

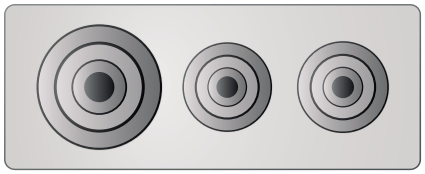
Fuente: Ladrillos Pirámide (2019).

b. Precios de los ladrillos

Tipo de ladrillo	Precio unitario (S/)	Precio por millar (S/)
King Kong 30 %	1,58	1580
King Kong 18	0,90	900
Boqueta 8	1,42	1420
Pandereta lisa	0,90	900
Pandereta raya	0,54	540
Tabicón	1,28	1280

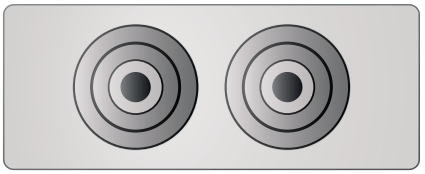
c. Precios de las hornillas

Plancha de cocina (3 hornillas)



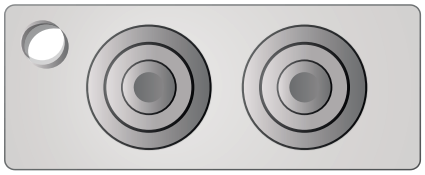
Costo: S/150,00

Plancha de cocina (2 hornillas sin chimenea)



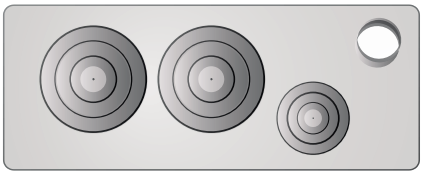
Costo: S/95,00

Plancha de cocina (2 hornillas con chimenea)



Costo: S/89,00

Plancha de cocina (3 hornillas con chimenea)



Costo: S/104,00

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B : Construimos un modelo de invernadero andino

1. Los invernaderos

El invernadero o fitotoldo es una construcción cuya cubierta o techo está hecho de un material que permite el paso de la luz solar, facilita su acumulación durante el día y la libera lentamente durante la noche, cuando las temperaturas descienden drásticamente. De esta manera, se evitan las pérdidas de cultivos ocasionadas por las heladas y las bajas temperaturas.



Fuente: Estrada, J. J. (2012).

a. Modelos de invernaderos

Existen muchos modelos que ofrecen buenos resultados. Algunos se construyen sobre la superficie y otros son semisubterráneos, ya que se excava el suelo para su instalación. Estos invernaderos pueden ser de carácter familiar, comercial o industrial.



Modelo de una caída



Modelo de dos caídas



Modelo de túnel

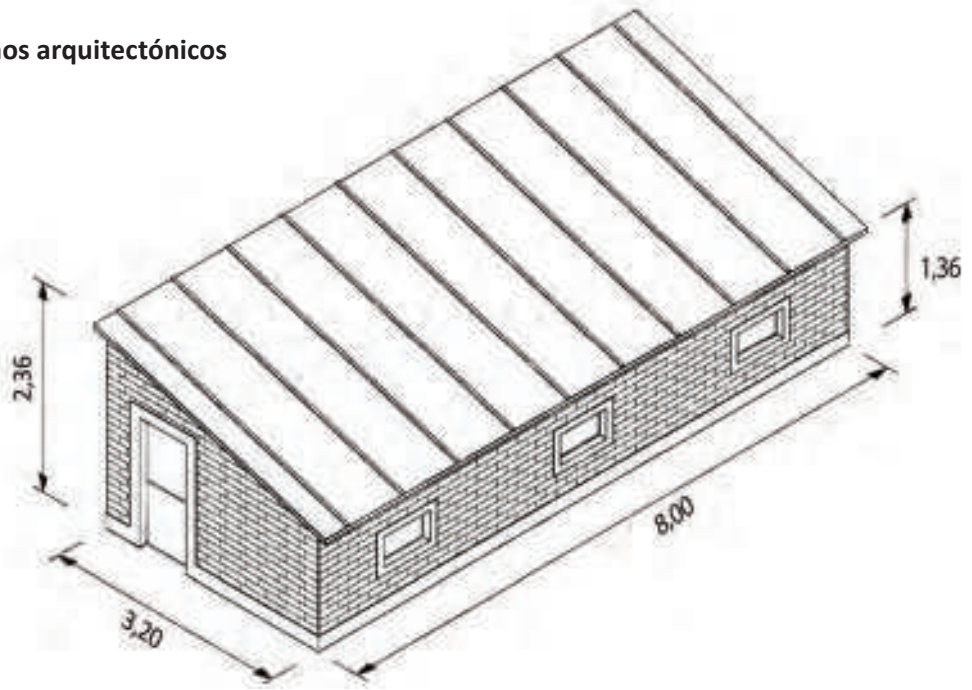
Fuente: Estrada, J. J. (2012).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Plano de construcción de un invernadero

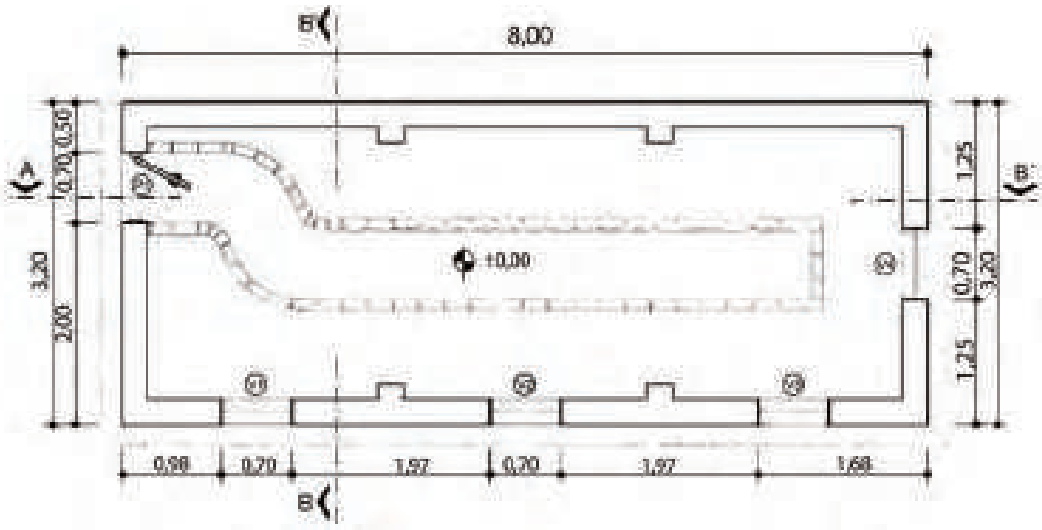
Como ejemplo, el invernadero de una caída ocupa unos 25 m², espacio adecuado para producir hortalizas para una familia de cinco miembros.

Planos arquitectónicos



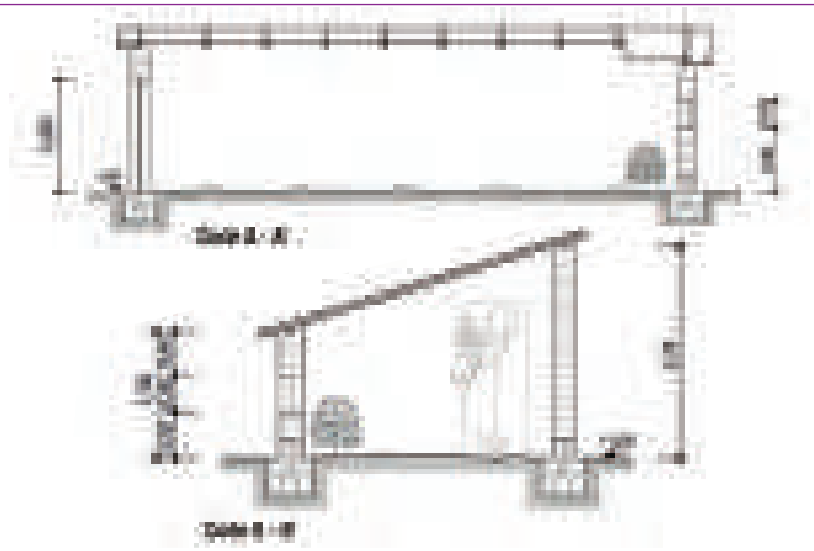
Fuente: Adaptado de Estrada, J. J. (2012).

Plano de planta



Fuente: Adaptado de Estrada, J. J. (2012).

Información propuesta y adaptada para fines educativos



Fuente: Adaptado de Estrada, J. J. (2012).

3. Tablas informativas

a. Precios de materiales de construcción de invernaderos

Material/concepto	Precio unitario (S/)	Unidad	Observaciones
Madera (postes, vigas)	10	por pieza	Postes y vigas de madera estándar
Tubos (PVC o metálicos)	12	por tubo (3 m)	Para estructura o arcos
Plástico polietileno	6	por m²	Cubierta del invernadero
Clavos y alambre	7	por kg	Fijación de estructura y cubierta
Puerta	25	por unidad	Marco y lámina
Ventana	15	por unidad	Marco y lámina
Sistema de riego	40	por kit básico	Mangueras, aspersores, conexiones
Mano de obra	35	por jornal	Trabajo de construcción
Otros accesorios	20	por lote	Bisagras, tornillos, herramientas

b. Características geográficas por regiones

Región natural del Perú	Altitud (m s. n. m.)	Temperatura promedio (°C)	Velocidad del viento (km/h)	Acceso al agua (litros/día por cultivo)	Condiciones relevantes
Costa	0 - 500	20 - 30	10 - 30	> 60	Alta radiación solar y poca lluvia; riego artificial necesario
Sierra	1500 - 4000	5 - 18	20 - 60	≥ 50	Heladas frecuentes, terreno inclinado, lluvias estacionales
Selva	200 - 800	22 - 30	10 - 25	≥ 70	Alta humedad, lluvia constante, riesgo de hongos

Información propuesta y adaptada para fines educativos

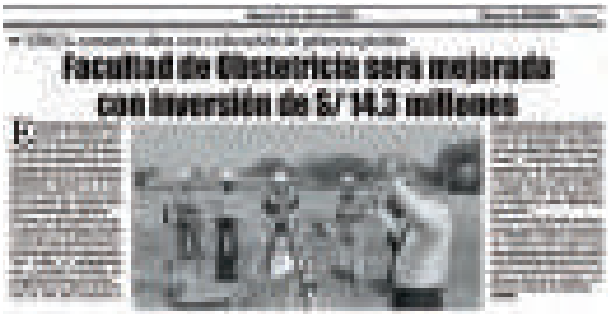
Exploramos



Dialoga y comparte tus aprendizajes previos con tus compañeros, a fin de resolver estos problemas.

1. El proyecto esperado

Observa la siguiente noticia:



Se sabe que la facultad destinará $\frac{5}{11}$ de la inversión total a la construcción de aulas, $\frac{4}{13}$ a laboratorios y $\frac{2}{11}$ a equipamiento (todas las fracciones representan partes de un mismo total).

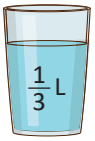
a. Se desea conocer la diferencia de inversión entre las aulas y los laboratorios en soles. Muestra el procedimiento y plantea una respuesta.

b. A partir de la situación se afirma: "Siempre que se restan dos fracciones heterogéneas, el resultado es mayor que uno". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Preparación de gelatinas

Doña Julieta ha preparado $3\frac{1}{4}$ litros de gelatina y usará dos tipos de vasos para llenarlos como se muestran:



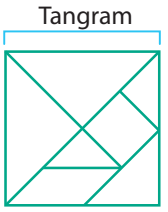
Pequeños	Medianos
	

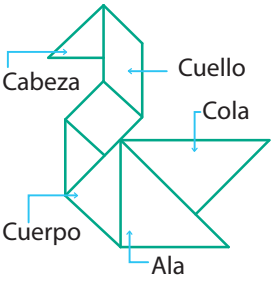
a. Su plan es llenar primero seis vasos medianos y, con el resto de gelatina, llenar la mayor cantidad posible de vasos pequeños. ¿Cuántos vasos pequeños podrá llenar con lo que queda?

b. Luego de considerar la situación, se afirma: "Al dividir una fracción entre otra fracción, siempre se obtiene una fracción menor que ambas fracciones". ¿Estás de acuerdo con lo que se afirma? Justifica tu respuesta con ejemplos.

3. Un cisne de fracciones

Antonella quiere armar un cuadro decorativo de la figura de un cisne con piezas del tangram. Completa la siguiente tabla, para ello, identifica la fracción del área total del tangram que representa cada pieza y responde las preguntas.





a. Para decorar su figura, Antonella decide pintar con témpera tres piezas del cuerpo del cisne: el ala, el cuello y la cola. ¿Qué fracción del cisne ha sido pintada? Justifica tu procedimiento.

b. ¿Qué fracción representa la cabeza del cisne respecto al área total? Justifica tu respuesta.

c. Antonella nota que el ala y la cabeza son triángulos, pero de distinto tamaño. Si el ala es un triángulo grande que mide $\frac{1}{4}$ y la cabeza, un triángulo pequeño que mide $\frac{1}{16}$, ¿cuántas veces el ala es más grande que la cabeza? Justifica tu respuesta.

N.º	Forma geométrica	Fracción del total
1	Triángulo pequeño	
2	Triángulo pequeño	
3	Cuadrado	
4	Romboide	
5	Triángulo grande	
6	Triángulo grande	
7	Triángulo mediano	

4. Viaje familiar

Alexis viaja de Huánuco a Lima en su camioneta con el tanque lleno y no recarga durante el viaje.



50 litros
Capacidad del tanque de gasolina

Además se sabe que en el primer día consume $\frac{2}{5}$ del total de litros; en el segundo día, $\frac{4}{6}$ del combustible restante después del día 1; y en el tercer día, $\frac{1}{2}$ de lo que quedó luego del segundo día.

a. Realiza las operaciones y completa los datos de la tabla.

Día	Cantidad inicial	Consumo	Resto
1	50 L		
2		20 L	
3			

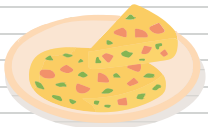
b. ¿Cuántos litros de combustible restan en el día 2 y qué fracción del total representa?

c. ¿Cuántos litros de combustible restan en el día 3 y qué fracción del total representa?

5. Entre pollos y salchichas

A continuación, se muestran dos recetarios de un restaurante de comida rápida.

Tortillas de salchicha
(receta para 4 tortillas)



- $\frac{2}{8}$ kg de huevos
- $\frac{2}{4}$ kg de tomate
- $\frac{1}{4}$ kg de espinaca
- $\frac{2}{3}$ taza pequeña de aceite
- $\frac{1}{2}$ kg de salchicha
- Sal al gusto

Tortillas de pollo
(receta para 4 tortillas)



- $\frac{1}{4}$ kg de huevos
- $\frac{1}{2}$ kg de tomate
- $\frac{1}{4}$ kg de espinaca
- $\frac{1}{6}$ taza pequeña de aceite
- $\frac{1}{8}$ kg de pollo
- Sal al gusto

a. Si se tiene un pedido de 20 tortillas de salchichas y 30 tortillas de pollo, ¿cuántos kilogramos de huevos, espinaca y tomate se necesitarán para prepararlas?

b. Un cocinero tiene $1\frac{3}{4}$ kg de tomates. ¿Podrá hacer tres tortillas completas de pollo? Justifica tu respuesta.

c. Se afirma lo siguiente: "Como $\frac{2}{8}$ y $\frac{1}{4}$ representan fracciones diferentes, la tortilla de salchicha requiere una mayor cantidad de huevos que la de pollo". ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.

1. La maleta de Miriam

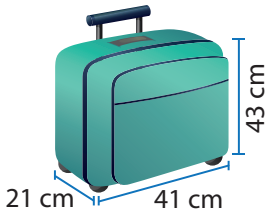
Miriam viaja constantemente y siempre lleva un equipo electrónico que ocupa 0,007 m^3, para lo cual desea comprar una maleta. La aerolínea establece que el volumen total permitido (maleta más equipo) no debe superar los 0,050 m^3.

Ella debe elegir entre los modelos A, B, C y D, cuyas dimensiones se muestran en centímetros.

Modelo A



Modelo B



Modelo C



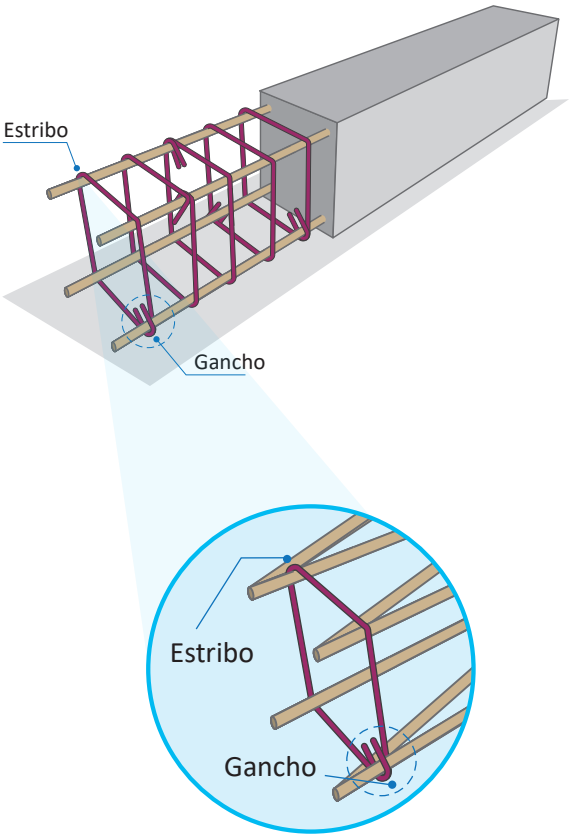
Modelo D



a. ¿Cuál o cuáles de los modelos recomendarías que compre Miriam para su viaje, si el volumen de la maleta y del equipo no debe exceder el límite permitido?

b. Se afirma: "Si al volumen total permitido y al volumen del equipo les restamos un mismo valor, el sentido de la desigualdad entre ellos cambia". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Varillas para los estribos



Un albañil necesita elaborar estribos rectangulares para una columna. Cada estribo rodea las varillas longitudinales y cumple lo siguiente:

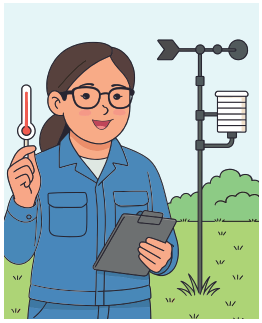
- El largo es el doble del ancho.
- El perímetro del rectángulo debe estar entre 65 cm y 68 cm, incluidos ambos valores.
- El ancho debe ser un número entero.
- Además, cada estribo lleva dos ganchos de 10 cm de longitud cada uno.

a. ¿Cuál es la máxima longitud de varilla que debe cortar el albañil para un estribo?

b. Un albañil afirma: "Como el perímetro del estribo está entre 65 cm y 68 cm, y ese perímetro es seis veces el ancho, se puede dividir todo entre – 6 y no pasa nada". ¿Estás de acuerdo?

3. De grado en grado

Una estación meteorológica registra las temperaturas de algunos días en Ica en grados Fahrenheit (°F) y en grados Celsius (°C).



Para convertir una cantidad de grados Fahrenheit a Celsius, usa la siguiente expresión:

$$°F = 1{,}8(°C) + 32$$

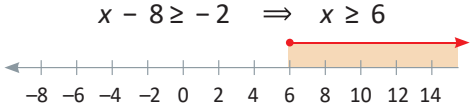
Completa la tabla para obtener las temperaturas registradas en ambas unidades.

Temperaturas registradas	Día 1	Día 2	Día 3	Día 4	Día 5
En °F	77			80,6	84,2
En °C		30	31		

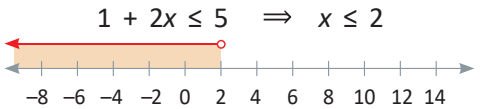
4. Desigualdades en acción

Observa la resolución de cada inecuación junto con la solución gráfica en la recta numérica.

$x - 8 \geq -2 \implies x \geq 6$



$1 + 2x \leq 5 \implies x \leq 2$

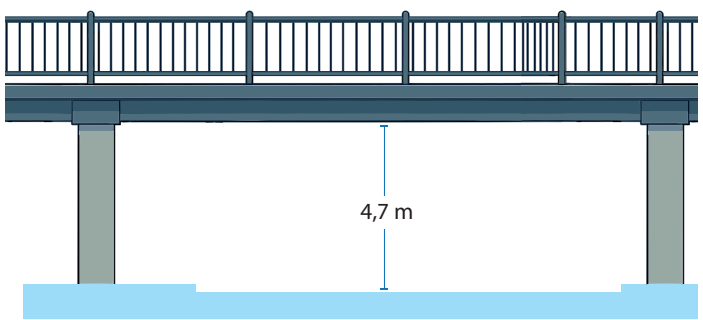


a. Verifica si el intervalo mostrado en la recta numérica coincide con el conjunto solución de la inecuación en cada caso; de no ser así, corrige y muestra el procedimiento.

b. En la afirmación: "Al realizar la adición o sustracción con el mismo número a ambos miembros de una inecuación, el sentido de la desigualdad no siempre se conserva". ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

5. Altura bajo control

A continuación, se presentan dos fuentes de información relacionadas con la altura máxima permitida en puentes peatonales y las dimensiones de un camión utilizado para transportar estructuras. La distancia de separación del puente y la altura máxima del transporte es 20 cm.





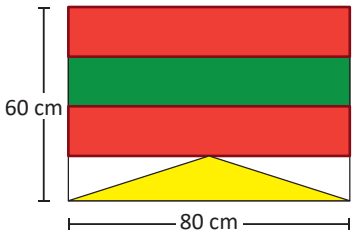
a. Si se desea transportar tres estructuras iguales, apiladas una sobre otra, ¿cuál es la altura máxima (cm) que puede tener cada una para no superar la altura máxima del puente? Considera el valor entero máximo posible.

b. ¿Qué expresión algebraica representa esta situación?

c. Se afirma lo siguiente: "Cuando se usa una inecuación en este contexto, cualquier valor de x que cumpla la inecuación representa una altura real posible". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

1. El mural escolar

En tu colegio se realizará un concurso de diseño de murales. Se propone un diseño rectangular, tal como se observa a continuación



El mural está compuesto por cuatro franjas horizontales iguales y un triángulo isósceles en la franja inferior. Dos franjas son rojas y una es verde.

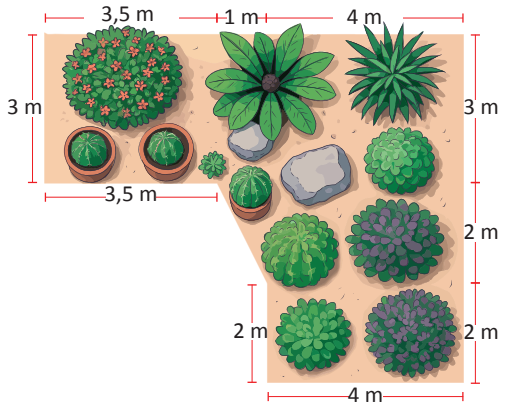
a. Para decorarlo, se necesita pegar cinta delgada en el contorno de cada franja roja. ¿Cómo estimarías la cantidad total de cinta?

b. ¿Cómo determinarías el área a pintar de cada color? Explica el procedimiento.

c. Se afirma: "Dos figuras con igual área siempre tienen igual perímetro". ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Argumenta tu respuesta con ejemplos.

2. Jardinería eficiente

Una diseñadora de interiores plantea el siguiente modelo de jardín para una vivienda:



Se sabe que este tipo de jardín necesita aproximadamente 8 litros de agua por metro cuadrado al día.

a. Representa el jardín empleando formas geométricas conocidas con el fin de calcular la superficie total. Plantea el procedimiento y la respuesta.

b. ¿Cómo representarías las partes del jardín en un plano bidimensional? Expresa qué datos necesitas y qué figuras geométricas usarías.

c. ¿Cuánta agua necesita el jardín cada día? Explica tu procedimiento.

3. Construcción de invernaderos para el huerto escolar

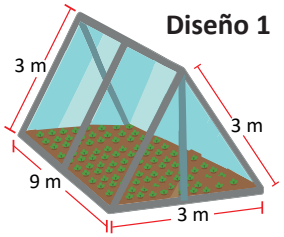
Un ingeniero agrónomo plantea dos diseños de invernadero para proteger sus plantas en la temporada de heladas. Observa los diseños 1 y 2, y sus medidas; además, el diseño 2 tiene dos caras semicirculares. (Considera $\pi = 3{,}14$).

a. Para cada diseño de invernadero se necesita cubrir el techo y las dos caras frontales con láminas de plástico. ¿En cuál de los dos requiere mayor cantidad de plástico?

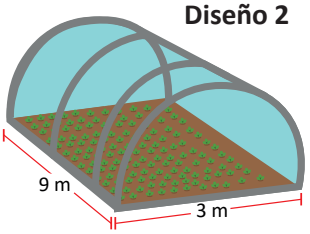
b. Si tuvieras que representar las láminas de plástico para cada invernadero en un plano, ¿qué datos necesitarías y qué figuras geométricas usarías? Muestra el diseño.

Nota: el piso no se cubre de plástico.

Diseño 1



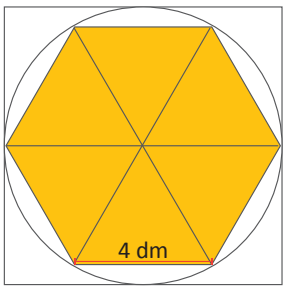
Diseño 2

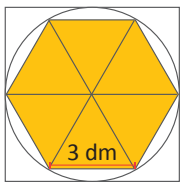


4. Pecera y decisiones en diseño

Un fabricante de peceras diseña bases hexagonales regulares compuestas por seis triángulos equiláteros. Cada hexágono está inscrito en una base circular y a su vez contenido en un marco cuadrado, como se muestra.

Completa los datos en la tabla. Para ello, calcula y compara medidas relacionadas con estos gráficos. (Considera π = 3,14).



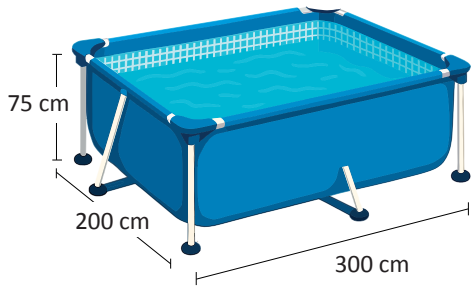




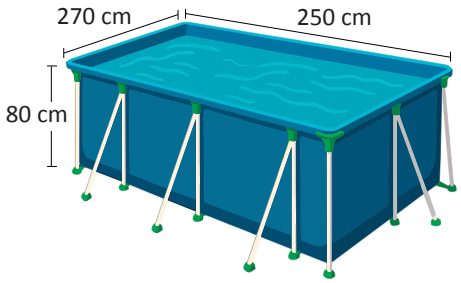
Medidas	Triángulos con 2 dm de lado	Triángulos con 3 dm de lado	Triángulos con 4 dm de lado
Diámetro del círculo		6 dm	
Perímetro del hexágono			24 dm
Perímetro del cuadrado	16 dm		
Longitud de la circunferencia		18,84 dm	

5. El desafío de las piscinas

A continuación, se muestra información sobre dos modelos de piscinas armables para niños.



Modelo A



Modelo B

a. Con 4 m³ de agua, ¿en qué modelo queda más alto el nivel? Justifica tu respuesta.

b. Considerando que ambas piscinas tienen la forma de prismas rectos y se llenan 10 cm por debajo del borde, ¿cuál de los modelos permite almacenar una mayor cantidad de agua? Justifica tu elección.

c. Se afirma: "Si se duplican las dimensiones de la base del modelo B, entonces el volumen también se duplica". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Desarrollamos



Interpreta situaciones, aplica procedimientos matemáticos, muestra resultados e ideas matemáticas, explica y fortalece lo aprendido.

Tu propósito de aprendizaje

Representa y argumenta datos en una situación empleando procedimientos de adición y sustracción de fracciones para establecer relaciones entre la parte y el total, y comunicar la composición y el resultado de las operaciones.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Practica un consumo responsable y sostenible de papel y materiales, prioriza la reducción de residuos y el aprovechamiento completo de los recursos.
- Expresa sus desacuerdos con evidencia y un tono respetuoso, y evita afectar la integridad de sus compañeros.

Pensamos y actuamos

Un grupo de estudiantes decide separar los residuos de su hogar para reutilizarlos o tratarlos adecuadamente. Para ello, usa una bolsa (que representa la unidad: 1) de separación con cuatro categorías: papel, plástico, vidrio y otros (orgánicos). Ellos emplean estrategias y realizan operaciones con fracciones para responder las siguientes actividades:



1. Completa la tabla e identifica el valor que falta para tener la unidad.

Separa así: papel $\frac{4}{10}$, plástico $\frac{3}{10}$, vidrio $\frac{1}{10}$.

Material	Fracción	Operación
Papel	$\frac{4}{10}$	$\frac{4}{10} + \frac{3}{10} + \frac{1}{10} + ¿? = 1$
Plástico	$\frac{3}{10}$	
Vidrio	$\frac{1}{10}$	
Orgánico		

2. Si se guarda el plástico recolectado en tres bolsas iguales, ¿qué fracción de la cantidad de plástico corresponde cada bolsa respecto al total de residuos recolectados?

Dato	Cálculo	Respuesta
Plástico total	$\frac{3}{10}$	
Por bolsa	$\frac{3}{10} \div 3 = \frac{3}{10} \times \frac{1}{3}$	$\frac{1}{10}$

3. Se usa $\frac{1}{10}$ de residuo orgánico de la bolsa para hacer compost. ¿Qué fracción de los residuos queda en la bolsa? Escribe una oración con tu respuesta.

Acción	Operación	Resultado
Lo que queda	$1 - \frac{1}{10} =$	

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, cuatro estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
La parte de residuo orgánico (dos décimos del total) es mayor que la parte de vidrio (un décimo) y menor que la parte de papel (cuatro décimos).	La cantidad de plástico más la cantidad de vidrio equivale a la mitad de la bolsa.

Estudiante 3	Estudiante 4
En la bolsa, el residuo orgánico equivale al doble de la porción de vidrio y la porción de plástico equivale al triple de la de vidrio.	La cantidad de papel (2/10) es menor que la cantidad de orgánico (3/10), pero si simplifico ambas fracciones, el resultado de papel es mayor.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre el total de la bolsa y la fracción de cada material, y representa la composición y los cambios usando operaciones con fracciones.
- Expresa la cantidad de cada material de reciclaje como una fracción del total y representa las operaciones de fracciones para indicar la composición de la bolsa.
- Emplea procedimientos de adición y sustracción con fracciones homogéneas para determinar la cantidad total o la cantidad restante.
- Justifica con ejemplos y contraejemplos la validez de procedimientos con fracciones y argumenta el significado de la fracción resultante como una parte del total.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Un compañero escribió $\frac{10}{20} + \frac{10}{40} = \frac{20}{60}$. ¿Qué está mal? Corrige y justifica tu respuesta.**
2. **¿Qué es mayor $\frac{3}{10}$ o $\frac{2}{5}$? Verifica mediante gráficos.**
3. **Para una jarra de jugo, donde la jarra completa es 1, el jugo de naranja ocupa $\frac{4}{10}$; el de piña, $\frac{3}{10}$; y el agua, $\frac{2}{10}$. A partir de la información anterior, responda las siguientes preguntas:**
   a. ¿Qué fracción queda para el azúcar si la receta total debe completar la jarra?
   b. Si se reduce el agua en $\frac{1}{10}$ y se aumenta el jugo de piña en $\frac{1}{10}$, ¿qué categoría pasa a ser mayor?
4. **Un terreno que representa una unidad (unidad = 1) se divide en 10 franjas iguales: la de lechuga corresponde a los $\frac{2}{10}$; la de zanahoria, $\frac{3}{10}$; la de beterraga, $\frac{1}{10}$; y queda libre el resto. A partir de la información anterior, responde las siguientes preguntas:**
   a. ¿Qué franja (fracción) del terreno está libre?
   b. Si la franja libre se divide en dos partes iguales, entre lechuga y beterraga, ¿cuáles son sus nuevas fracciones?

Tu propósito de aprendizaje

Representa datos referidos a áreas con ecuaciones cuadráticas empleando procedimientos algebraicos para establecer relaciones y hallar dimensiones, y comunicar la solución a un problema.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Refuerza la solidaridad y la responsabilidad al resolver problemas vinculados con el ambiente, comparte estrategias de solución y reflexiona sobre el uso adecuado de los recursos naturales.
- Realiza actividades colaborativas escuchando con empatía, intercambiando estrategias y valorando los progresos individuales y grupales.

Pensamos y actuamos



Carlos decide invertir sus ahorros en la compra de una casa. La casa tiene una superficie de forma cuadrada y cuenta con un jardín rectangular pegada a unos de los lados de de 30 m² para cultivar flores. En total, un terreno de 255 m², que incluye la casa y el jardín.

¿Cuáles son las dimensiones del terreno destinado a la casa y al jardín?

1. Responde.

a. ¿Cuál es el área del jardín? ¿Y cuál es el área de la superficie total que compró Carlos?

b. Rotula en el gráfico el área del jardín y el área de la casa.



c. Realiza las operaciones y completa los datos en la tabla.

Medida / Lugar	Largo	Ancho	Área
Jardín	2		30 m²
Casa			
Terreno			255 m²

2. Plantea una ecuación que relacione el área de la casa, el área del jardín y el área total del terreno. Completa el esquema considerando que el lado de la casa mide *x* metros.

Área de la casa + área del jardín = área total

_____ + _____ = _____

a. Observa cómo resolvió Carlos la ecuación planteada.

$x^2 + 30 = 255$

$x^2 = 255 - 30$

$x^2 = 225$

$x = \pm\sqrt{225}$

$x_1 = 15; \quad x_2 = -15$

Porque

$(15)(15) = 225$

$(-15)(-15) = 225$

Como x es una longitud, $x > 0$, entonces $x = 15$ m.

3. **Emplea un procedimiento similar para hallar las dimensiones de otras casas y jardines con las siguientes características:**

Terreno A	Casa cuadrada	Jardín de 70 m^2	Área total: 266 m^2
Terreno B	Casa rectangular • El largo es el doble del ancho	Jardín de 72 m^2	Área total: 360 m^2
Terreno C	Casa rectangular • El largo es el triple del ancho	Jardín de 108 m^2	Área total: 351 m^2

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Si existe una relación cuadrática entre dos variables, como el largo y el ancho de un terreno, la ecuación cuadrática se puede usar para encontrar el área total o el valor de una de las dimensiones.	Si una ecuación cuadrática da una solución negativa, siempre indica un error en el cálculo o en la interpretación del problema.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre cantidades y magnitudes (por ejemplo: dimensiones largo y ancho para hallar el área total de un terreno) al resolver problemas referidos a una ecuación cuadrática.
- Expresa la relación entre datos y valores desconocidos mediante ecuaciones cuadráticas y representa gráficamente la solución de la situación.
- Emplea procedimientos de despeje, radicación y factorización para hallar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas.
- Justifica la elección de la solución positiva como la única válida en el contexto del problema.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En un piso de la biblioteca se instalará una sala de lectura cuadrada y una pequeña cafetería de 30 m^2. El área total del piso es 286 m^2.**
   a. Plantea una ecuación para el lado x (cuyo valor está en metros) de la sala.
   b. Halla el valor de x.
2. **Un agricultor construirá un invernadero rectangular cuyo largo es el triple del ancho. Si el área debe ser 192 m^2, halla sus dimensiones.**
   a. Define el ancho x en metros y modela el área.
   b. Calcula el largo y ancho.
3. **En una feria, un *stand* incluye un almacén cuadrado de 27 m^2 y un cuarto rectangular cuyo ancho es 6 m mayor que su ancho *y*. El área total del *stand* es 54 m^2.**
   a. Escribe la ecuación que relaciona el ancho y con el área total.
   b. Calcula las dimensiones del cuarto.

Tu propósito de aprendizaje

Representa y argumenta las características de figuras compuestas empleando procedimientos de descomposición para establecer relaciones, calcular áreas y comunicar la solución del problema.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

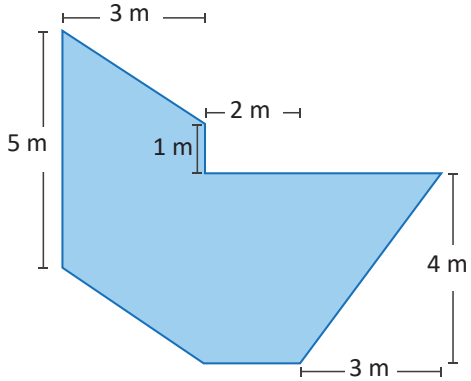


Practica valores

- Valora la resolución de problemas de la vida cotidiana mediante el uso de tablas, destacando soluciones que armonicen el bienestar de la comunidad con el cuidado del planeta.
- Reconoce la importancia de comparar resultados distintos y buscar puntos de encuentro, reconstruye argumentos sin descalificar y prioriza una convivencia justa.

Pensamos y actuamos

El Sr. Felipe desea cubrir con abono orgánico un jardín cuya forma se muestra en la siguiente figura. Se sabe que la cantidad recomendada es de 2 kg por metro cuadrado. ¿Cuántos kilogramos de abono se necesitan para el jardín?



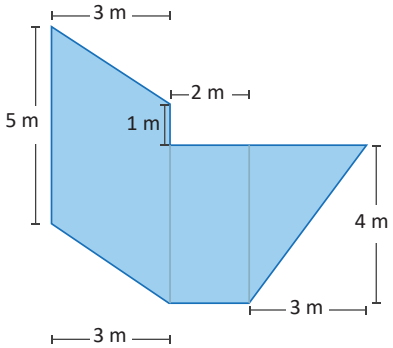
1. Responde.

a. ¿Qué forma tiene el terreno?

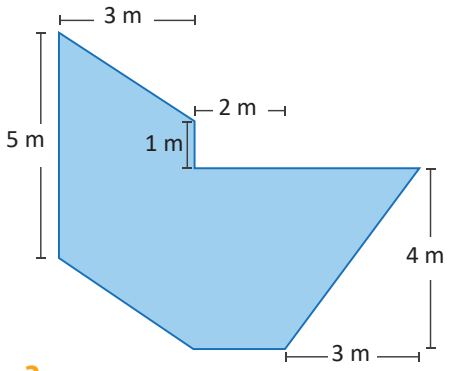
b. ¿Cómo podrías calcular su área?

c. ¿En qué polígonos conocidos se puede descomponer?

2. Observa cómo Nilda resolvió el problema.

Forma de Nilda	
	b. Calcula el área de cada uno y suma. $A_{paralelogramo} = 5 \times 3 = 15\ m^2$ $A_{rectángulo} = 2 \times 4 = 8\ m^2$ $A_{triángulo} = \frac{3 \times 4}{2} = 6\ m^2$ $A_T = 15\ m^2 + 8\ m^2 + 6\ m^2 = 29\ m^2$
a. Descompón la figura en tres polígonos: paralelogramo, rectángulo y triángulo.	c. Calcula la cantidad de abono requerido: $29 \times 2 = 58$ kg.

3. Plantea otra forma de descomponer la figura.



¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
El área total de una figura compuesta depende de cómo la descompongas; con distintas particiones puedes obtener áreas diferentes.	Para hallar el área de una figura compuesta, descomponla en figuras simples que no se superpongan (rectángulos, triángulos, paralelogramos, etc.) y suma sus áreas.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

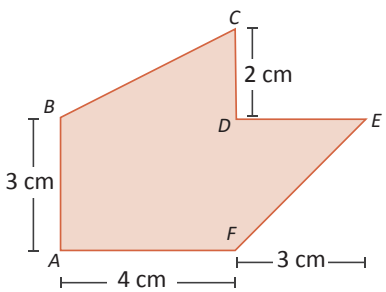
Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre las dimensiones de polígonos simples al resolver problemas que implican reconocer el área de una figura compuesta en contexto.
- Representa la figura compuesta descomponiéndola en polígonos conocidos (rectángulos, triángulos) para facilitar el cálculo del área.
- Emplea procedimientos de descomposición y cálculo del área de cada polígono simple, y determina el área total de la figura compuesta.
- Justifica la descomposición elegida, y argumenta con ejemplos y contraejemplos que el área total es independiente de la forma en que se descompone la figura.

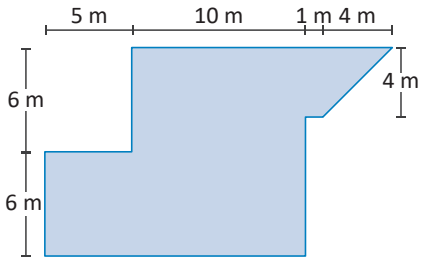
Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

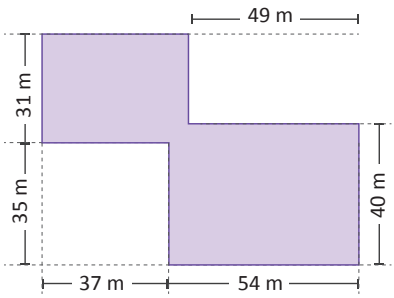
1. Determina el área de las siguientes figuras compuestas:



a.



b.



c.

Formalizamos



Comprende ejemplos y representaciones, y reflexiona en grupo para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

¿Sabías que...?

Las operaciones con números racionales permiten calcular consumos, emisiones y ahorros. Con sus propiedades, los estudiantes modelan impactos, planifican presupuestos y sustentan decisiones responsables frente al cambio climático.

Ten en cuenta

Las propiedades de la adición son las siguientes:

Propiedad de clausura

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{(ad+bc)}{bd}; b, d \neq 0$

Propiedad asociativa

$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right); b, d \text{ y } f \neq 0$

Propiedad conmutativa

$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}; b, d \neq 0$

Elemento neutro

$\frac{a}{b}+0=\frac{a}{b}; b \neq 0$

Inverso aditivo o elemento opuesto

$\frac{a}{b}+\left(\frac{-a}{b}\right)=0; b \neq 0$

Practica valores

- Incorpora ejemplos matemáticos comparando contextos ambientales y promoviendo decisiones en beneficio común.
- Registra acuerdos grupales con transparencia, asegura la participación y responsabilidad compartida.

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES Y PROPIEDADES

Adición y sustracción de números racionales

Situación: Venta de mandarinas



Rosa tenía 2,5 kg de mandarinas en una caja y 1,75 kg en otra. Ella vendió $\frac{3}{4}$ kg y luego 0,8 kg. ¿Cuántos kilos le quedan?

Tenía 2,5 kg + 1,75 kg = 4,25 kg

Convertimos la fracción a su expresión decimal: $\frac{3}{4}$ = 0,75 kg

- Venta: 0,75 kg + 0,8 kg = 1,55 kg
- Queda: 4,25 kg − 1,55 kg = 2,7 kg

Como se aprecia en el ejemplo anterior, la **adición** o **sustracción de fracciones heterogéneas** consiste en llevarlas a un denominador común (generalmente el m. c. m.) y luego operar los numeradores, pero conservando el mismo denominador.

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \pm \frac{bc}{bd} = \frac{ad \pm bc}{bd}, b; d \neq 0$$

Situación: Champú artesanal



Se tiene un envase con 2 L de base neutra para elaborar champú artesanal, y se hacen las siguientes extracciones:

- Primero se extraen $\frac{5}{6}$ L para mezclarlo con sábila.
- Luego se retiran $\frac{3}{8}$ L para combinarlo con aceite de romero.
- Finalmente se usan $\frac{7}{12}$ L para preparar la infusión de menta.

Para averiguar cuánto queda en el envase, Elvis realiza el siguiente procedimiento:

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=\frac{5+3+7}{6+8+12}=\frac{15}{26}; \Rightarrow 2-\frac{15}{26}=\frac{2\times 26}{26}-\frac{15}{26}=\frac{17}{26}$$

Quedan $\frac{17}{26}$ L de base neutra.

¿Estás de acuerdo con el procedimiento de Elvis? Justifica tu respuesta.

No, Elvis debió emplear un denominador común para sumar las fracciones, así m. c. m. (6; 8; 12) = 24.

$$\frac{5}{6}+\frac{3}{8}+\frac{7}{12}=\frac{4\times 5}{24}+\frac{3\times 3}{24}+\frac{2\times 7}{24}=\frac{20+9+14}{24}=\frac{43}{24} \Rightarrow 2-\frac{43}{24}=\frac{2\times 24}{24}-\frac{43}{24}=\frac{5}{24}$$

Por lo tanto, quedan $\frac{5}{24}$ L de base neutra.

Multiplicación de números racionales

Situación: Preparación de jugo



María prepara jugo de maracuyá para 6 personas. Cada botella contiene 0,75 L, y calcula que cada persona beberá $1\frac{1}{2}$ botellas. ¿Cuántos litros de jugo debe preparar en total?

Convertimos 0,75 a fracción.

$0{,}75 = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ L (capacidad por botella)

Una persona tomará $\frac{3}{4} \times 1\frac{1}{2} = \frac{3}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$ L

Para 6 personas, $\frac{9}{8} \times 6 = \frac{54}{8} = \frac{27}{4} = 6\frac{3}{4}$ L = 6,75 L.

Por lo tanto, debe preparar, en total, 7 litros, aproximadamente.

Como se aprecia en el ejemplo anterior, en la **multiplicación de fracciones**, el producto de dos fracciones se obtiene multiplicando numeradores y denominadores.

Dados $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, con $b \neq 0$ y $d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$

Considera que b y d son diferentes a cero.

Multiplicación de decimales. Para multiplicar números decimales, primero se multiplican como si fueran números enteros, luego se coloca la coma en el resultado contando de derecha a izquierda tantas cifras decimales como la suma de las cifras decimales de los factores.

Ejemplo

Factores: 2,85 (2 cifras decimales) × 4,7 (1 cifra decimal)

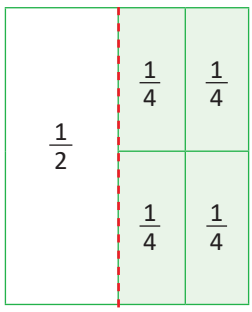
1995

1140

13,395 → Producto (3 cifras decimales)

Situación: Parte de un terreno

Ana, de la hectárea que tiene, dispone de 0,5 hectárea y destina $\frac{1}{4}$ de ese terreno al cultivo de hortalizas.



Ella calcula el área de las hortalizas usando la siguiente operación:

$0{,}5 \times \frac{1}{4} = 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}125$ ha

Ana afirma: "Al multiplicar dos números, el producto siempre debe ser mayor". Y en este caso, el resultado es menor que 0,5 ha. ¿Estás de acuerdo con Ana? Justifica tu respuesta.

Se observa que el terreno destinado a hortalizas corresponde a la cuarta parte de la mitad de una hectárea; es decir, a la octava parte del total.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$ ha = 0,125 ha, por lo tanto, la afirmación de Ana es incorrecta.

Ten en cuenta

Las propiedades de la multiplicación son las siguientes:

Propiedad de clausura

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; b y $d \neq 0$

Propiedad asociativa

$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$; b, d y $f \neq 0$

Propiedad conmutativa

$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$; b, y $d \neq 0$

Elemento neutro

$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$; $b \neq 0$

Inverso multiplicativo

$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$; a y $b \neq 0$

Propiedad distributiva

$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$; b, d y $f \neq 0$

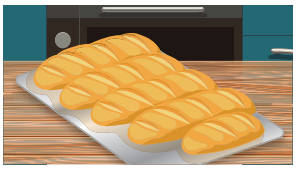
Reto matemático

Un agricultor tiene 0,8 ha para sembrar maíz, hortalizas y frutales. Él debe distribuir en fracciones distintas, proponer tres repartos y justificar cuál resulta más eficiente.

División de números racionales

Situación: Las barras de pan

Una panadera ha preparado cuatro barras y media de pan para repartirlas entre sus trabajadores. Cada trabajador debe recibir $\frac{3}{4}$ de barra como ración diaria. ¿Para cuántos trabajadores le alcanzará?



Primero, la cantidad de pan que se prepara es $4\frac{1}{2}$ barras de pan. Como es fracción mixta, la convertimos en fracción: $\frac{9}{4}$ barras de pan.

Ahora dividimos la cantidad total de pan entre la ración por trabajador.

$$\frac{9}{2} \div \frac{3}{4} = \frac{9}{2} \times \frac{4}{3} = \frac{36}{6} = 6$$

Por lo tanto, la cantidad de pan alcanzará para seis trabajadores.

El problema resuelto ilustra que la **división de dos fracciones** se resuelve multiplicando el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor. En general.

Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, con $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$, entonces $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$

División de decimales

Para dividir decimales se pueden

Forma 1.

Convertir en fracciones y dividir, como fracción, $7{,}245 \div 0{,}3 = \frac{7245}{1000} \div \frac{3}{10}$

Forma 2.

Multiplicar el dividendo y divisor por una potencia de 10 hasta eliminar los decimales del divisor, y luego dividir como números naturales. En el cociente obtenido, colocar la coma decimal para tantas cifras decimales como quedaron en el dividendo $\frac{7{,}245}{0{,}3} \times \frac{10}{10} = \frac{72{,}45}{3} = 24{,}15$

Ten en cuenta

Si $\frac{a}{b}$ es un número racional diferente de cero, entonces su inverso multiplicativo es $\frac{b}{a}$ y el producto de ambos es 1.

Situación: Resolución en forma ordenada

José planteó la siguiente solución para la operación: $3\frac{1}{5} \div \frac{12}{5} \times \frac{-25}{8}$

Solución: $\frac{16}{5} \div \frac{12}{5} \times \frac{-25}{8} = \frac{16}{5} \times \frac{12}{5} \times \frac{25}{8}$

$$= \frac{\cancel{16} \times 12 \times \cancel{25}}{\cancel{5} \times 5 \times \cancel{8}} = 2 \times 12 = 24$$

¿Es correcta la solución? Justifica tu respuesta.

Observamos que José, al cambiar la división por multiplicación, no invirtió los términos de la fracción $\frac{12}{5}$ y se olvidó del signo negativo de la fracción $\frac{28}{5}$.

La solución, entonces, sería así

$$\frac{16}{5} \div \frac{12}{5} \times \frac{-25}{8} = \frac{16}{5} \times \frac{5}{12} \times \frac{-25}{8}$$

Simplificamos

$$= \frac{\cancel{16} \times \cancel{5} \times (-25)}{\cancel{5} \times 12 \times \cancel{8}} = \frac{\cancel{2} \times (-25)}{\cancel{12}} = -\frac{25}{6}$$

Por lo tanto, la respuesta correcta es $-\frac{25}{6}$, y no la solución que planteó José.

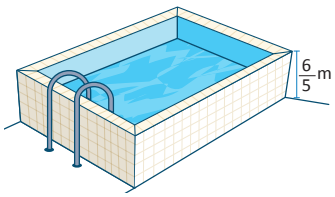
Reto matemático

Un huerto de 2,4 hectáreas dividido en parcelas de 0,3 hectárea produce ocho parcelas. ¿Es correcta la solución? Justifica tu respuesta.

Potenciación de números racionales con exponente positivo

Situación: Tamaño de una piscina

En un polideportivo se instala una piscina cúbica pequeña para niños. Cada lado mide $\frac{6}{5}$ metros. ¿Cuál es el volumen de la piscina?



El volumen de cualquier prisma rectangular (incluido el cubo) se calcula como V = área de la base × altura

Área de la base

- La base es un cuadrado de lado $\frac{6}{5}$ m.
- Área base = lado × lado = $\left(\frac{6}{5}\right)\times\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{36}{25}$ m²

Multiplicar por la altura

- Como es un cubo, la altura también mide $\frac{6}{5}$ m.
- $V = \left(\frac{6}{5}\right)\times\left(\frac{6}{5}\right)\times\left(\frac{6}{5}\right) = \frac{216}{125}$ m³ = 1,728 m³

Resultado numérico

- $V = \left(\frac{6}{5}\right)^3$ = 1,728 m³
- El volumen de la piscina es 1,728 m³.

De acuerdo con lo analizado, **potenciar** una fracción consiste en multiplicar esa fracción por sí misma un número determinado de veces. El exponente indica cuántas veces la fracción (base) debe multiplicarse por sí misma.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b}\times\frac{a}{b}\times\ldots\times\frac{a}{b}}_{n \text{ factores}};\ b\neq 0;\ n\in\mathbb{N}$$

Producto de potencias de bases iguales

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\times\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n};\quad b\neq 0$$

Cociente de potencias de bases iguales

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m\div\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{\left(\frac{a}{b}\right)^m}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n};\quad b\neq 0$$

Situación: Solución esperada

La profesora plantea lo siguiente a sus estudiantes y pide que presenten su solución: $\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3$.

Cinthya propone su solución: $\left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^{2\times 3} = \left(\frac{3}{4}\right)^6 = \frac{3^6}{4^6} = \frac{729}{4096}$

¿Estás de acuerdo con la solución propuesta? Justifica tu respuesta.

En la solución se observa que, al ser las bases iguales, los exponentes deben sumarse, y Cinthya los ha multiplicado.

Entonces planteamos la resolución

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)$; $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)$

$\therefore \left(\frac{3}{4}\right)^2\times\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right)\times\left(\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{3}{4}\right)^5 = \frac{3^5}{4^5} = \frac{243}{1024}$

Recuerda

La potenciación se opera de la siguiente manera:

$$b^n = \underbrace{b\times b\times b\ldots b}_{n \text{ veces}}$$

Ejemplo:

$5^3 = 5\times 5\times 5 = 125$

$(-3)^4 = (-3)(-3)(-3)(-3) = 81$

$x^m\cdot x^n = x^{m+n}$

Ejemplo:

$2^6\times 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10} = 1024$

$3^{-5}\times 3^6\times 3^3 = 3^{-5+6+3} = 3^4 = 81$

$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Ejemplo:

$\frac{x^8}{x^3} = x^{8-3} = x^5$

$\frac{8^8}{8^6} = x^{8-6} = 8^2 = 64$

Reto matemático

Al elevar una fracción propia como $\frac{3}{2}$ a una potencia, ¿el resultado es mayor o menor que la base?, ¿por qué?

Recuerda

La **potencia** de un producto o un cociente se distribuye a cada factor, lo que facilita la simplificación y el manejo de expresiones algebraicas con exponentes.

$(xy)^n = x^n \cdot y^n$

Ejemplo:

- $(35)^6 = (7 \times 5)^6 = 7^6 \times 5^6$

$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$ $\quad y \neq 0$

Ejemplos:

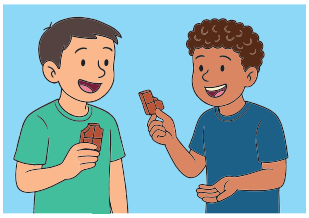
- $\left(\frac{x}{3}\right)^4 = \frac{x^4}{3^4} = \frac{x^4}{81}$
- $\frac{18^7}{9^7} = \left(\frac{18}{9}\right)^7 = (2)^7 = 128$

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones operacionales (adición, sustracción, multiplicación o división) entre cantidades y magnitudes al resolver problemas con números racionales.
- Representa las operaciones entre cantidades y magnitudes.
- Emplea procedimientos y propiedades de la potenciación de números racionales entre decimales y fracciones, y obtiene el resultado de las operaciones.
- Justifica con ejemplos y contraejemplos la aplicación de propiedades de la potenciación al resolver un problema.

Propiedades de la potenciación de números racionales

Situación: Chocolate para todos



Imagina que tienes una barra de chocolate entera (la unidad). Cada día, primero comes $\frac{3}{5}$ de lo que queda, y después tu amigo se come $\frac{1}{2}$ de lo que queda después de ti. ¿Cómo se puede describir la cantidad que queda después de tres días sin tener que multiplicar paso a paso cada vez?

Luego de la porción que tú comes: $1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}$

Después que tu amigo se come la mitad de lo que quedaba: $\frac{2}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}$

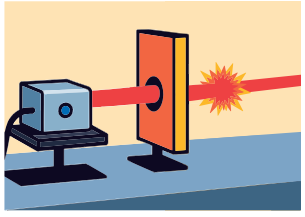
Entonces cada día queda $\frac{1}{5}$ de la cantidad anterior.

Por lo tanto, después de tres días queda $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1^3}{5^3} = \frac{1}{125}$ del chocolate inicial.

El problema resuelto ilustra que la potencia de un producto de fracciones consiste en elevar cada fracción a la misma potencia por separado, y luego se multiplican los resultados.	$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{c}{d}\right)^n$
Cuando una fracción ya está elevada a un exponente y volvemos a elevar ese resultado, el nuevo exponente multiplica al anterior.	$\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n}$

$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, con $b, d \neq 0$ y m, n enteros positivos.

Situación: Un desafío matemático



En un laboratorio, un rayo láser multiplica su intensidad por $\frac{3}{2}$ cada vez que atraviesa un filtro, lo cual se repite exactamente 2^3 veces. ¿Cuántas veces mayor será la intensidad al final del experimento? Se plantea lo siguiente:

$$\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^{2 \times 3} = \left(\frac{3}{2}\right)^6 = \frac{3^6}{2^6} = \frac{729}{64}$$

¿Estás de acuerdo con la resolución planteada? Justifica tu respuesta.

En la resolución se observa que se trata de un exponente de exponente, y los exponentes deben desarrollarse como potencia. Lo planteado lo multiplica, lo cual es incorrecto en este caso.

Entonces planteamos su resolución correcta.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{3^8}{2^8} = \frac{6561}{256}$$

INECUACIONES LINEALES

Inecuaciones lineales con una incógnita de las formas $ax \pm b < 0; ax \pm b > 0; ax \pm b \leq 0; ax \pm b \geq 0; a \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$

Situación: Ahorro para la excursión



Alejandra participará en una excursión que cuesta S/180. Ella ahorra S/10 cada semana y hasta el momento tiene S/40. ¿Cuántas semanas, como mínimo, necesita seguir ahorrando para completar el costo total?

Organizamos la información.

Semana	Monto inicial (S/)	Ahorro (S/)	Monto ahorrado (S/)
1	40	10	40 + 10
2	40	20	40 + 20
⋮	⋮	⋮	⋮
x	40	10(x)	40 + 10(x)

Entonces el costo del viaje es S/180.

Luego, escribimos una relación de desigualdad que cumpla la condición "como mínimo".

$$40 + 10x \geq 180$$

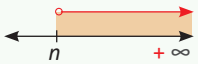
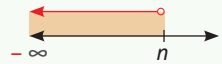
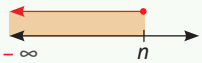
$$10x \geq 140 \implies x \geq 14$$

Entonces los valores de x serían 14; 15; 16; 17; ... El mínimo valor sería 14 semanas.

Luego de revisar la situación anterior recordemos que una **inecuación lineal** es una desigualdad algebraica que se puede reducir a una de las formas siguientes:

$ax + b < 0$; $ax + b \leq 0$; $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$, donde $a \neq 0$

El conjunto solución de una inecuación se representa de la forma

Solución	Lectura	Intervalo	Representación en la recta
$x > n$	Números mayores que n	$]n; \infty[$	
$x < n$	Números menores que n	$]-\infty; n[$	
$x \geq n$	Números mayores o iguales que n	$[n; \infty[$	
$x \leq n$	Números menores o iguales que n	$]-\infty; n]$	

Situación: El concurso



Rubén necesita, al menos, 76 puntos para clasificar. Ya tiene 58 y gana 3 puntos por reto. Él plantea una inecuación para averiguar cuántos retos debe superar.

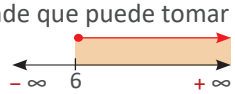
$58 + 3x < 76 \implies x < 6$



¿Estás de acuerdo con la resolución de Rubén? Justifica.

Del enunciado, se entiende que puede tomar a partir de ese valor a más, es decir,

$58 + 3x \geq 76 \implies x \geq 6$



x representa retos completos, por lo que el mínimo es 6.

Rúben debe resolver al menos seis retos.

¿Sabías que...?

Las inecuaciones lineales permiten modelar límites sostenibles en consumo, emisiones y temperatura. Delimitan regiones factibles, comparan escenarios y orientan decisiones responsables en ciencia, economía y ciudadanía para un desarrollo sostenible.

Ten en cuenta

La **solución de una inecuación** es el valor de la incógnita que verifica la desigualdad.

El **conjunto solución (C. S.)** está conformado por todas las soluciones de la inecuación.

Ejemplo:

$$2x + 4 \leq 14$$

$$2x \leq 10$$

$$x \leq 5$$

Las soluciones de x son los valores menores o igual a 5.

$x = 5; 4; 3; 2; \ldots$

El conjunto solución es

C. S. = $]-\infty; 5]$

Practica valores

- Coordina con tu equipo para priorizar metas comunes y promover el crecimiento colectivo, y celebra con generosidad los progresos alcanzados.
- Adapta al aula formas de organización comunitaria, e impulsa decisiones consensuadas y la rotación equitativa de roles.

Recuerda

Las propiedades de las inecuaciones son las siguientes:

Propiedad aditiva de la desigualdad

Si $x \le y$, entonces $x \pm a \le y \pm a$

Ejemplo: $2 < x \implies 6 < x + 4$

Propiedad multiplicativa de la desigualdad con número positivo

Si $a \le b$ y $k > 0$, entonces $a \cdot k \le b \cdot k$

Ejemplo: $x \le 7 \implies 3x \le 21$

Propiedad multiplicativa de la desigualdad con número negativo

Si $a \le b$ y $h < 0$, entonces $a \cdot h \ge b \cdot h$

Ejemplo: $12 \le -2x \implies -6 \ge x$

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de desigualdad al resolver problemas con inecuaciones lineales para determinar el valor mínimo o máximo de la incógnita.
- Representa enunciados verbales como inecuaciones lineales utilizando notación de desigualdad, de intervalos y su representación gráfica en la recta numérica.
- Emplea propiedades aditivas y multiplicativas de las desigualdades.
- Justifica por qué el sentido de la desigualdad se invierte al multiplicar o dividir por un número negativo.

Propiedades de las inecuaciones



Situación: Desarrollo de dos inecuaciones

La profesora Victoria pide al estudiante analizar la resolución de dos inecuaciones y emitir un comentario crítico sobre los procedimientos realizados.

1. Inecuación lineal con coeficiente principal positivo ($ax + b \ge c$)

Al resolver la inecuación $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x + 1 \ge 8$, se obtuvo $[16{,}8; +\infty[$ como conjunto solución. ¿Qué propiedades crees que se aplicaron para llegar a esa respuesta?

Resolvemos: $\frac{2}{3}x - \frac{1}{4}x + 1 \ge 8$

$12\left(\frac{2}{3}x\right) - 12\left(\frac{1}{4}x\right) + 12(1) \ge 12(8)$ (Propiedad multiplicativa de la desigualdad)

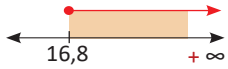
$8x - 3x + 12 \ge 96$

$5x + 12 \ge 96$

$5x + 12 - 12 \ge 96 - 12$ (Propiedad aditiva de la desigualdad) $\implies 5x \ge 84$

$5x \cdot \frac{1}{5} \ge 84 \cdot \frac{1}{5} \implies \frac{5x}{5} \ge \frac{84}{5}$ (Propiedad multiplicativa de la desigualdad)

$\implies x \ge 16{,}8$



Luego, C. S. = $[16{,}8; +\infty[$

2. Inecuación lineal con coeficiente principal negativo

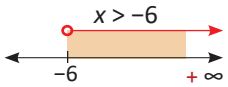
Al resolver la inecuación $-\frac{1}{3}x + 3 < 5$, se obtuvo $[-6; +\infty[$ como C. S. ¿Qué propiedades se aplicaron para llegar a esa respuesta?

Resolvemos $-\frac{1}{3}x + 3 < 5$

$-\frac{1}{3}x + 3 - 3 < 5 - 3$ (Propiedad aditiva de la desigualdad) $\implies -\frac{1}{3}x < 2$

$(-1)\left(\frac{1}{3}x\right) < 2\,(-1)$ (Propiedad multiplicativa de la desigualdad) $\implies \frac{1}{3}x > -2$

Cambio del sentido de la desigualdad $3\left(\frac{1}{3}x\right) > 3\,(-2)$ (Propiedad multiplicativa de la desigualdad)



Luego, C. S. = $]-6; +\infty[$

El estudiante menciona que tanto en la primera como en la segunda resolución de las inecuaciones se utilizaron las propiedades aditivas y multiplicativas.

Tras el análisis, para resolver una inecuación lineal se aplican las siguientes propiedades:

Propiedad aditiva. Se puede sumar o restar la misma cantidad en ambos lados de la desigualdad para agrupar los términos con x.

Propiedad multiplicativa

- Al multiplicar o dividir por un número positivo, la desigualdad no cambia de sentido.
- Si se multiplica o divide por un número negativo, el sentido de la desigualdad se invierte (conviene hacerlo para que el coeficiente de x sea positivo).

Finalmente, se despeja x y se representa la solución en llaves, intervalo o recta numérica.

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Ecuación cuadrática

Situación: Construcción de un jardín

Mary desea construir un jardín cuadrado con una vereda de 1 metro alrededor, para ello, dispone en total de 64 m², como se observa en la imagen. ¿Cuál debe ser la longitud de cada lado del jardín sin contar la vereda?



Sea x la longitud del lado del jardín. Al construir a su alrededor una vereda de 1 metro, cada lado del cuadrado aumenta en 2 metros.



Por lo tanto, el lado total será $(x + 2)$. El área total se expresa como $(x + 2)(x + 2) = 64$.

Desarrollo $(x + 2)^2 = 64$

$x + 2 = \pm 8$

La experiencia anterior permite reconocer los siguientes casos:

Caso 1

$x + 2 = 8 \Longrightarrow x = 6$

Solución

La longitud del lado del jardín, sin contar la vereda, es de 6 metros.

Caso 2

$x + 2 = -8 \Longrightarrow x = -10$

No tiene validez en el contexto porque $x > 0$ por ser longitud.

De lo observado en la situación inicial, concluimos que una **ecuación cuadrática**, o de segundo grado, con una incógnita tiene la forma general

$ax^2 + bx + c = 0$, donde $a; b; c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$

Los términos de una ecuación cuadrática son

• ax^2: término cuadrático • bx: término lineal • c: término independiente

Los dos tipos de ecuaciones cuadráticas son las siguientes:

Tipos	Concepto	Ejemplo
Incompletas	Se denomina así cuando a la ecuación cuadrática le falta el término lineal, el independiente o los dos.	• Cuando falta el término lineal $6x^2 - 72 = 0$ • Cuando falta el término independiente $x^2 - 3x = 0$
Completas	Se denomina así cuando a la ecuación cuadrática no le falta ningún término.	$-x^2 + 9x - 18 = 0$ $5x^2 - 14x + 8 = 0$

¿Sabías que...?

Las ecuaciones cuadráticas modelan trayectorias y áreas, estiman captación de agua, optimizan materiales y energía. Permiten comparar escenarios y justificar decisiones sostenibles en ciencia, producción responsable y ciudadanía climáticamente consciente.

Ten en cuenta

Estas también son formas de ecuación cuadrática

$x^2 - 2x = 3$

$(x - 2)^2 = 9$

$x^2 + 4x = 32$

Toda ecuación cuadrática tiene 2 raíces, pero no siempre dos soluciones.

Ejemplo:

• $x^2 - 3x + 2 = 0$

Raíces: $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

C. S. = {1; 2}

Tiene dos raíces o soluciones

• $x^2 - 4x + 4 = 0$

Raíces: $x_1 = 2$; $x_2 = 2$

C. S. = {2}

Tiene una raíz doble o una solución.

Practica valores

- Usa lenguaje respetuoso al señalar inconsistencias, y te enfocas en evidencias y mejoras posibles.
- Cuida instrumentos de medición y material común, lo cual prolongará su vida útil para otras generaciones de estudiantes.

Ten en cuenta

En la ecuación $9x^2 = 3x$ puedes simplificar los números en ambos miembros, pero no la variable

$9x^2 = 3x \Longrightarrow 3x^2 = x$ (correcto)

$9x^2 = 3x \Longrightarrow 3x = 1$ (incorrecto)

Porque si cancelas una x, estarías eliminando una solución.

Recuerda

Propiedad del producto nulo

Si $a \cdot b = 0$,

entonces

$a = 0 \ \text{V} \ b = 0$

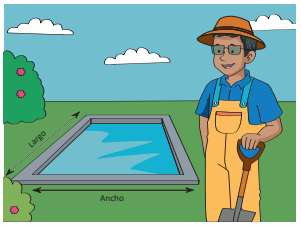
Evalúa tus progresos

- Establece relaciones (por ejemplo: entre dimensiones, magnitudes, área y costo total) al resolver problemas que involucran ecuaciones cuadráticas.
- Representa gráficamente la situación planteada.
- Emplea procedimientos de despeje, radicación y factorización para hallar las soluciones de ecuaciones cuadráticas (completas e incompletas).
- Justifica la elección de la solución positiva como la única válida para representar una solución en una situación, y argumenta con ejemplos y contraejemplos la validez del procedimiento de resolución.

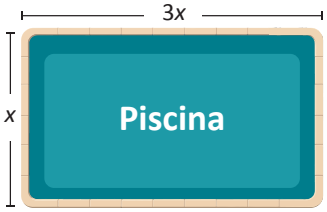
Ecuaciones cuadráticas incompletas de las formas $ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$

Situación: Diseño de una piscina

Antonio quiere diseñar una piscina rectangular con un área de 12 m². El largo de la piscina debe ser el triple del ancho. ¿Cuáles son las dimensiones de la piscina?



Grafiquemos la piscina con las condiciones del enunciado.



$A_{\text{rectángulo}} = \text{largo} \times \text{ancho}$

$(3x)(x) = 12$

$3x^2 = 12$

$x^2 = 4$

$x = \pm\sqrt{4}$

$x_1 = 2 \quad x_2 = -2$

- Sabemos que el área de una región rectangular se calcula como el producto de sus dimensiones.
- Como x es una longitud, entonces $x = 2$. Así tenemos que las dimensiones son largo = 6 m; ancho = 2 m.

El análisis previo nos muestra que para **resolver una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$)**, se despeja la incógnita y se extrae la raíz cuadrada de ambos miembros.

$$ax^2 + c = 0 \Longrightarrow x^2 = -\frac{c}{a} \Longrightarrow x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}, \text{ donde } -\frac{c}{a} \geq 0$$

$$\therefore \text{C. S.} = \left\{-\sqrt{-\frac{c}{a}}; \sqrt{\frac{c}{a}}\right\}$$

Situación: Empresa de camionetas

Una empresa renta camionetas. El costo fijo es $4x^2 - 5x + 10$ y el cargo adicional $5(3x + 2)$, además ambos montos son iguales. Si se paga el mismo monto por ambos conceptos, ¿cuántas horas de uso x corresponden?

- Lo primero que realizaremos es despejar la expresión para igualar a cero.

$4x^2 - 5x + 10 = 5(3x + 2)$

$4x^2 - 5x + 10 = 15x + 10$

$4x^2 - 5x + 10 - 15x - 10 = 0$

$4x^2 - 20x = 0$

$4x(x - 5) = 0$

- Ahora, como es un producto, luego de igualar a cero, tenemos

$4x = 0 \ \text{v} \ x - 5 = 0 \Longrightarrow \text{C. S.} = \{0; 5\}$

El conjunto solución de la ecuación está formado por el 0 y el 5. Por lo tanto, corresponde 5 horas de uso.

El análisis anterior nos muestra que para **resolver una ecuación de la forma** $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$), se extrae el factor común x, que forma un producto igual a cero. $ax^2 + bx = 0 \Longrightarrow x(ax + b) = 0$

El producto es cero cuando cualquiera de sus factores es cero (propiedad del producto nulo) $x(ax + b) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \text{V} \quad ax + b = 0$

$$x = 0 \quad \text{V} \quad x = -\frac{b}{a}$$

$$\therefore \text{C. S.} = \left\{0; -\frac{a}{b}\right\}$$

FORMAS BIDIMENSIONALES

Clasificación de triángulos

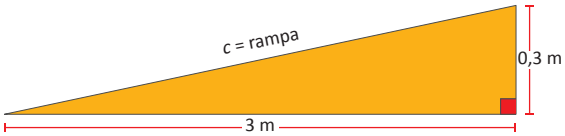
Situación: La rampa del hospital



Se quiere construir una rampa accesible para las personas en sillas de ruedas. El diseño indica que la rampa debe formar un triángulo rectángulo de 0,3 m de altura (desnivel) y 3 m de base (piso). ¿Cuánto mide la rampa (lado inclinado)?

Identificamos el triángulo.

La rampa y el piso forman un triángulo rectángulo con hipotenusa igual a la rampa (lado inclinado), y cuyo catetos son la base (piso) y el desnivel (altura).



Medimos los lados

cateto 1 (base) = 3 m

cateto 2 (desnivel) = 0,3 m

Hipotenusa (rampa) es el valor que debemos calcular.

Aplicamos el teorema de Pitágoras.

$c = \sqrt{(\text{cateto 1})^2 + (\text{cateto 2})^2}$

$c = \sqrt{(3)^2 + (0{,}3)^2}$

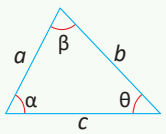
$c = \sqrt{9 + 0{,}09}$

$c = \sqrt{9{,}09} = 3{,}01$

Por lo tanto, la rampa mide aproximadamente 3,01 m.

Como se aprecia en el ejemplo anterior, se reconoce un tipo de triángulo. Los triángulos se clasifican en lo siguiente:

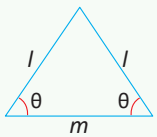
- **Escaleno**



Sus lados son diferentes.

Además:
$a \neq \beta$; $a \neq \theta$; $\beta \neq \theta$

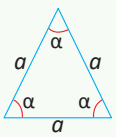
- **Isósceles**



Solo tiene dos lados iguales.

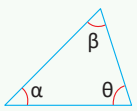
m: base
$m \neq l$
θ es agudo
$0 < \theta < 90°$

- **Equilátero**



Sus tres lados son congruentes (a) y sus ángulos internos 60°.
$\alpha = 60°$

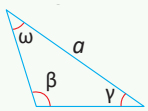
- **Acutángulo**



La medida de cada uno de sus ángulos internos es menor de 90°.

$0° < \alpha < 90°$
$0° < \beta < 90°$
$0° < \theta < 90°$

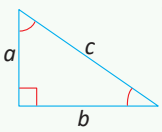
- **Obtusángulo**



La medida de uno de sus ángulos internos es mayor de 90°.

$90° < \beta < 180°$
$\omega + \Upsilon < 90°$
a: lado mayor

- **Rectángulo**



Tiene un ángulo de 90°.

Catetos: a, b
Hipotenusa: c

$a^2 + b^2 = c^2$

¿Sabías que...?

Las formas geométricas planas permiten diseñar estructuras ecológicas eficientes que optimizan materiales y energía solar, la cual favorece decisiones constructivas sostenibles frente al cambio climático.

Ten en cuenta

Clasificación de los triángulos

Clasificación	Subtipos y sus propiedades
Según sus lados	**Equilátero:** tres lados congruentes y tres ángulos congruentes de 60°.
	Isósceles: dos lados congruentes; ángulos de la base congruentes.
	Escaleno: tiene todos los lados y todos los ángulos de medidas distintas.
Según sus ángulos	**Acutángulo:** tres ángulos agudos (menores de 90°).
	Rectángulo: un ángulo recto (exactamente 90°).
	Obtusángulo: un ángulo obtuso (mayor de 90°).

Practica valores

- Reconoce la autoría de ideas, cita fuentes y agradece aportes; fortalece la responsabilidad compartida.
- Resuelve problemas cotidianos con tablas, propón soluciones que equilibren el bienestar comunitario y el cuidado del planeta.

Ten en cuenta

Tipos de cuadrilátero:

Paralelogramos

Características principales	Subtipos y sus propiedades
Tienen dos pares de lados paralelos; lados y ángulos opuestos iguales; las diagonales se bisecan.	**Romboide:** lados opuestos iguales; ángulos opuestos iguales (dos agudos y dos obtusos). **Rectángulo:** lados opuestos iguales; cuatro ángulos rectos. **Cuadrado:** cuatro lados iguales; cuatro ángulos rectos; único cuadrilátero regular. **Rombo:** cuatro lados iguales; ángulos opuestos iguales; diagonales perpendiculares.

Trapecios

Características principales	Subtipos y sus propiedades
Tienen solo un par de lados paralelos (las bases).	**Trapecio rectángulo:** dos ángulos rectos. **Trapecio isósceles:** los lados no paralelos son iguales en longitud y los ángulos de cada base son iguales. Las diagonales son de igual longitud. **Trapecio escaleno:** todos sus lados y ángulos son desiguales.

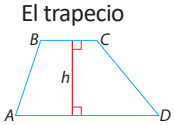
Trapezoides

Características principales	Subtipos y sus propiedades
No tienen ningún par de lados paralelos.	**Trapezoide simétrico:** cuadrilátero sin lados paralelos, pero con un eje de simetría. **Trapezoide asimétrico:** cuadrilátero sin lados paralelos ni simetría; todos sus lados y ángulos son distintos.

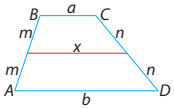
Recuerda

El trapecio tiene bases, altura, base media y diagonales.

El trapecio



Bases: $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$
$\overline{BC} \parallel \overline{AD}$
Altura: h
Laterales: $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$

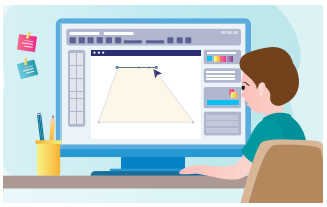


Base media

$$x = \frac{a+b}{2}$$

Clasificación de cuadriláteros

Situación: Diseño de un cartel publicitario



Un diseñador gráfico crea un cartel en forma de cuadrilátero con las siguientes características:

- Dos lados opuestos son paralelos, los otros no.
- Los ángulos adyacentes no son congruentes.
- Las diagonales no se bisecan ni son perpendiculares.
- Ningún lado mide lo mismo.

Claudia afirma: "Con las características brindadas del cuadrilátero, el cartel tiene la forma de un trapecio". ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

Analicemos la información:

- El cartel solo tiene un par de lados opuestos paralelos, entonces es un posible trapecio.
- El cartel no tiene ningún ángulo ni lado congruente, entonces se descarta que sea un trapecio isósceles.
- Sus diagonales no son congruentes ni perpendiculares, entonces se decartan los casos especiales.

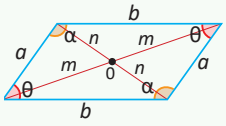
Por lo tanto, estamos de acuerdo con Claudia porque el cartel tiene forma de trapecio escaleno (sin lados ni ángulos congruentes).

Como se aprecia en el ejemplo previo, los cuadriláteros se clasifican en paralelogramos, trapecios y trapezoides.

Paralelogramos

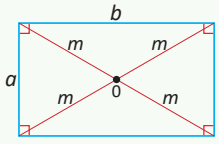
Ambos pares de lados opuestos son paralelos

- **Romboide**



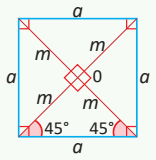
$a \neq b$
α y $\theta \neq 90°$
$\alpha + \theta = 180°$
O: centro del romboide

- **Rectángulo**



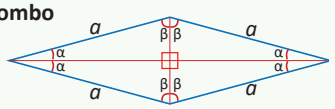
$a \neq b$
O: centro del rectángulo
Diagonales congruentes

- **Cuadrado**



Lados congruentes y ángulos de 90°
Diagonales congruentes y perpendiculares

- **Rombo**

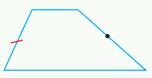


Diagonales perpendiculares y lados congruentes

Trapecios

Solo un par de lados paralelos opuestos son opuestos en paralelo

- **Trapecio escaleno**



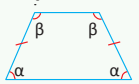
No tiene ángulos congruentes ni ángulos rectos

- **Trapecio rectángulo**



Tiene dos ángulos de 90° grados

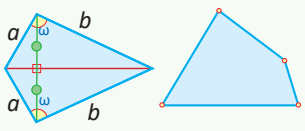
- **Trapecio isósceles**



Lados no paralelos congruentes

Trapezoides

Ningún par de lados opuestos es paralelo



Rectas y puntos notables en el triángulo

Situación: El vitral triangular

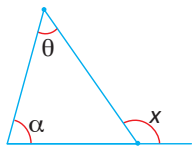
El arquitecto debe diseñar un vitral triangular equilibrado y resistente. ¿Cómo podrá ubicar los puntos que le den simetría y funcionalidad?

Con medianas hallamos el baricentro (equilibrio). Con alturas hallamos el ortocentro (refuerzos). Con bisectrices hallamos el incentro (adorno circular) y con mediatrices el circuncentro (aro metálico).



Recuerda

La suma de dos ángulos internos es igual al ángulo externo no adyacente.

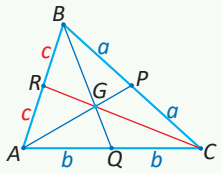


$x = \alpha + \theta$

El problema resuelto ilustra lo siguiente:

Mediana. Es el segmento que une el punto medio de un lado con el vértice opuesto; las tres medianas concurren en el baricentro (*G*), centro de gravedad del triángulo.

Triángulo escaleno

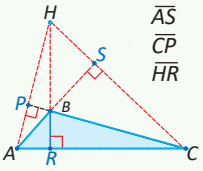


Segmento

$\overline{AP}$
$\overline{CR}$
$\overline{BQ}$

Altura. Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice al lado opuesto o a su prolongación; las tres alturas concurren en el ortocentro (*H*), cuya ubicación depende del tipo de triángulo.

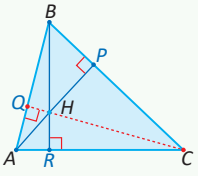
Triángulo obtusángulo



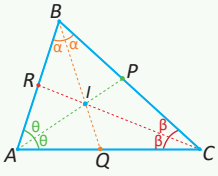
Altura

$\overline{AS}$ $\overline{AP}$
$\overline{CP}$ $\overline{CQ}$
$\overline{HR}$ $\overline{BR}$

Triángulo acutángulo



Bisectriz interior. Es el segmento que divide un ángulo interno en dos partes iguales; las tres bisectrices internas concurren en el incentro (*I*), centro de la circunferencia inscrita.

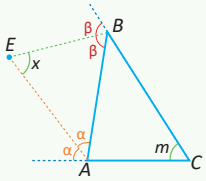


Bisectrices internos

$\overline{AP}$
$\overline{CR}$
$\overline{BQ}$

Bisectriz exterior. Es el segmento que divide un ángulo externo en dos partes iguales; junto con la prolongación de una bisectriz interna concurren en el excentro (*E*), centro de una circunferencia exinscrita.

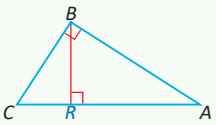
Teorema



E: excentro

$x = 90° - \frac{m}{2}$

Triángulo rectángulo

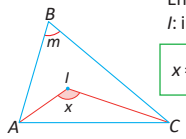


B: ortocentro de *ABC*

Ten en cuenta

Se presentan los siguientes teoremas:

Teorema



En el ΔABC
I: incentro

$x = 90° + \frac{m}{2}$

TIC

Reto matemático

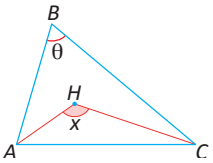
¿En qué tipo de triángulo coinciden el incentro y el ortocentro? Fundamenta tu respuesta con una explicación y una ilustración gráfica.

Ten en cuenta

A continuación se presentan los siguientes teoremas:

Teorema 1

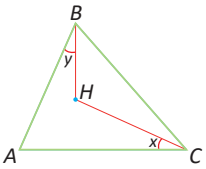
- Si H es ortocentro



$\Longrightarrow x + \theta = 180$

Teorema 2

- Si H es ortocentro



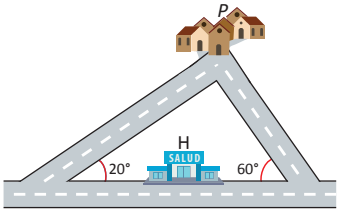
$\Longrightarrow x = y$

Evalúa tus progresos

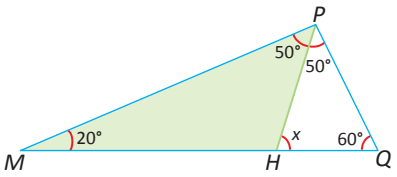
- Establece relaciones entre las propiedades que definen una figura y sus ángulos internos, y resuelve problemas modelando la situación con formas bidimensionales.
- Expresa y representa las propiedades de triángulos y cuadriláteros (lados, ángulos y elementos notables) utilizando lenguaje geométrico.
- Emplea construcciones de alturas, medianas y bisectrices para hallar puntos notables (como ortocentro y baricentro) y ángulos desconocidos.
- Justifica la clasificación de las figuras a partir de sus propiedades, y argumenta con ejemplos y contraejemplos la validez del uso de relaciones angulares para resolver el problema.

Situación: Camino al hospital

Un arquitecto tiene el plano de la ubicación de un pueblo (P) y del hospital (H). El camino para ir del pueblo al hospital representa la bisectriz interior del triángulo mostrado. Según ello, podemos concluir que la medida del menor ángulo formado por ese camino y C es 70°. ¿Cuál sería el procedimiento para justificar la afirmación?



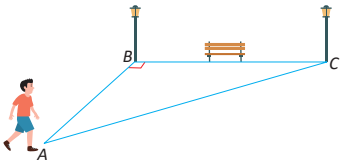
Procedemos a graficar las condiciones del ejercicio.



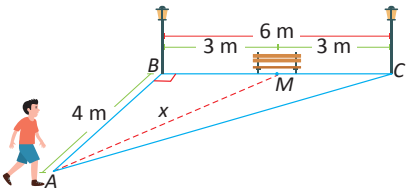
- Como $\overline{PH}$ es bisectriz interior
  $m\angle MPH = m\angle HPQ = 50°$
  En el ΔMPH, por teorema del ángulo exterior,
  $x = 20° + 50°$
  $\Longrightarrow x = 70°$
  Con ello validamos la conclusión.

Situación: El descanso

Edgar se encuentra en un parque de forma triangular rectangular, como se muestra en la imagen. Se tienen dos postes en B y C, y en el medio una banca (M). Si $\overline{AB}$ = 4 m y $\overline{BC}$ = 6 m, ¿cuántos metros camina Edgar, que se encuentra en A, para ir en línea recta y sentarse?



Procedemos a graficar las condiciones del ejercicio.



Con $\overline{BM} = \overline{MC}$, entonces $\overline{AM}$ es mediana.
En el ΔABM usamos el teorema de Pitágoras

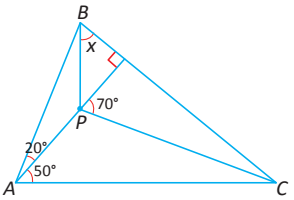
$$x^2 = 3^2 + 4^2$$
$$x^2 = 25$$
$$x = \pm 5 \Longrightarrow x = 5$$

Por lo tanto, la distancia que caminará es 5 m.

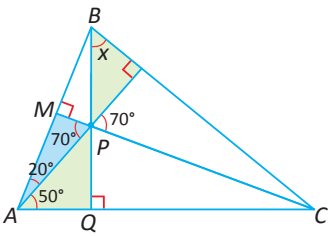
Situación: El reto del profesor

El profesor presenta el siguiente ejercicio para que los estudiantes calculen el valor angular de x. Un estudiante afirma que, luego de haberlo resuelto, el punto P es ortocentro, luego el valor de x es 50°.

¿Estas de acuerdo con lo planteado por el estudiante?



Usamos el teorema $x + 90° = 50° + 90°$.



- Como nos piden calcular x, prolongamos CP hasta M, así $m\angle MPA = 70°$.
- Entonces tenemos que $m\angle PMA = 90°$.
  Así afirmamos que P es el ortocentro del ΔABC.
- Como P es ortocentro, prolongamos BP hasta Q.

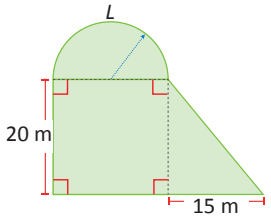
Así se concluye que x es igual a 50°, de ahí que se afirma lo planteado por el estudiante.

MEDIDAS DE FORMAS BIDIMENSIONALES

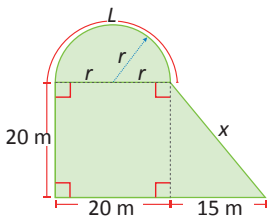
Perímetro de formas bidimensionales compuestas

Situación: El diseño de un parque

Los estudiantes del tercer grado diseñan las formas de los jardines para los parques. El diseño elegido está dado por las regiones que muestra la figura. ¿Cómo podrías calcular el perímetro del jardín si está compuesto por distintas figuras geométricas?



Del gráfico, tenemos los siguiente:



Para conocer el perímetro de la región sombreada (*RS*), sabemos que

$P_{RS} = 20 + L + x + 15 + 20 = 55 + L + x$

- Para calcular x usamos el teorema de Pitágoras

  $x^2 = 20^2 + 15^2$

  $x^2 = 400 + 225 = 625$

  $\Longrightarrow x = 25$ m

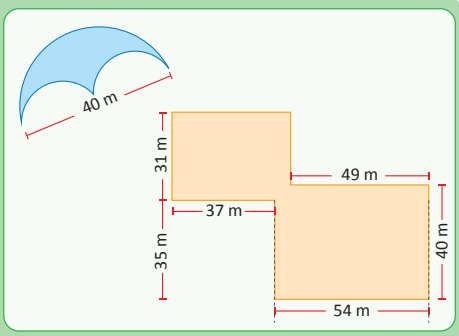
- Calculamos L.

  $L = \pi \cdot 10 = 10\pi$

  Así, $P_{RS} = 55 + 10\pi + 25$

  $\therefore P_{RS} = (80 + 10\pi)$ m

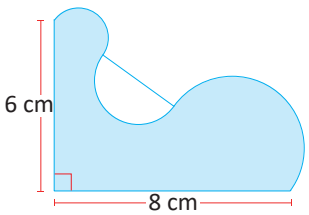
A partir de lo trabajado, podemos afirmar que una **figura compuesta** surge al unir formas geométricas, como rectángulos, triángulos o semicircunferencias, para crear diseños complejos. Su perímetro es la suma de los lados rectos y arcos que delimitan el contorno, y así recorre toda la frontera externa de la figura.



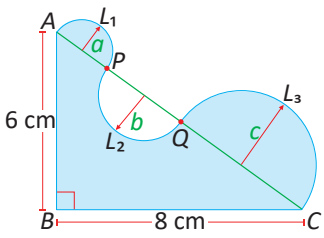
Situación: Diseño de figuras

Almendra es arquitecta, ella realiza un diseño y quiere calcular el perímetro de la región sombreada, además sabe que las curvas son semicircunferencias. Después de sus cálculos, ella obtiene el valor de $(14 + 5\pi)$ cm.

¿Estás de acuerdo con la afirmación de Almendra? Justifica tu respuesta.



Para medir el perímetro de esa región procedemos a calcular las dimensiones faltantes.



El perímetro sería

$P_{RS} = 6 + 8 + L_1 + L_2 + L_3$

$\Longrightarrow P = (14 + L_1 + L_2 + L_3)$ cm

- Sabemos que $L_1 = \pi \cdot a$; $L_2 = \pi \cdot b$; $L_3 = \pi \cdot c$

  Entonces $L_1 + L_2 + L_3 = \pi\,(a + b + c)$

- En ABC usamos el teorema de Pitágoras

  $(\overline{AC})^2 = 6^2 + 8^2$

  $(\overline{AC})^2 = 36 + 64 = 100$

  $\Longrightarrow \overline{AC} = 10$ cm

- Del gráfico,

  $10 = 2(a + b + c)$

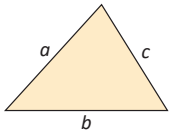
  $a + b + c = 5$

  $P_{RS} = (14 + 5\pi)$ cm

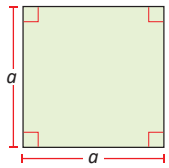
Así afirmamos lo dicho por Almendra.

Recuerda

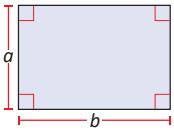
El perímetro de toda región se simboliza con *P*, y es igual a la longitud de la línea que limita la región.



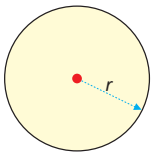
$P = a + b + c$



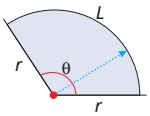
$P = 4a$



$P = 2a + 2b$



$L = 2\pi r$



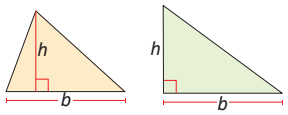
$P = 2r + L$ $\quad L = \theta r$

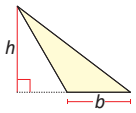
Practica valores

- Modela situaciones cotidianas mediante tablas, y destaca soluciones que equilibren el bienestar de la comunidad y el cuidado del planeta.
- Cuando alguien comete un error, ofrece tiempo para revisar el razonamiento y brinda apoyo solidario hasta comprender los pasos del procedimiento.

Recuerda

El **área de una región triangular** se calcula como el semiproducto entre la longitud de un lado y la longitud de su altura relativa.

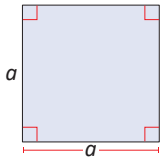




Área de la región triangular A:

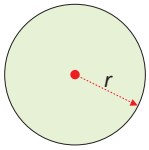
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

El **área de una región cuadrada** se calcula como la longitud del lado, elevado al cuadrado.



$$A = a^2$$

El **área de una región circular** se calcula multiplicando π por radio al cuadrado.



$$A_{\circ} = \pi r^2$$

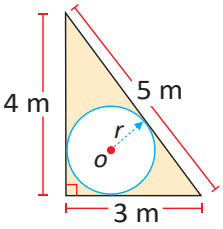
Evalúa tus progresos

- Representa la figura en partes identificando los elementos.
- Utiliza procedimientos para el cálculo de áreas parciales y totales.
- Justifica los procedimientos utilizados para el cálculo de áreas y perímetros, a partir de propiedades geométricas.

Áreas de formas bidimensionales compuestas

Situación: El césped para mi jardín

Andrés quiere calcular el espacio que ocupará el césped para su jardín representado por la región sombreada. Él sabe que $r = 1$ m. ¿Cuánto sería el área ocupada por el césped si $\pi = 3{,}14$?



Observamos que para calcular el área que ocupará el césped tenemos que hacer una sustracción

$$A_{(\text{césped})} = A_{(\text{reg. triang.})} - A_{(\text{círculo})}$$

$$A_{(\text{césped})} = \frac{(4 \cdot 3)}{2} - \pi\,(1)^2$$

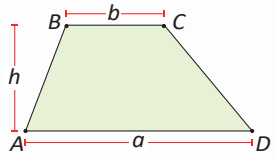
$$A_{(\text{césped})} = 6 - \pi = 6 - 3{,}14 = 2{,}86$$

Así el área del césped es igual a 2,86 m^2.

La experiencia anterior permite reconocer lo siguiente:

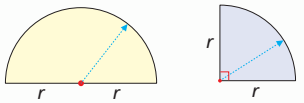
Área de una región trapezoidal

$ABCD$ es un trapecio de bases $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$



$$A_{\triangle ABC} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \cdot (h)$$

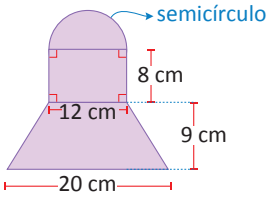
Área de una región semicircular y de cuarto de círculo



$$A_{\frown} = \frac{\pi \cdot r^2}{2} \qquad A_{\triangle} = \frac{\pi \cdot r^2}{4}$$

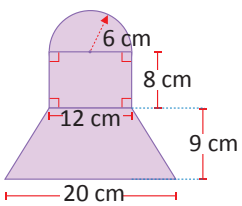
Situación: El cálculo del área

Un estudiante, luego de calcular el área de la región mostrada, obtuvo 296,52 cm^2; él consideró el valor de $\pi = 3{,}14$. ¿Estás de acuerdo con la afirmación del estudiante? Justifica tu respuesta.



Identificamos que el area total es la suma de tres figuras geométricas: trapecio, rectángulo y semicírculo

$$A_{\text{total}} = A_{\text{trapecio}} + A_{\text{rectángulo}} + A_{\text{semicírculo}}$$



Luego, hallamos el área de cada una de estas figuras y las sumamos para obtener el área total de la forma compuesta.

$$A_{\text{total}} = \frac{(20+12) \cdot 9}{2} + (12 \cdot 8) + \frac{(\pi \cdot 6^2)}{2}$$

$$A_{\text{total}} = \frac{(32) \cdot 9}{2} + (96) + \frac{113{,}04}{2}$$

$$A_{\text{total}} = 144 + 96 + 56{,}52$$

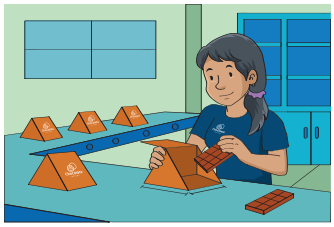
$$A_{\text{total}} = 296{,}52 \text{ cm}^2$$

Por lo tanto, concluimos que lo afirmado por el estudiante es correcto.

FORMAS TRIDIMENSIONALES

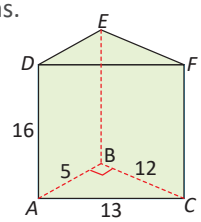
Prismas rectos regulares e irregulares

Situación: Caja para chocolates

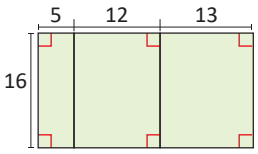


Una empresa diseña una caja prismática triangular para chocolates. Su base es un triángulo rectángulo con catetos de 5 cm y 12 cm, y altura de 16 cm. Se requiere calcular el área lateral total para cubrirla con papel decorativo.

Lo primero es observar que la base es una región triangular rectangular, calculemos $\overline{AC}$ con Pitágoras.



$5^2 + 12^2 = (\overline{AC})^2 \Longrightarrow \overline{AC} = 13$

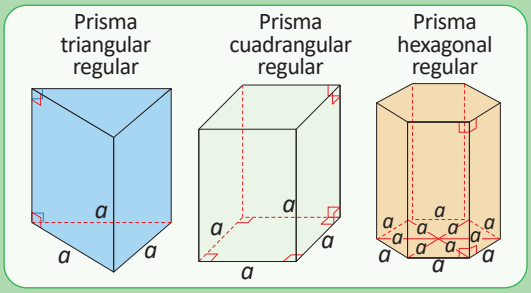


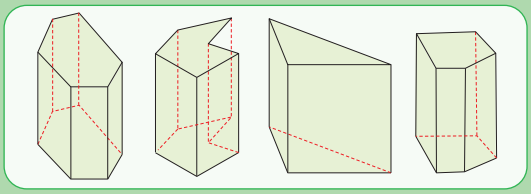
$A_L = 16 \times 30$

$A_L = 480\ cm^2$

El problema resuelto ilustra que

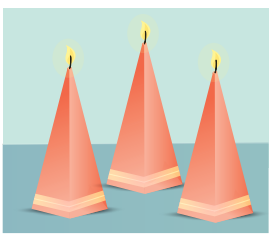
- El **prisma regular** es aquel tipo de prisma recto cuyas bases son regiones poligonales regulares y rectangulares congruentes.
- El **prisma irregular** es aquel prisma recto cuya base es un polígono que no tiene todos sus lados y ángulos iguales.



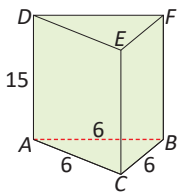


Situación: Envoltura de una caja

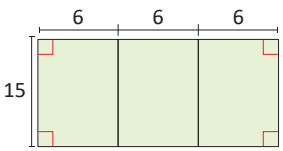
Una fábrica diseña velas en forma de prisma triangular regular con lados de base 6 cm y altura 15 cm. ¿Cuál es el área lateral total necesaria para cubrirlas con cera decorativa?



Graficamos el prisma considerando que es regular, entonces la base es equilátera.



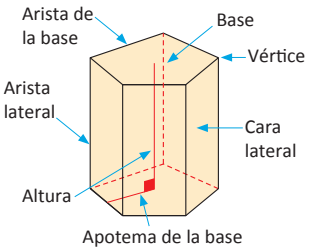
- Para calcular el área de la superficie lateral, desarrollamos la superficie.



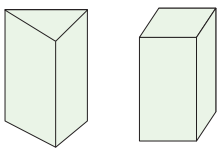
Por lo tanto, se requiere 270 cm^2 de cera decorativa.

Recuerda

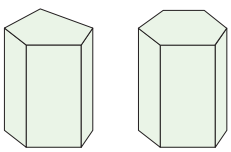
El **prisma recto** es un sólido geométrico limitado por dos regiones poligonales paralelas y congruentes, denominadas bases; y otras regiones que son rectangulares, denominadas caras laterales.



El **prisma** se nombra de acuerdo con la forma de su base.



Prisma triangular — Prisma cuadrangular



Prisma pentagonal — Prisma hexagonal

Practica valores

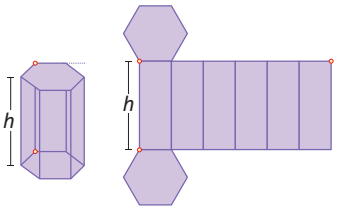
- Resuelve problemas con tablas; equilibra bienes, cuidado ambiental, compara resultados y reconstruye argumentos con respeto y justicia.

¿Sabías que...?

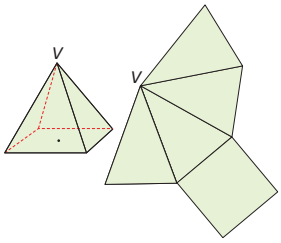
Las formas tridimensionales permiten modelar tanques, silos o invernaderos para calcular volúmenes y superficies; optimizar materiales; almacenar agua y sustentar decisiones sostenibles en ciencia, tecnología y ciudadanía responsable.

Recuerda

El desarrollo plano de un prisma



El desarrollo plano de una pirámide



Reto matemático

¿Puede un prisma tener todas sus caras laterales congruentes y no ser regular? Justifica tu respuesta.

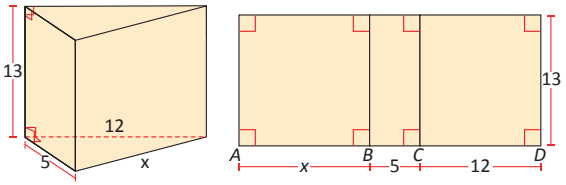
MEDIDAS DE FORMAS TRIDIMENSIONALES
Prisma recto: área lateral y total

Situación: La caja de aretes



Marlen tiene una caja de aretes cuyas dimensiones se muestran en la imagen. Su hermana desea utilizar la caja para un proyecto y necesita calcular el área de la superficie lateral. Para ello, corta la caja a lo largo de una arista lateral y extiende sus caras laterales en un plano, sin incluir las bases. ¿Cuál es el área lateral resultante?

- Para calcular el área (A), debemos hacer el corte.



- Para calcular x usamos el teorema de Pitágoras

$x^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169 \implies x = 13$ cm

- Nos damos cuenta de que la superficie es una región rectangular, entonces

$A = 13 \cdot (13 + 5 + 12)$

$A = 13(30) = 390$ cm^2

El área de la superficie es 390 cm^2.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar lo siguiente:

Área lateral (A_L)

El área lateral de todo prisma recto se calcula sumando las áreas de todas las caras laterales o multiplicando el perímetro de la base por la altura del prisma.

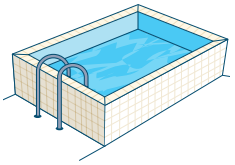
$$A_L = (P_{base})(h)$$

Área total (A_T)

El área total de todo prisma es igual a la suma del área lateral con las áreas de las dos bases.

$$A_T = A_L + 2A_{base}$$

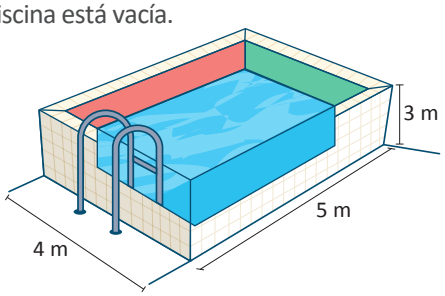
Situación: Caras de la piscina



Cecilia tiene una piscina en forma de prisma recto cuyo fondo tiene la forma de región rectangular y una altura de 3 m. Sabiendo que las dimensiones del fondo miden 5 m y 4 m, su hija menciona que el área de la superficie interior de la piscina es 94 m^2.

¿Compartes la respuesta de la hija? ¿Dónde crees que está su error? Justifica tu respuesta.

Lo primero que debemos saber es que no se debe calcular el área superior, ya que la piscina está vacía.



El área de la piscina sería A

$A = 2(3 \times 5) + 2(3 \times 4) + 4 \times 5$

$A = 30 + 24 + 20$

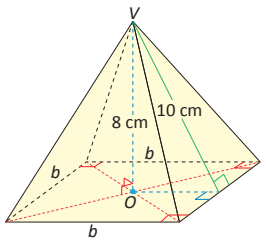
$A = 74$ m^2

Así el área de la superficie de la piscina es 74 m^2.

Pirámide regular: área lateral y total

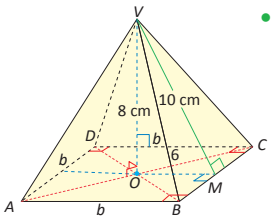
Situación: Vela piramidal

El profesor presenta al aula una vela en forma de pirámide y les menciona: "La base tiene forma cuadrada, la altura mide 8 cm, y las caras laterales son iguales y tienen una altura de 10 cm, la cual se trazó del vértice". Les pregunta: "¿Cómo calcularíamos el área de las caras laterales?".



Como las caras laterales son iguales, entonces tiene la misma área, por ello, es suficiente calcular el área de una cara y multiplicar por 4.

Procedemos a encontrar las longitudes necesarias para calcular esa área.



- En $\triangle VOM$ usamos el teorema de Pitágoras

$10^2 = 8^2 + (\overline{OM})^2$

$100 - 64 = (\overline{OM})^2$

$\Longrightarrow \overline{OM} = 6$

Así $\overline{AD} = \overline{DC} = 12$.

$\overline{AB} = \overline{BC} = 12$.

- $A_{(\text{cara lateral})} = 4\left(\frac{12 \cdot 10}{2}\right)$

$\Longrightarrow A_{(\text{cara lateral})} = 240\ \text{cm}^2$

Por lo tanto, tenemos que el área de la superficie lateral de la vela es 240 cm^2.

La resolución de la situación previa evidencia lo siguiente:

Área lateral (A_L)

El área lateral de toda pirámide regular es igual al semiperímetro de la base multiplicado por la apotema lateral, así obtenemos

$$A_L = \left(\frac{p_{\text{base}}}{2}\right) \times (\text{apotema lateral})$$

Área total (A_T)

El área total de toda pirámide regular es igual a la suma del área lateral con el área de la base.

$$A_T = A_L + A_{\text{base}}$$

Situación: Reto en el aula

En la sesión de Matemática, el profesor plantea calcular el área total de una pirámide triangular regular con base 6 m y apotema lateral $2\sqrt{3}$ m. Carlos afirma que basta multiplicar por cuatro el área de una cara. Sin embargo, la pirámide solo posee tres caras laterales. Justifica tu respuesta.

Primero debemos recordar que las caras laterales son tres y son congruentes; la base es distinta a ellas, entonces el análisis de Carlos está errado.

Sabemos que

$S_T = S_L + S_{\text{base}}$

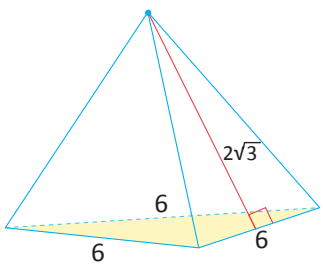
Reemplazamos

$S_T = \left(\frac{P_{\text{base}}}{2}\right) \times (\text{apotema}) + \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$S_T = \left(\frac{6+6+6}{2}\right) \times (2\sqrt{3}) + \frac{6^2\sqrt{3}}{4}$

$S_T = 18\sqrt{3} + 9\sqrt{3}$

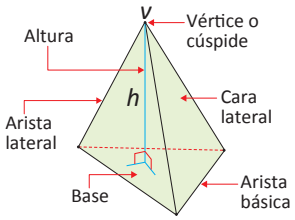
$S_T = 27\sqrt{3}\ \text{m}^2$



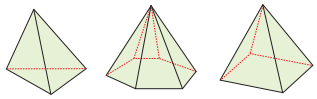
Por lo tanto, el área de la superficie total sería $27\sqrt{3}$ m^2.

Recuerda

La **pirámide** es un poliedro que tiene como base un polígono y como caras laterales triángulos que se encuentran en un solo punto llamado vértice.



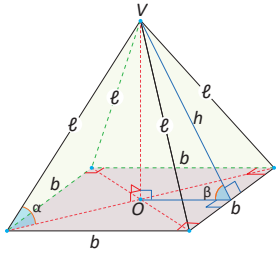
Las pirámides se nombran de acuerdo con la forma de su base.



Pirámide triangular | Pirámide hexangular | Pirámide cuadrangular

Ten en cuenta

La **pirámide regular** es aquella cuyo pie de la altura coincide con el centro de la base, la cual es una región poligonal regular.

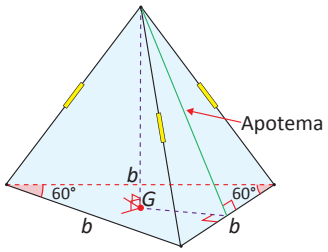


Las caras laterales son regiones triangulares isósceles congruentes.

Ten en cuenta

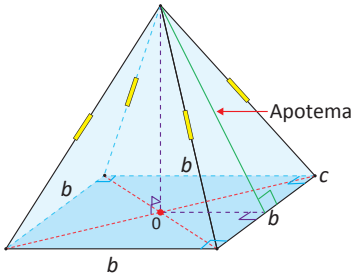
Los siguientes son ejemplos de pirámide regular:

Pirámide regular de base triangular



G: baricentro

Pirámide regular de base cuadrada



O: centro

El apotema de la pirámide es la altura de una cara lateral (del punto medio de un lado de la base al vértice).

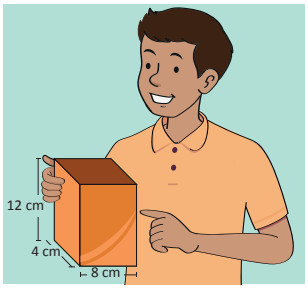
Reto matemático

¿Puede la apotema ser menor que la altura de la pirámide regular? Justifica.

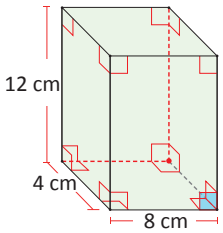
Volumen del prisma recto y pirámide regular

Situación: Caja de bebidas nutritivas

Sebastián quiere calcular el volumen de la caja de chocolate que compró su papá. Para ello, midió las dimensiones de la caja, las cuales se muestran en el gráfico. ¿Cómo calcularía el volumen de la caja?



Nos damos cuenta de que la caja tiene forma de prisma rectangular recto. Procedemos a graficar.



Para calcular el volumen de este tipo de prisma, multiplicamos las tres dimensiones

$V = (4\text{ cm})(8\text{ cm})(12\text{ cm})$

$V = 384\text{ cm}^3$

Así obtenemos el volumen de este sólido.

El problema resuelto ilustra lo siguiente:

Volumen del prisma

El volumen de un prisma es igual al producto del área de la base con la altura de ese prisma.

$$V_{prisma} = (A_{base}) \times (h)$$

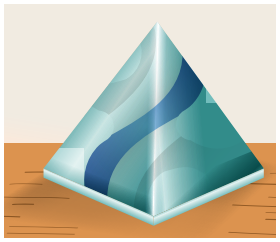
Volumen de la pirámide

El volumen de una pirámide es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la altura de esa pirámide.

$$V_{pirámide} = \frac{(A_{base}) \times (h)}{3}$$

Situación: El reto

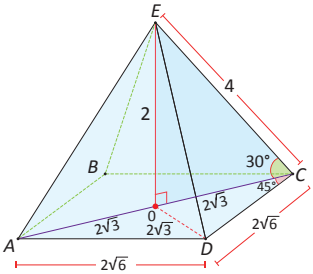
Una empresa de decoración produce recuerdos a base de yeso con forma de pirámide cuadrangular regular. Cada pieza posee aristas laterales de 4 cm que forman un ángulo de 30° con la base. Para estimar el yeso requerido, el ingeniero debe calcular el volumen de cada pirámide elaborada bajo estas especificaciones geométricas.



Janeth, después de realizar sus operaciones, obtiene lo siguiente: $V = \frac{(2\sqrt{6})^2 \times 2}{3} = 4 \times 6 = 24\text{ cm}^3$.

¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta.

- Procedemos a realizar el gráfico.



- Trazamos la altura $\overline{EO}$, donde O es centro de la base cuadrada.
- El $\triangle EOC$ es notable de 30° y 60°, entonces sabemos que $\overline{EO} = 2$ y $\overline{OC} = 2\sqrt{3}$.
- El $\triangle DOC$ es notable de 45° y 45°, entonces sabemos que $\overline{OD} = 2\sqrt{3}$ y $\overline{DC} = 2\sqrt{6}$.
- Calculamos el volumen

$$V = \frac{(2\sqrt{6})^2 \times 2}{3} = \frac{4 \times 6 \times 2}{3} = 16\text{ cm}^3.$$

Así concluimos que el cálculo del volumen está mal formulado.

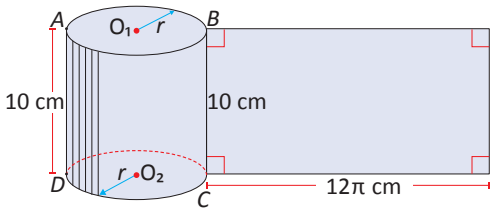
Cilindro recto: área y volumen

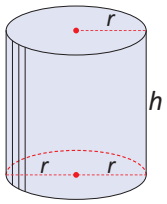
Situación: Envoltura de una conserva

El perímetro de la base de un tarro de conserva es igual a 12π cm y la altura mide 10 cm. El profesor pregunta al aula: "¿Cómo podríamos calcular el área de la superficie lateral del tarro de conserva?". Un estudiante, rápidamente, responde: "Quitemos la envoltura, profesor". Justifica tu respuesta.



Si quitamos la envoltura, tendremos el siguiente gráfico:





Por lo tanto, la longitud de la circunferencia de la base viene a ser el largo de la envoltura, así $A_L = 10 \times 12\pi = 120\pi$ cm^2.

El análisis previo nos muestra lo siguiente:

Área lateral (A_L)

El área lateral de un cilindro circular recto es igual al producto entre el perímetro de la base y la altura del cilindro.

$$A_L = 2\pi rh$$

Perímetro de la base: $P \Longrightarrow P = 2\pi r$

Así tenemos que el área de la superficie lateral es 120π cm^2.

Área de la superficie total (A_T)

El área de la superficie total de un cilindro circular recto es igual a la suma entre el área de la superficie lateral y el doble del área de una de sus bases.

$$A_T = A_L + 2A_{base}$$

Así tenemos

$$A_T = 2\pi r\,(h + r)$$

Volumen del cilindro

El volumen del cilindro es igual a la tercera parte del producto del área de la base por la altura de la pirámide.

$$V = (A_{base})(h)$$

Así tenemos

$$V = (\pi r^2)(h)$$

Donde
h: altura
r: radio de la base del cilindro

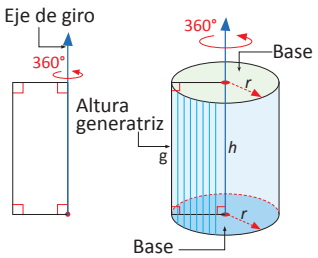
Continuando con la rotación, ¿cuál es el volumen del tarro de conserva?

Como $P = 2\pi \times r = 12\pi$, entonces $r = 6$ cm.

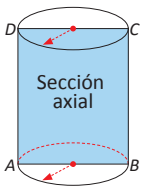
El volumen del tarro es $V = \pi \times r^2 \times h = \pi \times 6^2 \times 10 = 360\pi$ cm^3.

Recuerda

El **cilindro recto,** también denominado cilindro de revolución, es generado por la rotación de una región rectangular alrededor de uno de sus lados. Las bases son regiones circulares congruentes.



La generatriz (g) y la altura (h) son de igual longitud.



En todo cilindro circular recto $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ son generatrices diametralmente opuestas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre las dimensiones y su superficie o volumen al resolver problemas en contexto (por ejemplo: embalaje o capacidad).
- Expresa y representa prismas, identifica sus elementos y su desarrollo plano para el cálculo de áreas.
- Emplea procedimientos para obtener el área lateral, el área total y el volumen de prismas y pirámides, y determina el valor requerido.
- Justifica la elección y argumenta con ejemplos y contraejemplos la validez de los cálculos realizados en el contexto del problema.

Actividad lúdica



¡Reflexiona en el juego! Analiza las reglas del juego, valida estrategias, y da sentido matemático a tus acciones y resultados.

Propósito de aprendizaje

Establece relaciones entre errores de programación y modélalas con ecuaciones cuadráticas; emplea procedimientos de despeje y factorización para hallar soluciones, y argumenta la validez de las raíces en la depuración del código.

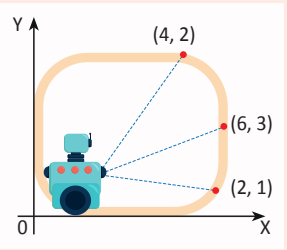
Practica valores

- Cuando comparas resultados diferentes, identificas puntos en común y reconstruyes argumentos sin descalificar, lo cual promueve el respeto y una convivencia justa.
- Incorpora ejemplos de diversas regiones del país, compara contextos ambientales y aprende a tomar decisiones que favorezcan el bienestar de todas las comunidades.

La empresa de robótica

1. Situación

En una empresa de robótica escolar, los programadores diseñaron un sistema para que los robots calculen puntos de parada en una pista. El cálculo depende de resolver ecuaciones cuadráticas simples ($ax^2 + c = 0$ y $ax^2 + bx = 0$).



El problema es que el programa actual tiene errores en sus algoritmos: a veces entrega resultados incorrectos.

El desafío es que tú y tu equipo actúen como ingenieros depuradores: deberán identificar los errores, corregirlos, y diseñar un nuevo diagrama de flujo lógico y matemático que funcione para todos los casos.

2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Los estudiantes deben contar con ejemplos de ecuaciones con procedimientos incorrectos.
b. Los estudiantes se forman en equipos de tres a cinco participantes.
c. Los estudiantes deben tener hojas, marcadores, calculadoras y plantillas de flujo.
d. Cada equipo identifica en qué paso está el error del procedimiento dado.
e. El equipo corrige el procedimiento y obtiene el conjunto solución correcto.
f. El equipo diseña un algoritmo en forma de diagrama de flujo que resuelva cualquier ecuación de ese tipo.
g. El equipo que presente un diagrama correcto, claro y validado con ejemplos gana la ronda.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Sistematización

a. Identifica el tipo de ecuación ($ax^2 + c = 0$ o $ax^2 + bx = 0$).
b. Reconoce qué estrategia corresponde: despeje con raíz cuadrada o factorización.

Codificación (algoritmo lógico)

c. Escribe la secuencia de pasos en forma de pseudocódigo.

- Por ejemplo, para $ax^2 + c = 0$

  Pasos:

  1. Identifica a, c
  2. Calcula el valor = $-\frac{c}{a}$
  3. Si el valor > 0 $\Longrightarrow x = \pm\sqrt{\text{valor}}$
  4. Si el valor = 0 $\Longrightarrow x = 0$
  5. Si el valor < 0 $\Longrightarrow$ no hay solución real

- Por ejemplo, para $ax^2 + bx = 0$

  Pasos:

  1. Identifica a, b
  2. Factoriza $x(ax + b) = 0$
  3. Soluciones: $x^1 = 0$; $x^2 = -\frac{b}{a}$

Prueba y depuración

d. Valida el diagrama con ejemplos.

$4x^2 - 16 = 0 \Longrightarrow S = \{-2; 2\}$

$x^2 - 5x = 0 \Longrightarrow S = \{0; 5\}$

Evaluación (flujo final)

e. Dibuja el diagrama de flujo con cajas y flechas, para ello, asegúrate de que contemple todos los casos posibles.

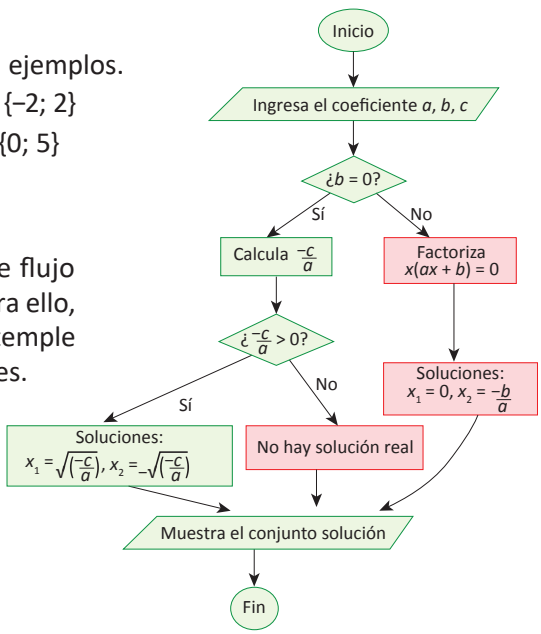


Diagrama de flujo: resolución de ecuaciones cuadráticas

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. En la ecuación $ax^2 + c = 0$, ¿qué ocurre con el conjunto solución si $-\frac{c}{a} > 0$? ¿Y si $-\frac{c}{a} < 0 < 0$?

b. ¿Qué diferencia existe entre resolver una ecuación de la forma $ax^2 + c = 0$ y una de la forma $ax^2 + bx = 0$?

c. ¿Crees que resolver una ecuación se parece a programar: cada paso debe estar en orden y sin errores?

Evalúa tus progresos

- Representa la relación entre la incógnita de la ecuación y la lógica para reparar los errores del robot mediante un diagrama de flujo.
- Emplea procedimientos de despeje o factorización para hallar las soluciones (valores de la incógnita) que corrigen el código con ecuaciones cuadráticas del robot.
- Justifica la aplicación de la propiedad del producto cero en la depuración y argumenta por qué algunas ecuaciones de programación no tienen solución real, evaluando los errores del código.
- Establece relaciones de error entre los valores de la incógnita y el resultado esperado, y resuelve problemas de programación modelando la depuración del código con una ecuación cuadrática.

UNIDAD

4

Tomamos decisiones inteligentes para optimizar costos en un negocio

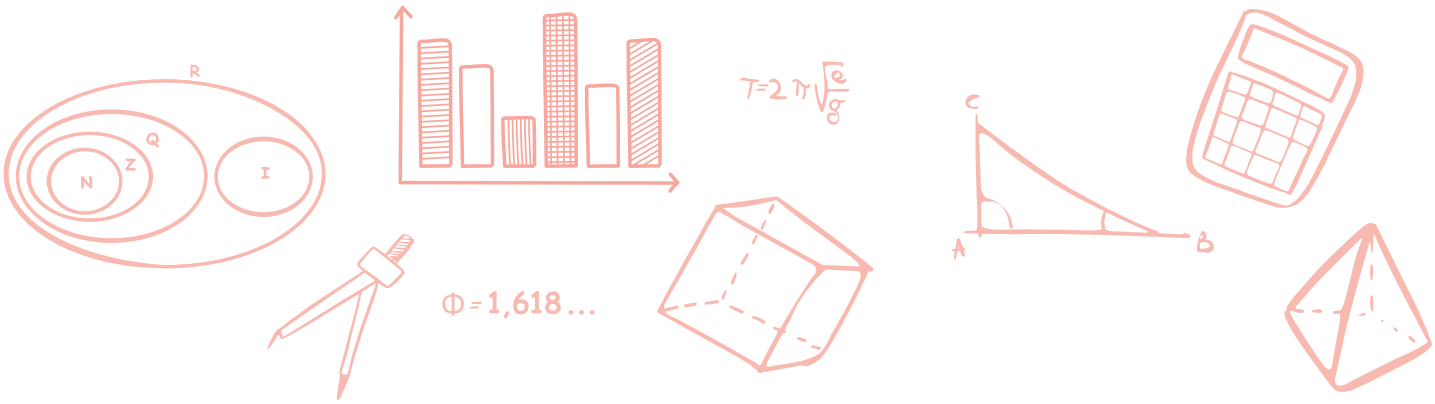


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

8 TRABAJO DECENTE Y CRECIMIENTO ECONÓMICO

Este objetivo impulsa el desarrollo económico sostenible a través del aumento de la productividad y del empleo digno. Se conecta directamente con:

- El análisis financiero, la optimización de costos y la mejora de procesos productivos.
- La toma de decisiones empresariales basadas en datos, proyecciones y estrategias comerciales responsables.
- La valoración del trabajo digno y el uso ético de los recursos.





Fuente: Freepik.es

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque de orientación al bien común
  - Equidad y justicia
  - Solidaridad
- Enfoque de búsqueda de la excelencia
  - Flexibilidad y apertura
  - Superación personal

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Interés simple
- Concepto de interés simple
- Equivalencias entre tasas de interés

Función cuadrática
- Concepto de función cuadrática
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx$

Medidas estadísticas
- Medidas de dispersión: rango para datos no agrupados
- Medidas de dispersión: varianza y desviación estándar para datos no agrupados

Investigamos



Explora cada situación, asume un rol, resuelve con apoyo del anexo y comunica tus ideas matemáticas.

SITUACIÓN
Mejora la producción a través del análisis de costos

La ministra de Comercio Exterior y Turismo destacó el notable incremento de las exportaciones textiles y confecciones en el Perú, lo cual es un estímulo para la estabilidad económica. Como asistente contable, tu tarea será analizar los costos, la producción y las ventas de una pequeña empresa textil familiar, y a partir de ello solicitar un préstamo a una cooperativa de ahorros para la producción del próximo año.

Exportaciones de textiles alcanzan los US$1,483 millones de enero a noviembre del 2024

Mincetur promueve la sostenibilidad, calidad y diversidad del sector



Fuente: Andina (2025).

¿Cómo puedes elaborar un informe financiero con proyecciones de costos, producción y ventas que justifique la solicitud de un préstamo para mejorar la eficiencia en la elaboración de los productos textiles?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Selecciona** una sola prenda (pantalón o camisa) y realiza todo el análisis de costos, producción y ventas únicamente sobre esa prenda.
- **Analiza** las variaciones en la producción y las ventas anuales de la prenda seleccionada, para ello, utiliza conceptos de porcentajes y variación porcentual.
- **Plantea** una propuesta financiera que permita adquirir nuevos insumos (máquinas, moldes, telas, etc.), alquiler del local y servicios básicos para mejorar procesos productivos, para ello, apóyate en el cálculo del interés simple. Supón que se solicita un préstamo a un familiar con interés simple anual a un plazo de 1 año.
- **Evalúa** la variabilidad de los costos unitarios de la prenda seleccionada en los últimos 4 años considerando la varianza y la desviación estándar.
- **Optimiza** las ganancias de la empresa considerando los ingresos y costos de producción, así como las cantidades producidas por prenda, para ello, emplea una función cuadrática.

SITUACIÓN
Analiza datos para incrementar las ventas

Imagina que formas parte de una empresa textil que busca incrementar su rentabilidad a partir de la promoción de sus productos. Como parte del departamento de marketing, tu tarea será analizar la pertinencia de usar una tienda física o virtual para hacer que la empresa sea más competitiva.

Más negocios peruanos optan por la digitalización: ¿Cuáles son sus beneficios?



Fuente: RPP (2022).

¿Cómo puedes plantear un informe de viabilidad comercial, en el que expliques qué canal de venta conviene más a la empresa considerando el análisis de los datos del servicio al cliente, los costos y las ventas?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Selecciona** la prenda que producirá la empresa. A partir de ello, analiza los costos de producción y costos operativos asociados a cada canal de venta (físico y virtual).
- **Analiza** cómo la producción y las ventas de esa prenda han variado en los últimos años. Usa **porcentajes y variación porcentual** para identificar tendencias y proyecciones de ventas tanto para una tienda física como para una virtual.
- **Plantea** una propuesta que justifique qué canal conviene más, simula una situación en la que se solicite un préstamo. Estima el costo de financiar mejoras en el canal elegido (como abrir una tienda física o invertir en publicidad en línea) utilizando el cálculo del interés simple.
- **Evalúa** la variabilidad de los costos y precios de venta de la prenda seleccionada a lo largo del tiempo. Usa la varianza y desviación estándar para determinar el nivel de estabilidad de los ingresos y costos en distintos escenarios.
- **Modela y analiza** el costo total de producción y operación mediante una función cuadrática, la cual puedes construir por el método de regresión, y considera cómo cambian los costos al aumentar la producción y al asumir los gastos del canal de venta.

Anexo A: Mejora la producción a través del análisis de costos

1. Costos de producción

a. Costos de producción de pantalones

Materia prima	Cantidad	Costo por metro (S/)	Total (S/)
Tela *drill* (m)	1,50	30,00	54,00
Botones, cremalleras, hilos, etiquetas	-	-	1,00
Costo total de materia prima por pantalón (S/)			55,00

Mano de obra (En una semana se producen 100 pantalones de un mismo modelo)

Cantidad	Operarios	Sueldo semanal (S/)	Costo por pantalón (S/)
1	Corte	280,00	2,80
1	Costura	250,00	2,50
1	Acabados	250,00	2,50
Costo total de mano de obra por pantalón (S/)			7,80

Costo indirecto de fabricación

Descripción	Valor (S/)
Luz	0,08
Agua	0,02
Costo total indirecto de fabricación por pantalón (S/)	0,10

Resumen de costos

Elementos	Valor (S/)
Materia prima	55,00
Mano de obra	7,80
Costo indirecto de fabricación	0,10
Costo unitario total (S/)	62,90

b. Costos de producción de camisas

Materia prima	Cantidad	Costo por metro (S/)	Total (S/)
Tela (m)	1,20	15,00	18,00
Botones, hilos, etiquetas	-	-	0,50
Costo total de materia prima por pantalón (S/)			18,50

Mano de obra (En una semana se producen 300 camisas de un mismo modelo)

Cantidad	Operarios	Sueldo semanal (S/)	Costo por camisa (S/)
1	Corte	350,00	1,17
1	Costura	420,00	1,40
1	Acabados	280,00	0,93
Costo total de mano de obra por pantalón (S/)			3,50

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Costo indirecto de fabricación

Descripción	Valor (S/)
Luz	0,06
Agua	0,01
Costo total indirecto de fabricación por camisa (S/)	0,12

Resumen de costos

Elementos	Valor (S/)
Materia prima	21,00
Mano de obra	3,50
Costo total indirecto de fabricación	0,12
Costo unitario total (S/)	24,62

2. Datos anuales de producción y ventas

Las siguientes tablas muestran la producción anual, los costos, la cantidad de prendas vendidas y el ingreso para la empresa:

a. Costos de producción de pantalones

Año	Cantidad	Costo unitario (S/)	Costo total (S/)
2022	4500	68,44	308 000
2023	5000	65,95	329 750
2024	5200	68,26	354 952
2025	5900	70,99	418 841

Ingreso por venta de pantalones

Año	Cantidad	Precio unitario (S/)	Ingreso total (S/)
2022	4200	95,00	399 000
2023	4800	100,00	480 000
2024	5000	103,50	517 500
2025	5300	107,64	5702

b. Costos de producción de camisas

Año	Cantidad	Costo unitario (S/)	Costo total (S/)
2022	9000	26,00	234 000
2023	10 000	24,62	246 200
2024	10 500	25,48	267 540
2025	11 000	26,50	291 500

Ingreso por venta de camisas

Año	Cantidad	Precio unitario (S/)	Ingreso total (S/)
2022	8500	38,00	323 000
2023	9500	40,00	380 000
2024	10 000	41,40	414 000
2025	10 600	43,06	456 436

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Guía para optimizar ganancias para pantalones

a. Define las variables y funciones

Sea x la cantidad de pantalones producidos y vendidos.

- El ingreso total (I) es $I(x) = p \cdot x$ donde p es el precio de venta unitario.
- El costo total (C) es una función cuadrática (según el análisis de la tabla de costos de pantalones)

$$C(x) = 0{,}031x^2 - 250x + 8000$$

- La utilidad (U) es la diferencia entre el ingreso y el costo totales $U(x) = I(x) - C(x)$

b. Determina el precio de venta

Según los datos históricos, el precio de venta ha ido aumentando. Para el 2026, usaremos un precio de S/110 por pantalón (como proyección a modo de ejemplo). Entonces, el ingreso está denotado por la siguiente función: $I(x) = 110x$

c. Escribe la función de utilidad

$$U(x) = 110x - (0{,}031x^2 - 250x + 8000)$$
$$U(x) = 110x - 0{,}031x^2 + 250x - 8000$$
$$U(x) = -0{,}031x^2 + 360x + 8000$$

d. Encuentra la cantidad que maximiza la utilidad

La función $U(x)$ es una parábola cóncava hacia abajo (porque el coeficiente de x^2 es negativo), por lo que tiene un máximo en el vértice.

Anexo B: Analiza datos para incrementar las ventas

1. Costo de producción en soles según el tipo de tienda (mensual)

a. Tienda virtual

Tipo de costos	Detalle	2022	2023	2024	2025
Iniciales	Desarrollo de la plataforma	80	80	90	100
	Diseño web	20	30	40	50
	Fotografía del producto	15	15	15	15
Operativos	Personal (en línea)	30	45	40	45
	Hosting y dominio	5	6	7	8
	Marketing digital	40	50	60	75
	Embalaje y envío	25	30	35	45
	Devoluciones	8	10	11	15
De inventario	Compra de mercadería	200	240	250	280
	Almacenamiento (externo)	15	18	20	23
	Seguro	2	2,20	2,50	2,80
Total		440,00	526,20	570,50	658,80

Información propuesta y adaptada para fines educativos

b. Tienda física

Tipo de costos	Detalle	2022	2023	2024	2025
Iniciales	Alquiler del local	120	130	130	130
	Adecuación	50	30	20	20
	Equipamiento	30	32	42	52
Operativos	Personal	80	85	90	95
	Servicios públicos	15	16	17	18
	Mantenimiento	8	8,4	9	9,5
	Marketing local	20	22	25	28
De inventario	Compra mercadería	300	350	360	400
	Almacenamiento (en tienda)	10	11	12	13
	Seguro	3	3,30	3,6	4
Total		636,00	687,70	708,60	769,50

2. Datos anuales de producción y ventas según prenda

a. Pantalones

Año	Canal	Cantidad vendida	Costo unitario de compra (S/)	Precio de venta (S/)	Ganancia unitaria (S/)	Venta total (S/)	Costo total (S/)	Ganancia total (S)
2022	Física	2940	68,00	95,00	27,00	279 300	199 920	79 380
	Virtual	1260	68,00	85,50	17,50	107 730	85 680	22 050
2023	Física	3216	65,95	96,90	30,95	311 630	212 095	99 535
	Virtual	1584	65,95	87,08	21,13	137 945	104 465	33 480
2024	Física	3269	68,26	98,84	30,58	323 099	223 142	99 957
	Virtual	1731	68,26	89,16	20,90	154 332	118 158	36 174
2025	Física	3286	70,90	105,80	34,90	347 659	232 977	114 682
	Virtual	2014	70,90	100,00	29,10	201 400	142 793	58 607

b. Camisas

Año	Canal	Cantidad vendida	Costo unitario de compra (S/)	Precio de venta (S/)	Ganancia unitaria (S/)	Venta total (S/)	Costo total (S/)	Ganancia total(S/)
2022	Física	5950	26,00	38,00	12,00	226 100	154 700	71 400
	Virtual	2550	26,00	34,20	8,20	87 210	66 300	20 910
2023	Física	6350	24,62	38,76	14,14	246 126	156 337	89 789
	Virtual	3150	24,62	34,88	10,26	109 872	77 553	32 319
2024	Física	6400	25,48	39,54	14,06	253 056	163 072	89 984
	Virtual	3600	25,48	35,57	10,09	128 052	91 728	36 324
2025	Física	6320	26,50	40,33	13,83	254 886	167 480	87 406
	Virtual	4280	26,50	36,28	9,78	155 278	113 420	41 858

Información propuesta y adaptada para fines educativos

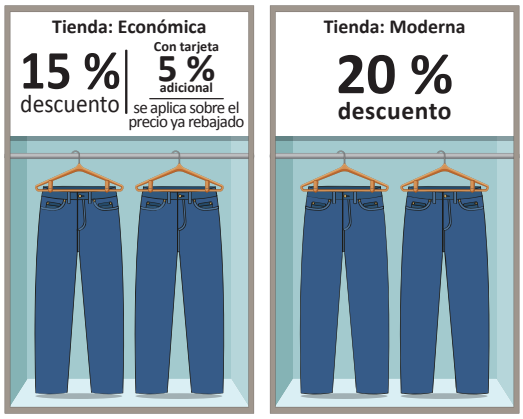
Exploramos



Emplea tus aprendizajes previos como guía para avanzar con seguridad en estos retos.

1. Precios rebajados

Dos tiendas comerciales ofrecen sobre un mismo pantalón descuentos como se observan a continuación



a. Si el precio del pantalón sin descuento es el mismo en ambas tiendas, ¿en qué tienda resulta más conveniente comprarlo considerando los descuentos? Explica tu respuesta.

b. Se afirma: "Aplicar un descuento del 15 % seguido de otro del 5 % es equivalente a aplicar un único descuento del 20 %". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

2. Aumento y más aumento

Un empresario alquila un local con un contrato de S/60 000 en el primer año. Inesperadamente, en el segundo año, al renovar el contrato, el propietario anuncia aumentos anuales del alquiler, según la tabla.

Año	Aumento
1	-
2	5 %
3	4 %
4	3 %

Nota: el aumento se calcula sobre el alquiler del año anterior

Se afirma: "En el año que el alquiler aumenta más del 10 % respecto al contrato inicial, deberán buscar un nuevo local para no afectar su presupuesto".

a. Con lo planteado, ¿cómo determinarías el alquiler para cada año?

b. Para el cuarto año, ¿consideras que el empresario debería cambiar de local?, ¿por qué?

c. ¿Aplicar aumentos sucesivos del 5 %, 4 % y 3 % equivale a aplicar un único aumento del 12 %? Justifica tu respuesta.

3. El pago de nuestros impuestos

Al realizar una compra, Héctor recibió una factura, pero parte del documento se deterioró.

a. Sabemos que el IGV corresponde al 18 % del subtotal. ¿Qué procedimiento se puede seguir para obtener el IGV y el importe total? Explica cómo lo harías.

b. Calcula el precio por litro de cada producto y determina qué porcentaje representa el precio por litro del aceite *premium* respecto al del aceite de oliva extravirgen.

c. Si ambos precios de los aceites por litro se duplican, ¿el porcentaje del *premium* respecto al del oliva cambia? Justifica tu respuesta con cálculos.

Bodega Don Lucho
Psj. Las Brisas - Huaral
TLF: 246 - 1117

Boleta electrónica
RUC: 12347654454
E001-471

Caja predeterminada

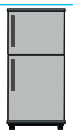
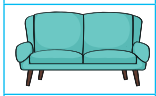
Cliente: Público en general — 15/02/26
Usuario: Administrador — 11:04:17 a.m.

Cantidad	Descripción	Importe
1	Aceite *premium* Envase x 1 L	10,50
1	Aceite de oliva extravirgen Envase x 500 mL	17,50
Son	IGV (18 %) del subtotal	S/ 28,00
	Importe total	S/

4. Ofertas

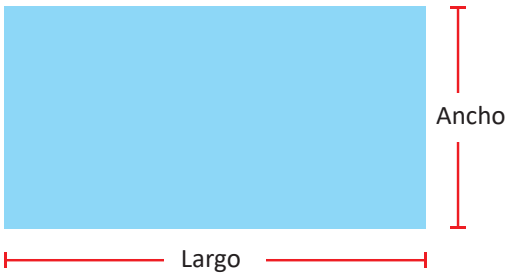
Los productos de la siguiente tabla tienen distintos porcentajes de descuento:

a. Completa la tabla y explica tu procedimiento.

Producto	Precio original del producto	Descuento (%)	Precio con el descuento
	S/140	35 %	
	S/180		S/99
		30 %	S/735
	S/980		S/588
	S/1490	22 %	

5. Medidas que varían

Tienes un rectángulo, y decides aumentar el largo en un 20 % y el ancho en un 10 % para hacerlo más grande.



a. ¿En qué porcentaje se incrementa el área?

b. Si, luego del aumento, se aplicara un descuento del 20 % al largo y el 10 % al ancho, ¿el área volvería a su tamaño original? Justifica tu respuesta.

c. Si el rectángulo original fuera un cuadrado (largo = ancho), ¿en qué porcentaje se incrementaría su perímetro al aplicar el aumento del 20 % al largo y del 10 % al ancho?

6. Promociones al paso

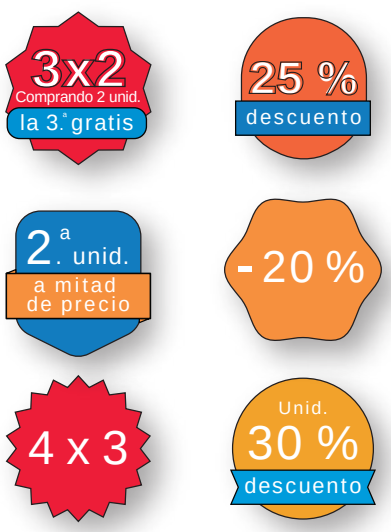
Con frecuencia, la publicidad promueve que compremos más y más. Observa estas promociones referidas a un mismo producto con precio unitario (en soles).

a. En la promoción 3 × 2 sobre el mismo producto, compras 3 unidades y pagas solo 2. ¿Cuánto ahorras en soles respecto al pago de las 3 unidades al precio regular?

Expresa ese ahorro como porcentaje sobre el precio de las 3 unidades.

Expresa ese ahorro como porcentaje sobre el monto efectivamente pagado por las 2 unidades. Explica con un ejemplo numérico.

b. Una tienda permite acumular dos promociones sobre el mismo producto y mismo precio unitario: la oferta 3 × 2 y un descuento del k % aplicado una sola vez sobre el subtotal que resulte (sin redondeos intermedios ni topes). Decide si el total a pagar cambia al aplicar primero la 3 × 2 y luego el k %, o al revés. Verifica con un ejemplo.



1. Vaciado de una piscina

Se abre la válvula de drenaje de una piscina que vacía la misma cantidad de agua cada minuto. En la siguiente tabla se registra la cantidad de agua que queda en función del tiempo transcurrido, complétala:

Tiempo (min)	Cantidad de agua (L)
0	10 000
1	9600
2	9200
3	
4	
5	
⋮	⋮

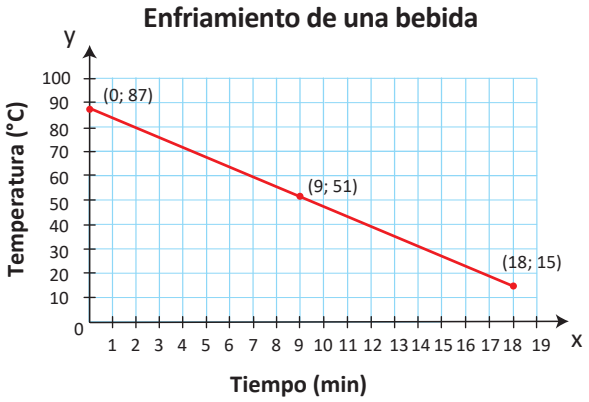
a. ¿Cuántos litros quedan en la piscina después de 10 minutos?

b. Si n es el número entero de minutos transcurridos, para un tiempo n en minutos, ¿cómo se expresa la cantidad de agua que queda en la piscina?

c. Se sostiene: "La función que representa la cantidad de agua que queda en la piscina es una función lineal afín, cuyo dominio son los minutos enteros $n \in [0; 20]$ y cuyo rango es el intervalo $[0; 10\,000]$". ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.

2. Enfriamiento de una bebida

La siguiente gráfica muestra la temperatura de una bebida en función del tiempo durante 18 minutos. Observa la gráfica.



a. ¿Cuál es la temperatura aproximada de la bebida en el minuto 8?

b. ¿Qué información nos da el punto (9; 51) en el contexto del problema?

c. Se afirma: "El valor de la pendiente es un número negativo porque la bebida se enfría". ¿Estás de acuerdo con ello? Justifica tu respuesta.

3. Elección de la empresa de teléfono

Héctor está evaluando los anuncios de dos compañías de telefonía móvil. Ambas empresas miden con precisión el tiempo de llamada, sin redondeos. Se desea encontrar qué plan es más económico según el tiempo de uso en llamadas al mes.

Completa la tabla y responde.

	Planes de campaña	
Tiempo (min)	Inti Móvil Costo (S/)	PachaTel Costo (S/)
0		
10		
20		
30		

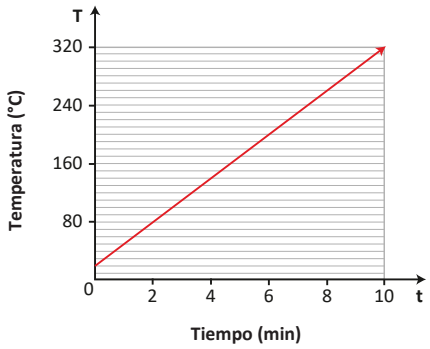


a. Si solo usas el teléfono 15 minutos al mes, ¿qué plan elegirías?

b. ¿Cómo representarías en el plano cartesiano el costo de ambos planes? ¿En qué tiempo ambos planes tienen el mismo costo? Justifica cómo lo hallaste.

4. Experimento en el laboratorio

En un experimento de laboratorio, el aceite de silicona es sometido a altas temperaturas. La gráfica muestra la temperatura (°C) que logra alcanzar el aceite en función del tiempo (min).



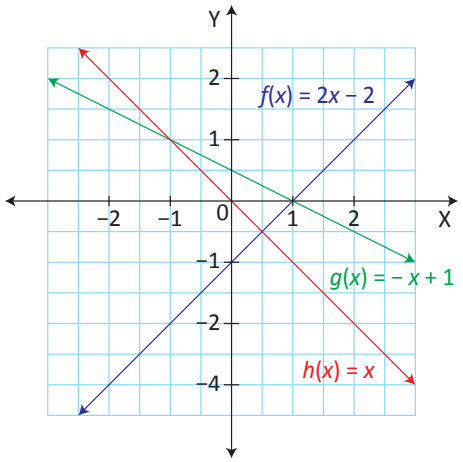
a. A partir de la gráfica, completa la tabla.

Tiempo (min)	Temperatura (°C)
0	
1	
2	
3	
4	
⋮	⋮
10	

b. Si el experimento continuara, ¿cómo estimarías el tiempo para una temperatura de 485 °C? Explica tu procedimiento.

5. Análisis de gráficas

A continuación, en el plano cartesiano se muestran tres funciones: $f(x)$; $g(x)$; $h(x)$. Observa el plano cartesiano.



a. ¿Todas las funciones han sido graficadas correctamente? Indica cuáles están correctas y corrige las que no lo están.

b. Se indica: "La gráfica de una función lineal siempre es más inclinada que la de una función lineal afín". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

6. Los huesos y la estatura

En medicina forense se puede estimar la estatura de una persona adulta a partir de la longitud de su tibia. Para ello, se usa el modelo matemático



$h(t) = 66{,}42 + 2{,}72\ t$

Donde
t: longitud en centímetros de la tibia de una persona.
$h(t)$: talla estimada en centímetros.

Fuente: Adaptado de Mantilla et al. (2009).

a. Si la tibia aumenta 1 cm, ¿en cuánto cambia la estatura estimada? Explica qué representa cada término del modelo (66,42 y 2,72) en este contexto y sustenta con un ejemplo numérico.

b. Se dice que: "En una función lineal afín, siempre existe una constante, como 66,42 en $h(t)$". ¿Estás de acuerdo con ello? Argumenta tu respuesta con ejemplos.

1. Control de calidad para galletas

El área de calidad de una empresa desea comprobar si los paquetes de galletas Riquísimas tienen la misma masa neta.



Para ello, se escoge al azar 10 paquetes individuales y se registran los siguientes datos:

36,7 g; 37,3 g; 36,8 g; 37,0 g; 37,1 g;
36,9 g; 37,2 g; 36,6 g; 37,0 g; 34,9 g

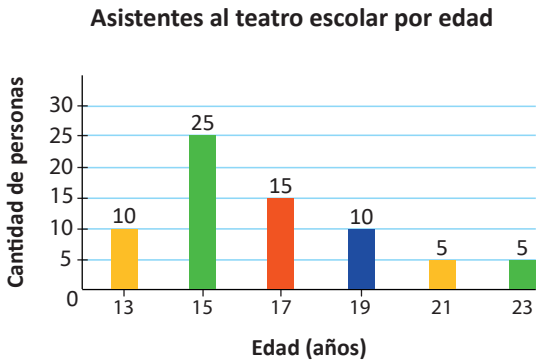
a. ¿Cómo determinarías la media, mediana y moda de sus masas?

b. ¿Cuál de estas medidas de tendencia central representa mejor el conjunto de datos? Justifica tu respuesta.

c. Se sostiene que: "El promedio es muy cercano a la masa neta declarada en la galleta, entonces se cumple con lo establecido en la envoltura, aunque haya valores fuera del rango". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Encuesta de edades

Una escuela realiza una encuesta para conocer la edad de las personas que asistieron a una función de teatro escolar organizada por la municipalidad. Los resultados se representan en la gráfica.



a. ¿Cuál es la edad promedio de las personas que asistieron a la función?

b. Se afirma: "Si se registra a una persona de 40 años que fue omitida involuntariamente, esto afectará el promedio obtenido". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

c. ¿Qué porcentaje de asistentes fueron mayores de 18 años? ¿Se puede afirmar que al menos la mitad del público es menor de edad?

3. Comparación de puntajes

La siguiente tabla muestra los puntos anotados por dos estudiantes que forman parte del equipo de básquet de una institución educativa en los últimos cinco partidos jugados. El entrenador debe elegir a uno de ellos para que inicie un partido decisivo del campeonato.

Partido / Deportista	1.º	2.º	3.º	4.º	5.º
Pablo	14	14	10	6	20
Claudio	12	16	13	15	14

a. ¿Qué diferencias observas en el rendimiento de ambos deportistas a partir de los datos? ¿Cómo determinarías la media, mediana o moda de los puntajes de cada uno?

b. Si tuvieras que recomendar a uno de los dos deportistas para el partido decisivo, ¿a quién elegirías y por qué? Sustenta tu decisión a partir del análisis y de la interpretación de los datos.

4. Análisis de datos

Se tiene el siguiente conjunto de datos: 409; 407; 408; 408; 380; 409; 410; 413; 410; 412

Calcula la media, la mediana y la moda. ¿Cuál de estas medidas representa mejor los datos? Observamos el procedimiento y la respuesta de Mariano.

- Media $\overline{x} = \dfrac{380 + 407 + 408 + 408 + 409 + 409 + 410 + 413 + 410 + 412}{10}$

  $\overline{x} = \dfrac{4076}{10} = 407{,}6$

- Mediana

  Ordenamos los datos.

  380; 407; 408; 408; 409; 409; 410; 410; 412; 413

  $Me = \dfrac{409 + 409}{2} = \dfrac{818}{2} = 409$

- Moda

  Los valores 408; 409 y 410 se repiten dos veces. Entonces la moda son esos tres datos. Por lo tanto, la medida que representa mejor los datos es la media, porque la mayoría de los datos son cercanos al valor del promedio.

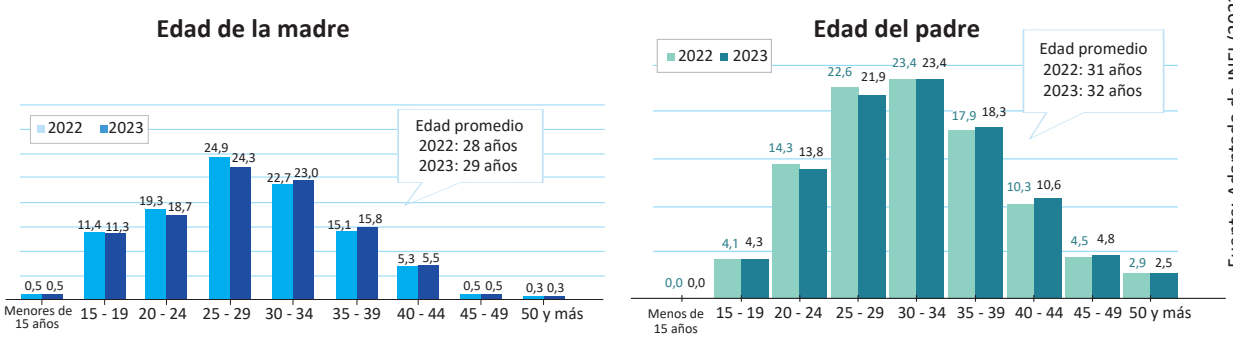
a. ¿Es correcta la solución y respuesta planteada por Mariano? Si no lo es, corrígelas.

b. ¿Cómo influye el dato 380 en la representación de los datos? Sustenta tu respuesta con argumentos estadísticos.

5. ¿Qué edad tienen los padres peruanos?

Se recogieron datos sobre la edad de los padres de los recién nacidos en el Perú durante el periodo 2022-2023. Observa los gráficos estadísticos y responde.

Perú: nacimientos inscritos mediante el sistema en línea, según grupo de edad de la madre y el padre, 2022 - 2023 (Distribución porcentual)



Fuente: Adaptado de INEI (2023).

a. ¿Qué diferencias identificas entre el comportamiento de las edades de la madre y del padre en ambos años? ¿Qué interpretación podrías hacer a partir de los promedios y de la forma del gráfico?

b. A partir de los gráficos, plantea dos conclusiones sobre la evolución del comportamiento reproductivo en madres y padres entre el 2022 y 2023. Incluye al menos un cambio notable (aumento o disminución en un grupo) y compara usando la edad promedio indicada en los gráficos. ¿Qué cambios destacan entre el 2022 y 2023?

Desarrollamos



Evalúa situaciones, muestra resoluciones, argumenta ideas matemáticas y amplía tus aprendizajes.

Tu propósito de aprendizaje

Representa situaciones de ahorro e inversión con interés simple apoyado en tablas, e interpreta gráficos cartesianos. Emplea procedimientos y estrategias para determinar el capital, la tasa de interés, el tiempo y el interés/monto final en distintas entidades financieras, y justifica la conveniencia de una alternativa de inversión frente a otras, evaluando las condiciones de las ofertas.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Reformula el plan de trabajo ante limitaciones de tiempo, críticas constructivas y redistribuye roles equitativamente.
- Cede la palabra y valora los aportes para asegurar una participación justa.

Pensamos y actuamos

Una familia ahorra S/10 000 a plazo fijo, y dispone de tres entidades financieras que proponen las siguientes condiciones:

Tasa de interés simple (%)	Tiempo (años)
15	3
13	5
10	8

1. ¿En cuál de las entidades bancarias le convendría realizar el ahorro?, ¿por qué?

a. Para responder, analiza la tabla del banco A y completa.

Entidad financiera A				
Tiempo (años)	Capital (S/)	Tasa de interés (%)	Interés (S/)	Capital + interés (S/)
1	10 000	15	10 000 × 15 % × 1 = 1500	11 500
2	10 000	15	10 000 × 15 % × 2 = 3000	13 000
3	10 000			

b. En tu cuaderno completa las tablas de los bancos B y C.

Entidad financiera B				
Tiempo (años)	Capital (S/)	Tasa de interés (%)	Interés (S/)	Capital + interés (S/)
1	10 000	13		
2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
5				

Entidad financiera C				
Tiempo (años)	Capital (S/)	Tasa de interés (%)	Interés (S/)	Capital + interés (S/)
1	10 000	10		
2				
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
8				

2. Explica paso a paso cómo calculaste interés y capital + interés en cada banco, luego, indica lo siguiente:

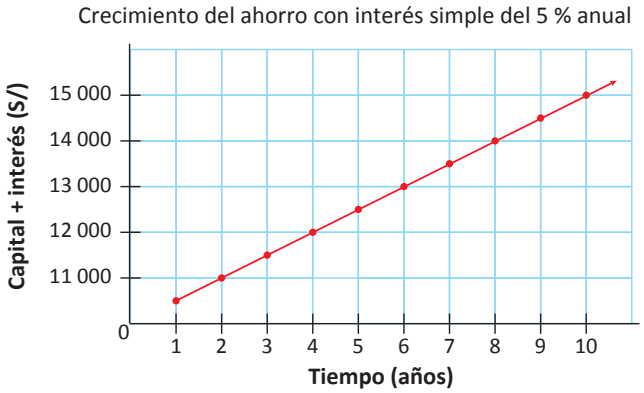
a. Las fórmulas usadas ($I = C \times r \times t$, $M = C + I$)

b. Los valores de C, r y t sustituidos

c. Por qué el interés crece linealmente con t.

3. ¿En cuál de las entidades le convendría financiar el ahorro?, ¿por qué?

4. **Una entidad bancaria D presenta la siguiente opción de ahorro:**



   a. **En el gráfico "Crecimiento del ahorro con interés simple del 5 % anual y capital inicial S/10 000", ¿de cuánto tiempo total es la propuesta?**

   b. **Usando la recta del gráfico, calcula el interés ganado entre los años 4 y 6.**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Siempre el crecimiento del capital más interés es lineal en el interés simple.	El banco A ofrece más ganancia que el banco C porque tiene una tasa más alta.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Expresa la relación de interés simple usando tablas y represéntala mediante gráficos lineales.
- Utiliza lenguaje matemático y financiero (capital, tasa, tiempo, interés y monto) para describir las variaciones del capital en cada entidad financiera a lo largo del tiempo.
- Emplea procedimientos de cálculo y análisis de tablas para determinar el interés simple y el monto final en diferentes periodos.
- Justifica la elección de la entidad con mayor rendimiento (monto final), y compara tasas y tiempos de cada alternativa de inversión.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Jorge solicita un préstamo de S/15 000 a interés simple del 20 % anual por 4 años.**
   a. ¿Cuál es el interés total que deberá pagar?
   b. ¿Cuál es el monto total a devolver al final del plazo?
2. **Carla presta S/2500 a interés simple del 5 % mensual por 10 meses.**
   a. ¿Cuál es el interés total que ganará?
   b. ¿Cuál es el monto que recibirá al final?
3. **Un capital de S/20 000 se invierte a interés simple del 5 % mensual.**
   ¿En cuántos meses se duplica el capital?
4. **Un capital generó S/600 de interés simple en 2 años a una tasa anual del 12 %.**
   ¿Cuál fue el capital inicial invertido?

Tu propósito de aprendizaje

Representa situaciones comerciales orientadas al ingreso máximo mediante funciones cuadráticas, para ello utiliza tablas y gráficos cartesianos. Emplea procedimientos para determinar el vértice de la parábola (que fija la cantidad y el precio que maximizan el ingreso) y argumenta la validez de los resultados dentro del contexto del problema.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Promueve la equidad en las responsabilidades mediante un liderazgo rotativo que evita concentrar funciones.
- Toma decisiones consensuadas, valora argumentos y revisa acuerdos ante nuevas evidencias.

Pensamos y actuamos

Roberto trabaja en una fábrica de botellas. Se sabe que, si se venden x millares, el precio por millar sería S/$(21 - x)$. ¿Cuál es el ingreso máximo de la fábrica por la venta de botellas? ¿Cuántas botellas deben producirse para obtener el ingreso máximo?

1. Para resolver el problema, completa la tabla en tu cuaderno.

Cantidad de botellas (millares) x	Precio por millar (S/) $21 - x$	Ingreso (S/)
1	21 – 1	1(20) = 20
2		
3		
4		
⋮	⋮	⋮
10		
11		
x		

2. Analiza la información y responde.

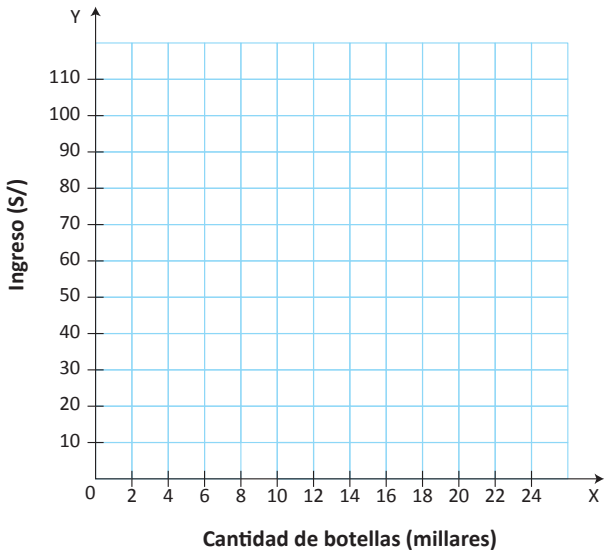
a. ¿Cuál sería el ingreso si se venden 2 millares de botellas?

b. ¿Cuál sería el ingreso si se venden 10 millares de botellas?

c. ¿Cuál sería la expresión matemática que permita calcular el ingreso para x millares de botellas?

d. ¿Qué tipo de función es la expresión anterior? Justifica tu respuesta.

e. Representa los datos de la tabla en el plano cartesiano, para ello, considera los pares ordenados $(x; y)$.



3. **Responde.**

   a. La función cuadrática tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx$, y su gráfica es una parábola cuyo vértice $(x; y)$ se calcula usando la expresión $x_{\text{vértice}} = \frac{-b}{2a}$; $y_{\text{vértice}} = f\left(\frac{-b}{2a}\right)$. Con esta información determina el vértice de la gráfica de la función de la situación inicial.

   b. ¿Cuál es el ingreso máximo y para qué cantidad se obtiene? ¿Cambia algo si x debe ser entero? Muestra dos valores distintos de x con el mismo ingreso y explica por qué ocurre la simetría de la parábola.

   c. ¿Cuál sería el ingreso si se venden doce millares de botellas?

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Si el coeficiente del término cuadrático de la ecuación es negativo, la gráfica es cóncava hacia abajo y tiene un valor máximo como en el caso de los ingresos.	La relación entre el ingreso y los días de retraso es que aumenta a ritmo constante.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones en situaciones de optimización (por ejemplo: ingreso vs. cantidad vendida) que involucran una función cuadrática y represéntalas gráficamente.
- Expresa la variación del ingreso apoyado en la función cuadrática (vértice, etc.) e interpreta tablas y gráficos.
- Emplea procedimientos para hallar la cantidad que maximiza el ingreso y el valor del ingreso máximo.
- Justifica que el máximo ocurre en el vértice, y evalúa la validez de las soluciones en un contexto.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Una empresa vende x millares de botellas a un precio por millar de $(18 - x)$ soles.**
   a. ¿Cuántos millares debe producir para obtener el máximo ingreso?
   b. ¿Cuál es ese ingreso máximo?
2. **Una productora organiza un concierto y vende x cientos de entradas a un precio por entrada de $(50 - x)$ soles.**
   a. ¿Cuántas entradas debe vender para obtener el máximo ingreso?
   b. ¿Cuál es el ingreso máximo?
   c. Si recaudó S/60 000, ¿cuántas entradas vendió?
3. **Una planta vende x millares de paquetes; el precio por millar es $(24 - x)$ soles.**
   a. Modela el ingreso en miles de soles.
   b. ¿Para qué valor de x se obtiene el máximo?, ¿cuál es?
   c. Encuentra dos valores distintos de x con el mismo ingreso de 140 miles de soles.
4. **Se venden x cientos de *packs*, cuyo precio por *pack* es igual a $15 - 0{,}5x$ soles (*pack* $= 15 - 0{,}5x$).**
   a. Determina el dominio para el precio positivo.
   b. Modela $R(x)$ en soles y halla el máximo con x entero.

Tu propósito de aprendizaje

Representa y expresa la distribución de datos en gráficos y tablas; emplea procedimientos para calcular la media, el rango, la varianza y la desviación estándar con el fin de determinar el grado de dispersión; argumenta si un grupo de datos es "homogéneo", y evalúa el significado de la desviación estándar en el contexto.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- En los debates sobre métodos, acepta conclusiones cuando la evidencia convence; prioriza lo colectivo de lo personal.
- Al comparar resultados, busca coincidencias y reconstruye argumentos con respeto, para fortalecer la convivencia justa.

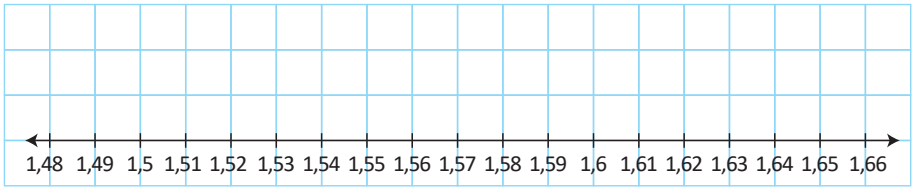
Pensamos y actuamos

En una institución educativa de una zona rural, los estudiantes se preparan para un desfile. Uno de los requisitos es que el grupo de estudiantes tenga una estatura promedio de al menos 1,58 m para participar en el desfile. El auxiliar ha recopilado las estaturas de 17 estudiantes para verificar si cumplen con este requisito.

Estudiante	Estatura (cm)
1	1,50
2	1,52
3	1,48
4	1,55
5	1,61
6	1,66
7	1,48
8	1,54
9	1,52

Estudiante	Estatura (cm)
10	1,63
11	1,52
12	1,48
13	1,53
14	1,51
15	1,49
16	1,55
17	1,56

1. **¿Las estaturas son homogéneas? Justifica con al menos una medida de dispersión (rango y/o desviación estándar) e indica el criterio que usas para decidir. Emplea estaturas en metros (m).**
2. **El requisito es que el promedio debe ser mayor o igual que 1,58 m. Calcula la media de las 17 estaturas (m) y concluye si el grupo cumple o no con ello. Muestra el cálculo.**
3. **Traza puntos en el eje X con estaturas en metros, para ello, marca cada 0,01 m. Luego, coloca un punto por estudiante. Titula el gráfico y rotula el eje X como estatura (m).**



a. Describe tendencias del gráfico: concentración principal, valores extremos (si hubiera) y rango aproximado.

b. Menciona el rango, la varianza y la desviación estándar. Indica qué miden (dispersión) y cuándo una clase de valores se considera "más homogénea".

c. Explica cómo el rango y la desviación estándar reflejan la concentración de puntos del gráfico. Indica si la media representa bien al grupo, para ello, argumenta con la dispersión y los posibles valores atípicos.

d. Redacta dos conclusiones.

- ¿Cuán dispersas son las estaturas? Para saberlo, usa dispersión o rango.
- ¿Cómo esa dispersión impacta en la uniformidad visual del desfile?

4. **Calcula el rango (m), la varianza (m²) y la desviación estándar (m) para las 17 estaturas. Presenta resultados con dos o tres decimales.**
5. **Calcula la varianza paso a paso.**
   a. Halla las diferencias entre cada estatura y la media.
   b. Eleva al cuadrado cada diferencia.
   c. Suma los cuadrados.
   d. Divide entre el total de datos para obtener la varianza muestral.

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n}$$

$$V = \frac{(\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2 + (\quad - \quad)^2 \ldots + (\quad - \quad)^2}{17}$$

6. **Calcula la desviación estándar.**
   a. Saca la raíz cuadrada de la varianza.
7. **Grafica la media en el gráfico de puntos como una recta que corta verticalmente en este valor al eje X, y la desviación estándar como un intervalo de *s* unidades a la izquierda de la media y *s* unidades a la derecha. ¿Qué significado tiene para ti respecto a la distribución de los datos?**
8. **Si quisieras lograr un grupo de estudiantes más homogéneo, ¿qué cambios propondrías en la selección de estudiantes o en las estaturas?**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Un valor atípico (una estatura muy alta o baja) no tiene ningún efecto significativo sobre el valor de la desviación estándar.	Una desviación estándar de cero indica que no hay variabilidad en el conjunto de datos; todos los valores son idénticos.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece la necesidad de realizar la medida estadística de la dispersión, representa los datos en una tabla y su distribución en un gráfico.
- Expresa la información con lenguaje estadístico (rango, varianza, desviación estándar) e interpreta tendencias de concentración a partir del gráfico.
- Emplea procedimientos de cálculo para la media, la varianza y la desviación estándar, determina el grado de dispersión de un conjunto de datos.
- Justifica conclusiones sobre la homogeneidad o dispersión del grupo, evalúa el significado de la desviación estándar en el contexto.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En una fábrica se produce una serie de botellas plásticas que deben tener exactamente 500 mL de capacidad. Se tomó una muestra de 10 botellas y se midió la cantidad de agua que cada una puede contener: 502; 498; 501; 500; 497; 503; 499; 504; 496; 500.**
   a. Calcula el promedio, el rango, la varianza y la desviación estándar. Indícalos en unidades.
   b. ¿La capacidad de las botellas es homogénea o hay mucha variación? Sustenta tu respuesta con las medidas obtenidas y, si lo consideras pertinente, propón un criterio.
2. **Un agricultor controla la temperatura de sus 10 invernaderos. Las temperaturas registradas (en °C) en un día fueron 22; 21; 23; 24; 25; 19; 26; 20; 28; 32.**
   a. Calcula el promedio, el rango, la varianza y la desviación estándar.
   b. ¿Las temperaturas son homogéneas? Justifica con las medidas de dispersión.
   c. De acuerdo con tu análisis, propón acciones concretas para reducir la variabilidad entre invernaderos.

FORMALIZAMOS



Sistematiza ideas desde los ejemplos, argumenta procesos y dialoga para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

Recuerda

La **variación porcentual** representa la diferencia entre un valor pasado (V_i) y uno presente (V_f) en términos de un porcentaje del valor pasado.

Calcula de la siguiente forma:

$$V_p = \frac{V_f - V_i}{V_i} \times 100\,\%$$

Ejemplo:

Valor inicial: 120

Valor final: 100

$$V_p = \left(\frac{120 - 150}{150}\right) \times 100\,\%$$

$$V_p = (-0{,}2) \times 100\%$$

$$V_p = -20\%$$

La variación porcentual es negativa; por lo tanto, es una disminución.

Ten en cuenta

El monto (M) es la cantidad que se obtiene al sumar el capital y el interés obtenido en un determinado tiempo.

$$M = C + I$$

Por ejemplo, el monto a devolver es

$M = 30\,000 + 9000 = 39\,000$

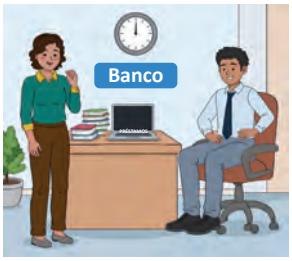
Practica valores

- Distribuye equitativamente las tareas matemáticas en el grupo, para ello, reconoce las fortalezas de cada compañero.
- Escucha atentamente las explicaciones de tus compañeros.

INTERÉS SIMPLE

Concepto de interés simple

Situación: Interés en varios años



María solicita un préstamo de S/2000 con una tasa de interés simple del 10 % anual para pagarlo en 3 años. ¿Cuánto pagará de interés y cuál será el monto total que deberá devolver al finalizar el plazo?

Tiempo	Capital (S/)	Interés (S/)
Año 1	2000	2000 × 10 % = 200
Año 2	2000	2000 × 10 % = 200
Año 3	2000	2000 × 10 % = 200
Total de intereses		600

Al cabo de 3 años, pagará un interés de S/600.

Por lo tanto, si sumamos el capital y el interés para saber cuánto devolverá, sería S/2000 + S/600 = S/2600.

Como se aprecia en el ejemplo anterior, el **interés** es la ganancia o beneficio que produce un capital impuesto durante cierto tiempo bajo ciertas condiciones. Se denomina interés simple cuando la ganancia del capital es constante, y se calcula usando la siguiente expresión matemática: $I = C \times r \times t$

Donde

Capital (C): dinero en préstamo o inversión.

Tasa de interés (r)**:** porcentaje por periodo (por ejemplo, anual) que se aplica al capital. Puede ser expresada como fracción o decimal $10\,\% = \frac{10}{100} = 0{,}10$).

Tiempo (t): duración del préstamo o inversión. Usa el periodo de la tasa (puede ser anual, mensual, días, etc.). Si la tasa es anual y el tiempo está en meses, conviértelos a años.

Situación: Evaluación de un préstamo



Un gremio de artesanos está solicitando un préstamo bancario de S/30 000 con una tasa del 6 % anual con interés simple, para ser pagado en 5 años. Isaías afirma que pagará menos de la cuarta parte del capital en intereses. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

Identificamos los datos y empleamos la expresión.

$C = 30\,000$

$r = 6\,\%$

$t = 5$ años

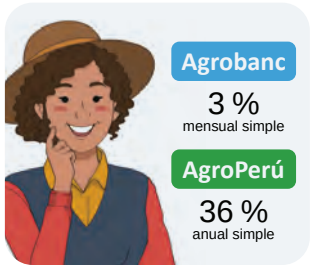
$I = 30\,000 \times (6\,\%) \times 5$

$I = 30\,000 \times \frac{6}{100} \times 5 = 9000$

De ahí que la afirmación es falsa, ya que S/9000 supera a S/7500.

Equivalencias entre tasas de interés

Situación: Una decisión importante



Cecilia necesita un préstamo de S/1000 para comprar materiales para su cosecha. Para ello, consulta a dos bancos. Ella asegura que ambos le ofrecen un mismo interés simple en un año. ¿Cecilia tiene razón?

Analizamos los intereses de cada banco.

- Agrobanc: $\frac{3}{100} \times 1000 = S/30$ por mes

  Entonces, en 12 meses, el interés es $12 \times 30 = S/360$.
- AgroPerú: $\frac{36}{100} \times 1000 = S/360$ al año

  Entonces, en 1 año, el interés es S/360.

Ambos bancos generan el mismo interés en un año. Esto muestra que una tasa del 3 % mensual equivale al 36 % anual, por lo que la afirmación de Cecilia es correcta.

De lo observado en la situación inicial, dos **tasas de interés son equivalentes** cuando generan el mismo interés al aplicarse sobre el mismo capital y durante el mismo tiempo, aunque estén expresadas en unidades de tiempo distintas. Veamos algunas equivalencias.

Tasas equivalentes	Periodo equivalente
2 % mensual < > 24 % anual	1 año = 12 meses
3 % bimestral < > 18 % anual	1 año = 6 bimestres
4 % trimestral < > 16 % anual	1 año = 4 trimestres
6 % trimestral < > 2 % mensual	1 trimestre = 3 meses

Situación: Préstamo para implementar un biohuerto

Milagros desea implementar un biohuerto en su comunidad. El costo total del proyecto es de S/36 000, pero solo cuenta con S/9000. Por ello, decide financiar el monto restante con las siguientes opciones:

- **Banco Eco Vida:** por 3 años con una tasa de interés simple de 5 % anual.
- **Caja Municipal Verde:** por 4 años con una tasa de interés simple de 0,5 % mensual.

Ella afirma que le conviene pedir el préstamo en la Caja Municipal Verde porque le cobrarán menos intereses. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica.

El préstamo por solicitar es S/36 000 – S/9000 = S/27 000.

Calculamos los intereses en cada entidad.

Banco Eco Vida	Caja Municipal Verde
$C = 27\,000$ $r = 5\ \%$ anual $t = 3$ años $I = 27\,000 \times 5\ \% \times 3$ $I = 27\,\cancel{000} \times \frac{5}{\cancel{100}} \times 3 = 4050$	$C = 27\,000$ $r = 0{,}5\ \%$ mensual <> 6 % anual (× 12) $t = 4$ años $I = 27\,\cancel{000} \times 6\ \% \times 4$ $I = 27\,\cancel{000} \times \frac{6}{\cancel{100}} \times 4 = 6480$

No estamos de acuerdo, porque le conviene Banco Eco Vida, ya que le ofrece S/4050 a comparación de Caja Municipal, que le cobra S/6480.

Ten en cuenta

Para calcular el interés, la tasa y el tiempo deben estar expresados en el mismo periodo de tiempo.

Ejemplo:

Si la tasa de interés es de 3 % mensual y el tiempo es en años, antes de calcular el interés, hay que convertir la tasa de interés.

$$3\ \%\ \text{mensual} \xrightarrow{\times 12} 36\ \%\ \text{anual}$$

Recuerda

Para aplicar el interés simple, la tasa y el tiempo deben encontrarse en las mismas unidades.

Ejemplo:

El banco Credilisto ofrece préstamos a una tasa mensual de 0,3 % por 4 años. Si Cecilia decide solicitar un préstamo de S/20 000, ¿cuánto será el interés que deberá pagar?

Para resolver, convierte la tasa mensual a tasa anual, pues el tiempo se encuentra en años

$r = 0{,}3\ \%$ mensual

$r = 0{,}3 \times 12 = 3{,}6\ \%$ anual

Finalmente, aplica la fórmula

$I = C \times r \times t$

$I = \cancel{20\,000} \times \frac{3{,}6}{\cancel{100}} \times 4$

$I = S/2880$

Evalúa tus progresos

- Representa y aplica la fórmula del interés simple.
- Convierte unidades de tasa y tiempo para calcular correctamente.
- Compara préstamos y justifica cuál es más conveniente.

¿Sabías que...?

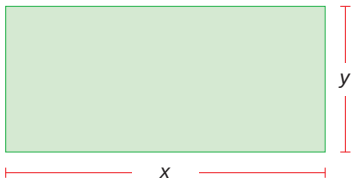
La función cuadrática orienta la modelación de costos e ingresos según el tipo de producción. Posibilita reconocer los mínimos y máximos de la producción, los costos y los puntos de equilibrio; además permite planificar cantidades eficientes, reducir desperdicios y consumo de recursos. Así se sostienen empleos dignos, decisiones responsables y el crecimiento económico sostenible inclusivo.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Concepto de función cuadrática

Situación: Terreno para cercar

Con 40 m de malla metálica se quiere cercar un terreno que tiene forma de un rectángulo. ¿Cuál es la mayor área que podría tener?



- Definimos las variables.
  x = largo y = ancho
- Utilizamos la fórmula del perímetro del rectángulo.
  $2(x + y) = 40$
  $x + y = 20$
  $y = 20 - x$
- Reemplazamos y en la fórmula del área del rectángulo.
  $A = x \cdot y$
  $A = x \cdot (20 - x)$

Luego, la función área será

$A(x) = 20x - x^2$

$A(0) = 20(0) - (0)^2 = 0 - 0 = 0$

$A(4) = 20(4) - (4)^2 = 80 - 16 = 64$

$A(8) = 20(8) - (8)^2 = 160 - 64 = 96$

$A(10) = 20(10) - (10)^2$

$A(10) = 200 - 100 = 100$

- Tabulamos.

Largo x	Área y	Pares ordenados $(x; y)$
0	0	(0; 0)
4	64	(4; 64)
8	96	(8; 96)
10	100	(10; 100)
12	96	(12; 96)
16	64	(16; 64)
20	0	(20; 0)

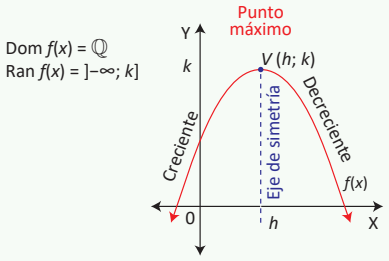
- Graficamos.



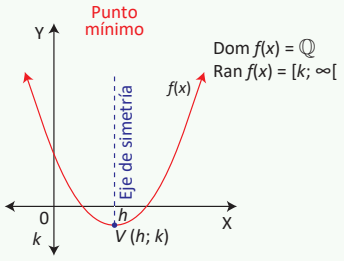
Por lo tanto, el área máxima que podría tener el terreno es de 100 m².

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que una **función cuadrática** tiene la forma $f(x) = ax^2+bx + c$, donde los coeficientes a, b y $c \in \mathbb{Q}$, y $a \neq 0$. La representación gráfica de una función cuadrática es una curva llamada parábola con vértice $(h; k)$. Las coordenadas del vértice son

$$h = -\frac{b}{2a} \text{ y } k = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$



$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a < 0$



$f(x) = ax^2 + bx + c,\ a > 0$

Cuando $b = 0$ y $c = 0$, la función tiene la forma $f(x) = ax^2$.
Cuando $b = 0$, la función tiene la forma $f(x) = ax^2 + c$.
Cuando $c = 0$, la función tiene la forma $f(x) = ax^2 + bx$.

TIC

Practica valores

- Apoya a tus compañeros cuando enfrentan dificultades en la resolución de problemas.
- Asume con esfuerzo y constancia la resolución de problemas, y busca mejorar tus estrategias y resultados en cada intento.

Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$

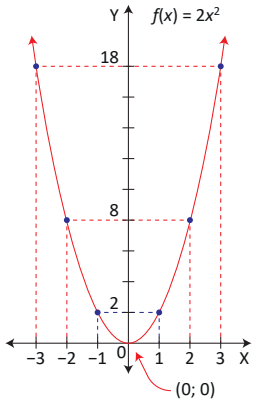
Situación: La gráfica de Rubén

El profesor presenta la siguiente función a sus estudiantes: $f(x) = 2x^2$ y les pide que realicen la gráfica. Rubén realiza la tabulación y la gráfica, luego menciona que, como 2 es positivo, la parábola se abre hacia arriba y el rango inicia en 2.

¿Estás de acuerdo con las afirmaciones de Rubén? Justifica.

Observamos que el coeficiente de x^2 es 2, y como $2 > 0$, la parábola se abre hacia arriba. Ahora realizamos la tabulación y graficamos.

X	Y
−3	18
−2	8
−1	2
0	0
1	2
2	8
3	18



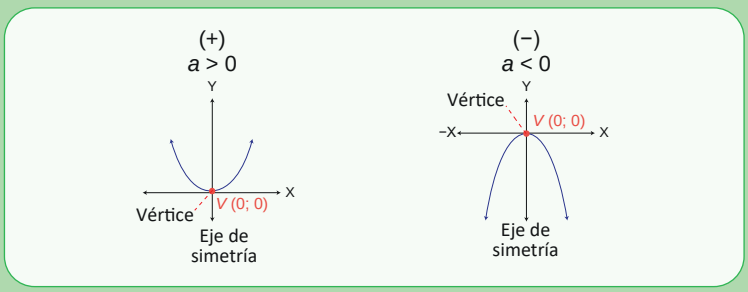
Observamos que el rango comprende el intervalo desde cero hasta el infinito positivo: $\text{Ran}(f) = [0; +\infty]$. Por lo tanto, Rubén interpretó mal el concepto de rango al confundir el extremo del intervalo con el coeficiente 2 del término cuadrático.

De lo observado en la situación inicial, se emplea la **función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2$.** En esta forma, $b = 0$ y $c = 0$.

- Vértice: $V(0; 0)$
- Eje de simetría: el eje Y ($x = 0$)
- Apertura

  Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
  Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).

- Efecto de $|a|$: cuando $0 < a < 1$, la gráfica se contrae verticalmente en un factor de a. Y cuando $a > 1$, la gráfica se dilata verticalmente en un factor de a.



- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{Q}$
- Rango: se determina con el **vértice** y el signo de a.

  Si $a > 0 \Longrightarrow \text{Ran}(f) = [0; +\infty[$.
  Si $a < 0 \Longrightarrow \text{Ran}(f) =]-\infty; 0]$.

Ten en cuenta

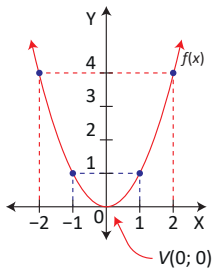
Para graficar una **función cuadrática**, primero calcula y tabula sus valores para distintos x del dominio. Así se obtienen pares $(x; y)$ que, al ubicarse en el plano cartesiano y unirse, forman la parábola característica de la función.

Ejemplo:

$y = f(x) = x^2$

Tabula

X	Y
−2	4
−1	1
0	0
1	1
2	4



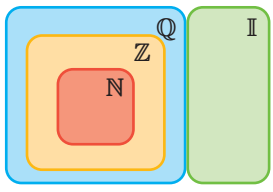
Recuerda

Una función relaciona cada valor de la variable independiente x con un único valor de la variable dependiente y, según una regla de correspondencia. Esta relación puede representarse mediante pares ordenados $(x; y)$.

Ten en cuenta

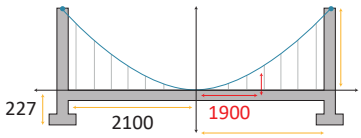
La unión de los números racionales($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{I}$) forman el conjunto de los número reales ($\mathbb{R}$).

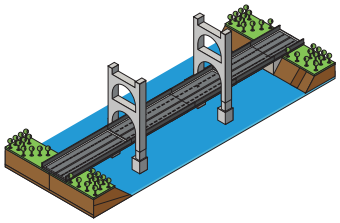
$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$



¿Sabías que...?

Las cuerdas de un puente colgante forman una parábola, ejemplo real de función cuadrática que garantiza resistencia, estabilidad y distribución uniforme del peso en la estructura.

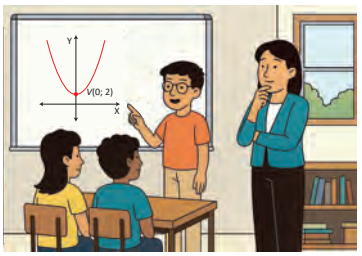




Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$

Situación: El análisis de Wilmer

Tras graficar la función $f(x) = 3x^2 - 2$, Wilmer afirma que el vértice de la gráfica es (0; 2) porque $c = 2$; además, dice que la parábola se abre hacia arriba, pues $3 > 0$. ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Wilmer? Justifica tu respuesta.

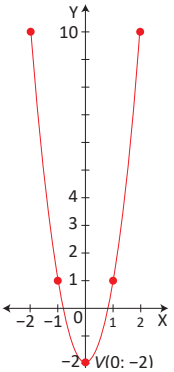


- Los coeficientes de cada término de la ecuación son $a = 3$; $b = 0$; $c = -2$.
- Como $b = 0$, el vértice de la gráfica es $(0; c)$, entonces $V(0; -2)$.
- Como $a > 0$, esto es, $3 > 0$, la gráfica se abre hacia arriba.

No estamos de acuerdo, porque si bien es cierto que la parábola se abre hacia arriba, el vértice es (0; −2) y no (0; 2).

- Tabulamos y graficamos.

X	Y
−2	10
−1	1
0	−2
1	1
2	4



De lo observado en la situación inicial, se emplea la **función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$.** En esta forma, $b = 0$.

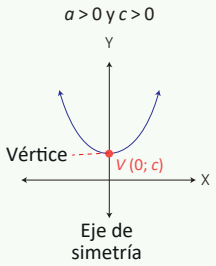
- Vértice: $V(0; c)$
- Eje de simetría: el eje Y ($x = 0$)
- Apertura

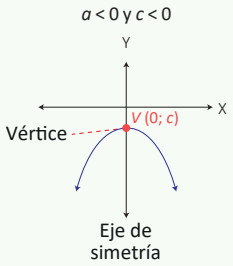
  Si $a > 0$, la parábola se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba).
  Si $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo (cóncava hacia abajo).

- Efecto de c: traslada la gráfica c unidades en dirección vertical; por eso, el vértice está en $y = c$.

  Si $c > 0$, el vértice se ubica a c unidades por encima del origen de coordenadas en el eje Y.

  Si $c < 0$, el vértice se ubica a c unidades por debajo del origen de coordenadas en el eje Y.





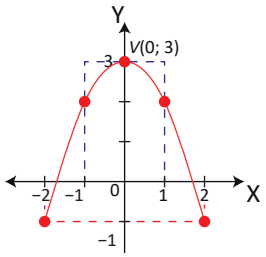
- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{Q}$
- Rango Si $a > 0 \Longrightarrow \text{Ran}(f) = [c; +\infty[$
  Si $a < 0 \Longrightarrow \text{Ran}(f) =]-\infty; c]$

Ten en cuenta

Cuando el coeficiente del término cuadrático es negativo, la parábola se abre hacia abajo.

$f(x) = -x^2 + 3$

X	−2	−1	0	1	2
Y	−1	2	3	2	−1



Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx$

Situación: Distancia recorrida

La trayectoria de una pelota está representada por la función $f(x) = -x^2 + 4x$, donde x representa la distancia horizontal desde el punto de lanzamiento, y $f(x)$, la altura que alcanza la pelota, ambas en metros. Luego de graficar la función, Luisa afirma que la abscisa del vértice es −2, pues $h = -\frac{4}{2(1)} = -2$ y la ordenada es 4. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.

- Los coeficientes de cada término de la ecuación son $a = -1$; $b = 4$; $c = 0$.
- Como $a < 0$, esto es $-1 < 0$, la gráfica se abre hacia abajo.
- El vértice de la gráfica es el punto $V(h; k)$.

$$h = -\frac{b}{2a}$$

$$h = -\frac{4}{2(-1)} = 2$$

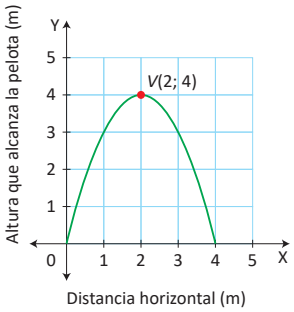
$$h = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$$

$$k = f(2) = -(2)^2 + 4(2) = 4$$

- Tabulamos y graficamos valores.

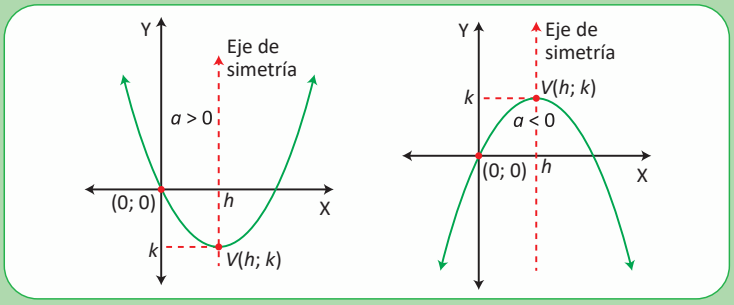
$y = f(x) = -x^2 + 4x$

X	Y
0	0
1	3
2	4
3	3
4	0



Por lo tanto, la afirmación es falsa porque considera que la abscisa del vértice es $h = -2$ cuando es $h = 2$.

Para estudiar la situación inicial, recurrimos a la función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx$, donde el término constante $c = 0$. Con su gráfica se identifican las características básicas de la parábola:



- Dominio: $\text{Dom}(f) = \mathbb{Q}$
- Vértice: $V(h; k)$ con $h = -\frac{b}{2a}$, $k = f(h)$.
- Eje de simetría: la recta $x = h$ (paralela al eje Y).
- Apertura, punto máximo o mínimo y rango:

  Si $a > 0 \Longrightarrow$ la parábola se abre hacia arriba (cóncava hacia arriba), además tiene un valor mínimo en el vértice $V(h; k)$ y su rango es $\text{Ran}(f) = [k; +\infty[$.

  Si $a < 0 \Longrightarrow$ la parábola se abre hacia abajo (cóncava hacia abajo), además tiene un valor máximo en el vértice $V(h; k)$ y su rango es $\text{Ran}(f) =]-\infty; k]$.
- Intersección con el eje Y: además como $c = 0$; $f(x) = x(ax + b) \Longrightarrow x = 0$; $x = -\frac{b}{a}$; la gráfica de la parábola pasa por los puntos: $(0; 0)$; $(-\frac{b}{a}; 0)$.
- Cuando $0 < a < 1$, la gráfica se contrae verticalmente en un factor de a; cuando $a > 1$, se dilata verticalmente en un factor de a.

Recuerda

Coordenadas del vértice: $V(h; k)$

$$h = \frac{-b}{2a}$$

$$k = f\left(\frac{-b}{2a}\right) = f(h)$$

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de dependencia en situaciones problemáticas (por ejemplo: área, trayectoria); modélalas con funciones cuadráticas y representan sus variaciones en tablas y gráficos (parábolas).
- Expresa con lenguaje matemático las características de la función cuadrática (vértice, eje de simetría, concavidad, dominio y rango) e interpreta la información en gráficos y tablas.
- Emplea procedimientos para hallar el vértice, el eje de simetría y las intersecciones, e identifica la concavidad según el signo del coeficiente.
- Justifica que el vértice representa el valor máximo o mínimo de la función y evalúa la validez de las soluciones obtenidas en el contexto.

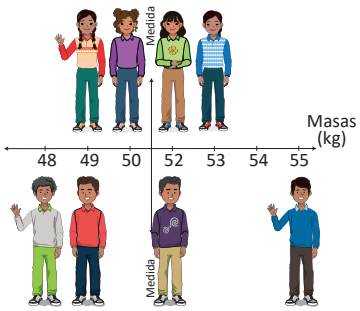
¿Sabías que...?

Las medidas estadísticas permiten analizar la productividad, costos y salarios en microemprendimientos. Los estudiantes comparan ventas, detectan variaciones, fijan metas y justifican inversiones responsables, lo cual promueve el empleo digno mediante decisiones basadas en datos, ciencia y ciudadanía sostenible.

Ten en cuenta

Las **medidas de dispersión** muestran la variabilidad de una distribución de datos, los cuales indican si están muy alejados de la media o muy cercanos a ella.

Cuanto mayor sea su valor, mayor será la variabilidad; cuanto menor sea, más homogénea será la distribución de los datos respecto a la media.



En el gráfico, las masas de las mujeres están más cerca de la media, es decir, presentan menos variabilidad; y son más homogéneas que las de los varones, puesto que sus valores están más alejados de la media.

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Medidas de dispersión: rango para datos no agrupados

Situación: Análisis de estaturas



El profesor menciona que, durante un desayuno familiar, se juntaron los primos y se preguntaron entre ellos por sus alturas (en cm). Estas fueron 155; 150; 148; 160; 158; 151; 149. El profesor les pregunta: "¿En cuánto se diferencia la estatura del más alto a la del más bajo del grupo?".

Observamos que las estaturas son distintas, entonces procedemos a ordenarlas.

148; 149; 150; 151; 155; 158; 160

Con ello reconocemos los extremos de estos datos: 160 cm y 148 cm.

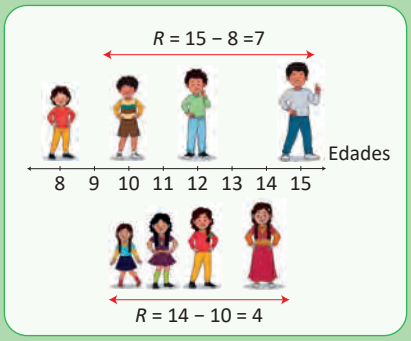
De esos números, ahora generamos la diferencia.

$$160 - 148 = 12$$

Por lo tanto, el más alto y el más bajo se diferencian por 12 cm.

El problema resuelto ilustra que el **rango o recorrido (*R*)** es la medida de dispersión. Se calcula restando el valor máximo menos el valor mínimo de un conjunto de datos. Se obtiene usando la siguiente expresión:

$$R = V_{máx} - V_{mín}$$



Situación: Comparación de notas

Juan, Martín y Nicolás registraron sus calificaciones en Inglés durante cuatro evaluaciones.

	Ev. 1	Ev. 2	Ev. 3	*x*
Juan	14	16	12	14
Martín	13	12	17	14
Nicolás	13	14	15	14

Juan afirma que, como tiene el mismo promedio que sus compañeros, su rendimiento académico es equivalente. En cambio, Nicolás sostiene que su desempeño es más regular, porque sus notas están más próximas al promedio que las de sus compañeros.

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.

- Observamos que los tres compañeros tienen un promedio de 14 puntos.
- Calculamos el rango.

  Juan → 16 − 12 = 4

  Martín → 17 − 12 = 5

  Nicolás → 15 − 13 = 2

Notamos que Nicolás tiene sus notas menos dispersas en comparación con sus compañeros; eso nos indica que su rendimiento es más regular. Mientras que Juan tiene el mismo promedio, pero sus notas son más dispersas. Por lo tanto, la afirmación de Juan es errónea.

Medidas de dispersión: varianza y desviación estándar para datos no agrupados

Situación: La competencia interescolar



En una prueba de ciencias, dos grupos representaron a su colegio.

- Grupo A: 300; 300; 300; 300; 300
- Grupo B: 250; 270; 300; 330; 350

Ambos promediaron 300 puntos.
¿Cuál tuvo un rendimiento más regular?

El grupo A mostró puntajes idénticos, mientras que el grupo B varió entre 250 y 350. Por ello, el grupo A fue más constante.

El problema resuelto ilustra que la **varianza (*V*)** es una medida de dispersión que permite conocer qué tan cerca o qué tan lejos están los valores respecto a su media. La varianza es el promedio de los cuadrados de los desvíos de los datos respecto a su media. Para datos no agrupados en una muestra, se calcula de la siguiente manera:

$$V = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \overline{x})^2}{n}$$

i: dato que va desde 1 a *n*. $\sum$: sumatoria x_i: valor de la variable
$\overline{x}$: media aritmética; *n*: tamaño de la muestra

Desviación estándar (*s*). También denominado desviación típica, es el grado de dispersión de los datos respecto a la media aritmética de la distribución. Su valor se obtiene extrayendo la raíz cuadrada de la varianza.

$$s = \sqrt{V}$$

Situación: Comparación de precios

Los precios de seis productos comprados en las tiendas A y B se registraron en la siguiente tabla:

Tienda A	S/4	S/4,25	S/5	S/5,5	S/5,25	S/6
Tienda B	S/1	S/3	S/2,5	S/7	S/6,5	S/10

Andrés, después de evaluar los precios, afirma que el promedio en ambos es 5 y que los precios más altos están en B, además señala que la varianza es mayor ahí; por tanto, hay mayor concentración hacia el promedio. ¿Compartes esta afirmación? Justifica.

Hallamos la medida de los datos de ambas tiendas

$$\overline{x}_A = \frac{4 + 4{,}25 + 5 + 5{,}5 + 5{,}25 + 6}{6} = 5 \qquad \overline{x}_B = \frac{1 + 3 + 2{,}5 + 7 + 6{,}5 + 10}{6} = 5$$

Calculamos la varianza de las tiendas A y B sabiendo que $\overline{x}_A = \overline{x}_B = 5$

$$V_A = \frac{(5-4)^2 + (5-4{,}25)^2 + (5-5)^2 + (5-5{,}5)^2 + (5-5{,}25)^2 + (5-6)^2}{6} = 0{,}479$$

$$V_A = \frac{(5-1)^2 + (5-3)^2 + (5-2{,}5)^2 + (5-7)^2 + (5-6{,}5)^2 + (5-10)^2}{6} = 9{,}583$$

Calculamos la desviación estándar

$$S_A = \sqrt{V_A} = \sqrt{0{,}479} = 0{,}692 \qquad S_B = \sqrt{V_B} = \sqrt{9{,}583} = 3{,}096$$

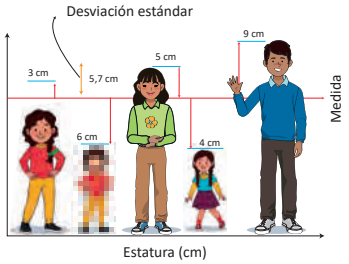
Se observa que la desviación estándar en B es mayor que en A, lo cual indica que la mayoría de los valores no están concentrados hacia el promedio. Por ejemplo, hay valores muy bajos como 1 y muy altos como 10.

Recuerda

Las propiedades de la varianza son

1. La varianza es siempre un valor positivo o cero, en el caso en que los datos sean iguales.
2. Si a todos los valores de la variable se les suma un número, la varianza no varía.
3. Si todos los valores de la variable se multiplican por un número, la varianza queda multiplicada por el cuadrado de ese número.

Ten en cuenta



En la imagen se observa poca dispersión de las estaturas respecto a la media. Las estaturas se encuentran alrededor del valor de (5,7 cm), excepto 6 cm y 9 cm.

Evalúa tus progresos

- Representa las características de una población mediante medidas de dispersión.
- Expresa tu comprensión de la desviación estándar respecto a la media para datos no agrupados.

Actividad lúdica



¡Conecta jugando! Examina las reglas del juego, relaciona estrategias y compara tus acciones con sentido matemático.

El robot Saltarín

Propósito de aprendizaje

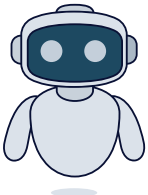
Representa y expresa la trayectoria de un objeto (robot Saltarín) mediante un modelo de función cuadrática incompleta utilizando gráficos cartesianos, empleando procedimientos para obtener raíces cuadradas y hallar los parámetros, el vértice, la altura máxima y los puntos de aterrizaje (ceros) de la función. Justifica y argumenta afirmaciones sobre la trayectoria del robot, evalúa cómo la variación de los parámetros afecta la forma y la posición del salto.

Practica valores

- Muestra disposición para replantear el plan de trabajo cuando surgen limitaciones de tiempo; prioriza las tareas esenciales y redistribuye los roles dentro del equipo.
- Cede la palabra cuando otro desea participar, valora sus aportes y garantiza turnos equitativos de intervención.

1. Situación

El robot Saltarín brinca describiendo una parábola del tipo $f(x) = ax^2 + c$, donde a define la abertura y orientación de la parábola (si es negativa, el salto sube y baja), y c define la altura inicial del robot.



¿Puedes programar un salto con una función del tipo $f(x) = ax^2 + c$ que permita al robot Saltarín superar un muro de 3 unidades de altura sin chocar, y aterrice dentro de un área segura entre –3 y 3 en el eje X?

2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Los estudiantes forman equipos de 2 a 3 participantes.

b. Cada equipo trabaja en un plano cartesiano (real o virtual).

c. Cada equipo debe tener fichas o piezas que representen al robot Saltarín.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Programación del salto

a. Cada equipo selecciona una función cuadrática incompleta

$f(x) = ax^2 + c$

Donde

a puede tomar valores como –1; –0,5; –2 (siempre negativos si simulan un salto).

c es la altura inicial del robot (por ejemplo, $c = 8$).

- Ejemplo concreto

  Si el equipo elige

  $y = -2x^2 + 8$

  el robot alcanza una altura máxima de 8 unidades en $x = 0$.

  Los puntos de aterrizaje se hallan cuando $y = 0$

  $0 = -2x^2 + 8$

  $2x^2 = 8$

  $x = \pm\sqrt{4}$

  $x = \pm 2$

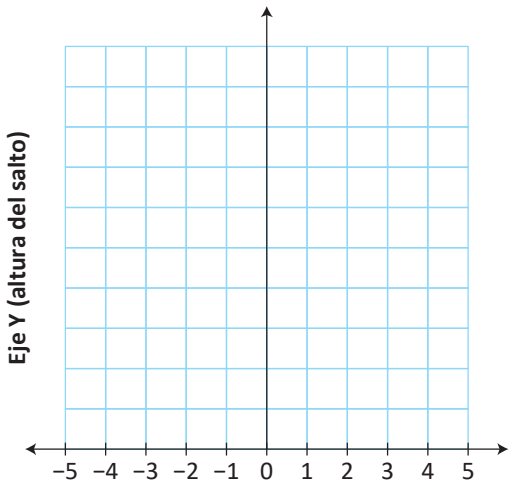
Representación gráfica

b. Cada equipo dibuja en el tablero la parábola elegida.

c. Cada equipo marca el vértice en (0; *c*), que es la altura máxima del salto.

d. Cada equipo calcula y dibuja los puntos de aterrizaje (ceros de la función).

Tablero cuadriculado



4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué representa el vértice de la parábola en el contexto del salto del robot? ¿Por qué el vértice se encuentra en el punto (0; *c*) (0; *c*) (0; *c*) en esta función: $f(x) = ax^2 + c$?

b. ¿Cómo afecta el valor de *a* a la anchura o "apertura" del salto? ¿Un valor más negativo de a hace la parábola más ancha o más estrecha?

c. ¿En qué puntos el robot toca el suelo? ¿Cómo se relacionan estos puntos con los ceros o raíces de la función?

d. Si queremos que el robot pase por encima de un obstáculo más alto, ¿qué conviene modificar: *a* o *c*?, ¿por qué?

e. Si queremos que el robot aterrice más lejos, ¿cómo deberíamos cambiar el valor de *a*? Explica.

f. ¿Qué consecuencias tendría elegir un valor de *a* demasiado negativo (muy estrecho)?

g. ¿Hay algún valor de *a* o *c* que haga imposible el salto? Explica con la función.

h. ¿Qué diferencia hay entre una parábola cóncava hacia arriba y cóncava hacia abajo? ¿Cuál modelo tiene sentido para un salto real?

Evalúa tus progresos

- Establece la trayectoria de un salto (robot Saltarín) mediante un modelo de función cuadrática incompleta y la representa en un gráfico cartesiano (parábola).
- Expresa con lenguaje matemático el significado de los parámetros a y c (concavidad y altura inicial), así como las coordenadas del vértice y los ceros de la función, interpretando la información en la gráfica.
- Emplea procedimientos como la sustitución y la resolución de ecuaciones cuadráticas (obtención de las raíces) para determinar a y c, y calcular la altura máxima y los puntos de aterrizaje (ceros) del salto.
- Justifica y argumenta que el vértice (máximo) corresponde a la altura máxima, evaluando cómo la variación de a y c afecta las características del salto (altura y distancia de aterrizaje).

UNIDAD

5

Analizamos datos para predecir la demanda energética y la rentabilidad agrícola

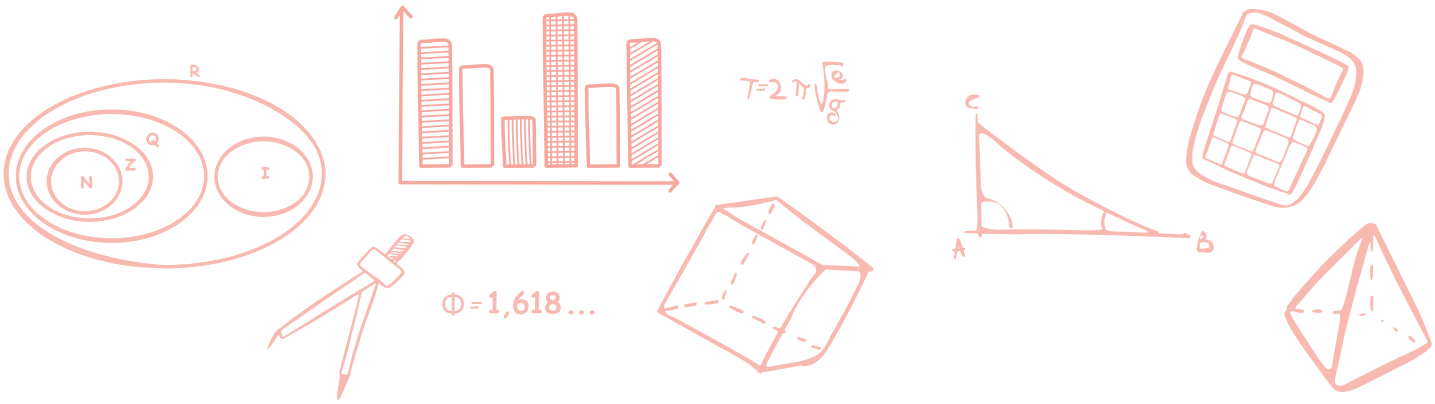


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

9 INDUSTRIA, INNOVACIÓN E INFRAESTRUCTURA

Este objetivo promueve la construcción de infraestructuras resistentes, la industrialización sostenible y la innovación. Se conecta directamente con:

- La mejora de la infraestructura energética o agrícola.
- El análisis de datos sobre consumo, producción o distribución para tomar decisiones que optimicen procesos industriales o agrícolas.
- El diseño de modelos predictivos que fomenten la innovación en sectores estratégicos como el transporte de energía o la agricultura.





Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque de búsqueda de la excelencia
  - Flexibilidad y apertura
  - Superación personal
- Enfoque ambiental
  - Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional
  - Justicia y solidaridad

Fuente: Freepik.es

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construyo mis conocimientos

Notación exponencial y científica
- Notación científica

Sistema de ecuaciones lineales
- Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas
- Resolución con el método gráfico
- Resolución con el método de sustitución

Escala
- Factores de escala en figuras y cuerpos geométricos

Transformaciones geométricas isométricas
- Traslación
- Rotación
- Simetría axial y central
- Composición de isometrías

Transformaciones geométricas
- Homotecias

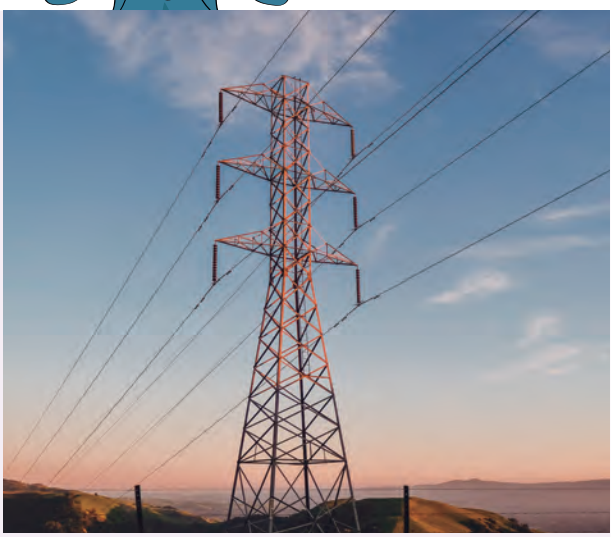
Investigamos



Analiza cada situación, asume un rol, resuelve y explica tus conclusiones matemáticas usando el anexo.

SITUACIÓN
Predecimos la demanda de energía y expansión de la infraestructura

Las ciudades del norte del Perú se están expandiendo rápidamente debido al desarrollo de las actividades agroindustriales, al aumento de las exportaciones y al crecimiento poblacional. Por ello, es necesario planificar la expansión de la red eléctrica para cubrir la demanda de energía en el futuro. Como estudiante investigador, deberás diseñar un modelo que permita predecir cuánta energía se necesitará, de modo que las autoridades puedan tomar decisiones para mejorar la red eléctrica.



Fuente: Freepik.es

¿Cómo puedes construir un modelo que te permita predecir cuánta energía necesitarán las ciudades considerando el consumo de energía, el crecimiento de la población y el incremento de las exportaciones?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Analiza** los datos de los últimos 10 años sobre la producción y el consumo de energía eléctrica en tu región. Luego, organiza la información en una tabla utilizando expresiones en notación exponencial y científica. Después, elige una ciudad de tu región.
- **Modela** el crecimiento de la demanda energética anual para la cuidad elegida, luego relaciónalo con el aumento de la población, el desarrollo de la actividad agroindustrial y las exportaciones. Para ello, apóyate en un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- **Elabora** un mapa de tu región a escala conveniente donde se ubiquen plantas de producción de electricidad (hidroeléctricas térmicas y/o eólicas, centrales térmicas y/o eólicas, etc.). Utiliza una leyenda clara y atractiva para facilitar la visualización.
- **Propón** la ubicación de nuevas subestaciones eléctricas a partir de la subestación eléctrica más cercana a la ciudad elegida o distrito, de forma que la energía pueda llegar a diferentes puntos de la región y cubrir la demanda proyectada. Considera aplicar algunas de las transformaciones geométricas (traslación, rotación, simetría, etc.) en el plano.
- **Evalúa** el modelo planteado en función de los datos recopilados y las proyecciones de consumo energético en el futuro.

SITUACIÓN
Maximizamos los beneficios económicos de diversos cultivos

El Ministerio de Desarrollo Agrario y Riego ha anunciado que el próximo año se incrementará el cultivo de productos transitorios para fortalecer la seguridad alimentaria del país. Ante esta noticia, los agricultores de tu región desean saber cuáles son los cultivos que podrían generar mayores ganancias. Como estudiante coordinador de proyectos, diseñarás un plan de evaluación de la rentabilidad de cultivos para recomendar qué sembrar en la próxima temporada.



Fuente: El Peruano (2022).

¿Cómo puedes evaluar la rentabilidad de los cultivos considerando su rendimiento, sus costos de producción e ingresos esperados, y tomando en cuenta los recursos disponibles y las características geográficas de tu región?

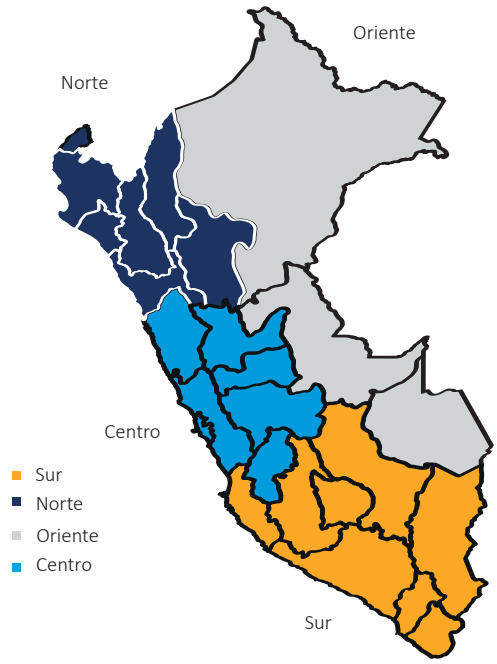
Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Investiga** los cultivos más frecuentes en tu región, analiza su rendimiento, sus costos de producción e ingresos, y selecciona dos. Organiza los datos de los dos cultivos seleccionados en una tabla utilizando notación científica y exponencial para expresar las cantidades.
- **Modela** la distribución de recursos (como tierra, presupuesto o mano de obra), de los cultivos seleccionados, para ello, apóyate en un sistema de ecuaciones lineales que permita determinar cuántas hectáreas asignar a cada cultivo, y así maximizar las ganancias sin exceder los recursos disponibles.
- **Elabora** un mapa de tu región, luego, señala las zonas de producción y aquellas con mayor rentabilidad. Utiliza una escala adecuada y una leyenda clara para comunicar visualmente tu análisis.
- **Propón** la ubicación de nuevas subestaciones eléctricas a partir de la subestación eléctrica más cercana a la ciudad elegida o distrito, de forma que la energía pueda llegar a diferentes puntos de la región y cubrir la demanda proyectada. Considera aplicar algunas de las transformaciones geométricas (traslación, rotación, simetría, etc.) en el plano.
- **Evalúa** la propuesta considerando los datos analizados y el modelo construido. Justifica por qué los cultivos seleccionados resultan ser los más rentables y eficientes para las condiciones de la región.

Anexo A: Predecimos la demanda de energía y expansión de la infraestructura

1. Datos estadísticos sobre el consumo de energía eléctrica

Consumo de electricidad por zonas geográficas, 2015



Fuente: Adaptado de Osinergmin (2016).

Consumo de electricidad

Zona	2005		2010		2015	
	Miles de GWh	%	Miles de GWh	%	Miles de GWh	%
Norte	2,2	11	3,9	13	5,6	14
Centro	13,2	64	18,0	61	23,3	59
Sur	4,9	24	7,3	25	10,2	25
Oriente	0,3	1	0,5	2	0,7	2
Total	20,6	100	29,4	100	39,8	100

Fuente: Adaptado de Osinergmin (2016).

2. Tablas de demandas energéticas, crecimiento de la población y exportaciones

a. Evolución anual aproximada de la demanda energética en Perú

Año	Demanda/Generación eléctrica (GWh)	Crecimiento anual aproximado (%)	Fuente/Comentarios
2018	~53 900	-	COES Estadísticas anuales
2019	~54 000	0,2	Estimado, crecimiento bajo
2020	~53 000	−1,9	Caída por pandemia COVID-19
2021	~54 000	1,9	Recuperación inicial pospandemia
2022	56 084	3,9	Reporte sectorial 2022
2023	58 393	4,1	Reporte sectorial 2023
2024	60 728	4,0	Datos preliminares SNMPE

Información propuesta y adaptada para fines educativos

b. Datos históricos y proyecciones del crecimiento poblacional anual en el Perú

Año	Población estimada (millones)	Crecimiento anual aproximado (%)
2007	28,22	-
2008	28,52	1,07
2009	28,82	1,05
2010	29,12	1,04
2011	29,42	1,03
2012	29,72	1,02
2013	30,02	1,01
2014	30,32	1,00
2015	30,62	0,99
2016	30,92	0,98
2017	31,24	1,04
2018	31,54	0,96
2019	31,84	0,95
2020	32,14	0,94
2021	32,44	0,93
2022	32,74	0,92
2023	33,04	0,91
2024	34,04	2,98 (proyección especial)

c. Datos históricos de las exportaciones agroindustriales

Año	Valor de exportaciones agroindustriales (millones US$)	Comentarios principales
2019	~7000	Año base con crecimiento sostenido previo a pandemia
2020	~6800	Ligera caída por impacto COVID-19
2021	10 083 (aprox.)	Recuperación fuerte, volumen exportado 557 000 toneladas
2022	~9000	Volumen 584 000 toneladas (+4 %), valor cayó −17,4 %
2023	10 165	Crecimiento +3,9 %; lideran uvas, arándanos, palta
2024	12 399	Récord histórico: +21,8 % frente a 2023

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Maximizamos los beneficios económicos de diversos cultivos

1. Tablas informativas sobre el rendimiento y la producción de principales cultivos

a. Rendimiento de principales cultivos transitorios por región. Enero-diciembre 2022-2023 (kilogramos/hectárea)

Región	Años	Trigo	Maíz a. duro	Maíz amiláceo	Arroz cáscara	Cebada grano	Quinua	Ají	Piquillo	Tomate	Zapallo
Nacional	2022 2023	1767 1747	4788 4879	1787 1756	8325 8084	1781 1936	1639 1805	10 238 12 270	25 811 24 252	41 307 43 331	26 762 26 639
Amazonas	2022 2023	1037 1064	2518 2536	942 1895	9100 9018	945 959	- -	6132 4997	- -	8137 7962	9050 9440
Áncash	2022 2023	111 907 94 416	1337 1354	10 769 12 306	1018 1049	1200	5279 5197	- -	- -	21 021 20 896	41 014 41 582
Apurímac	2022 2023[P]	2534 2577	4605 3226	2574 2340	- -	2505 2373	2388 2504	3472 3977	- -	19 041 18 849	18 281 20 287
Arequipa	2022 2023[P]	5961 6518	8078 8062	2913 3247	13 552 13 322	2746 2606	3677 3766	4358 4069	- -	50 018 50 076	37 173 36 504
Ayacucho	2022 2023	1592 1940	2416 2471	1674 1871	3000 -	1473 1871	1836 2035	2955 3000	- -	14 538 13 277	14 316 13 239
Cajamarca	2022 2023	992 1005	3718 3784	1011 991	8017 7977	932 926	1345 1331	6497 6512	- -	7747 7607	15 510 15 386
Callao	2022 2023	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -	- -
Cusco	2022 2023	2347 1970	1646 1784	2958 2365	1907 1972	2220 2291	2691 1849	- -	- -	14 675 12 889	19 765 19 601
Huancavelica	2022 2023	1578 1627	1617 1845	1949 2213	- -	1670 1817	1572 1667	- -	- -	13 935 13 896	14 841 13 656
Huánuco	2022 2023	1622 1639	3948 3945	1327 1346	6409 6732	1761 1820	1138 1221	4610 4429	- -	18 243 18 009	26 775 25 868
Ica	2022 2023	2258 2136	9114 9076	3655 3279	- -	2576 2570	2718 2418	22 724 37 477	- -	102 040 102 762	33 720 33 345
Junin	2022 2023	2540 2455	4034 3517	2006 2108	3043 3208	2247 2196	2313 2192	6252 5914		12 250 12 367	14 537 14 251
La Libertad	2022 2023	2310 2372	8759 7700	1800 1739	10 771 10 716	2337 2814	1505 1494	24 021 24 458	30 090 29 990	28 241 30 206	28 532 33 533
Lambayeque	2022 2023	919 1035	6717 7195	2092 2233	9197 8591	800 1522	2968 2000	-	35 556 24 814	24 376 23 292	25 424 31 364
Lima	2022 2023	2069 2154	10 001 9889	2631 3056	- -	2301 2452	- 7000	8718 8809	- 5000	31 889 33 535	26 849 29 167
Lima metropolitana	2022 2023	7798 7810	8259 8578	3305 3185	- -	5180 5169	2157 2270	18 636 17 085	- -	23 201 23 784	32 310 30 929

Fuente: Adaptado de Midagri (2023).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

b. Producción de principales cultivos por mes. Enero-diciembre 2022-2023

(tonelada)

Cultivos	Año	Ene-Dic	Ene	Feb	Mar	Abr	May	Jun	Jul	Ago	Set	Oct	Nov	Dic
Trigo	2022 2023	212 512 193 549	36 67	53 67	142 93	1183 526	5054 5855	43 674 40 895	74 908 70 207	50 109 54 446	20 912 14 069	9877 3103	3096 4262	3467 3
Maíz amarillo duro	2022 2023	1 255 631 1 330 989	118 067 131 074	106 099 117 844	76 862 74 749	83 335 70 536	85 835 91 698	142 607 150 475	155 201 204 748	97 076 106 771	82 501 87 963	77 925 81 733	83 108 100 890	147 014 112 510
Maíz amiláceo	2022 2023	353 208 316 748	248 497	990 955	2363 974	26 011 16 344	93 519 60 877	121 138 128 917	83 836 80 850	16 433 23 256	6939 2856	723 390	430 467	569 365
Arroz cáscara	2022 2023	3 439 013 3 367 089	204 423 224 516	190 267 170 385	276 310 316 004	340 746 427 564	538 506 489 220	680 380 463 920	343 514 265 556	137 481 157 487	138 146 148 350	156 078 169 531	154 574 220 583	278 589 313 972
Cebada grano	2022 2023	221 815 211 143	80 51	60 38	224 43	15 126 1984	26 209 16 858	55 955 59 709	77 350 77 242	36 165 42 099	10 251 12 935	186 153	197 28	13 4
Quinua	2022	114 212	1647	1982	3271	35 137	40 143	20 936	5909	1088	397	1308	1553	839

Fuente: Adaptado de Midagri (2023).

2. Cuadros estadísticos de costos de producción agrícola

a. Perú: Costos promedio de producción de los primeros 70 productos agrícolas, según valor bruto de producción agrícola, 2018

(Soles)

Ord.	Producto	Costo (S/ kg)	Precio Productor (S/ kg)	Costo (S/ Ha)	Desviación (S/ Ha)	Máx. (S/ Ha)	Mín. (S/ Ha)	N.° UA	Met. 1/
1	Arroz	0,67	1,00	4723,98	2355,36	18 535,25	380,01	476	M1
2	Papa	0,48	0,82	10 405,50	4148,18	25 061,21	1302,09	257	M2
3	Café	2,53	5,51	2130,11	1611,51	12 155,00	137,13	336	M1
4	Espárrago	1,48	3,34	11 017,50	5613,06	38 527,78	601,85	93	M1
5	Uva	2,65	2,45	52 802,21	25 420,04	204 921,51	1887,21	129	M1
6	Maíz amarillo duro	0,66	0,91	3067 23	2145,28	16 450,00	88,00	846	M1
7	Alfalfa	0,07	0,21	3608,69	3401,12	36 466,67	393,23	230	M2
8	Arándano	6,27	7,02	40 754,53	27 360,75	142 590,00	12 110,00	21	M1
9	Plátano	0,61	0,60	13 352,18	6699,29	50 806,35	259,66	165	M1
10	Cacao	3,81	6,06	5671,21	3427,92	21 325,26	240,00	299	M2
11	Caña para azúcar	0,05	0,07	6396,39	4890,69	38 480,00	1674,85	72	M1
12	Palta	0,99	3,32	13 373,28	8035,49	73 095,11	554,95	144	M1
13	Yuca	0,30	0,66	3713,15	2654,36	22 831,14	59,11	155	M2
14	Aceituna	1,53	0,77	6925,09	3585,51	26 831,14	531,20	146	M1
15	Braquearia	0,01	0,66	388,47	293,75	1506,05	1,26	123	M1
16	Maíz amiláceo	1,04	2,67	1421,24	965,34	5640,96	215,94	122	M2
17	Cebolla	0,27	0,73	14 925,22	3972,68	22 399,92	469,11	49	M1
18	Mandarina	0,27	0,24	10 452,56	3850,27	18 713,96	550,00	71	M1
19	Avena forrajera	0,01	0,31	1504,38	829,30	4955,29	371,65	183	M2
20	Maíz choclo	0,28	1,08	2772,51	1641,75	6060,54	239,23	53	M2
21	Alcachofa	0,78	2,64	12 835,39	8195,46	39 064,60	9590,30	21	M2
22	Naranja	0,24	0,58	2243,87	1632,00	5299,57	165,89	56	M1
23	Mango	0,42	0,60	8244,10	4316,26	17 577,50	1221,34	59	M1
24	Piña	0,30	0,70	5067,99	2328,56	8114,78	450,82	26	M2
25	Frijol grano seco	0,94	3,44	1281,60	964,99	7967,14	154,79	79	M2
26	Tomate	0,16	1,14	20 077,75	5205,33	22 566,71	1796,55	19	M1
27	Maíz chala	0,10	0,15	4673,50	3415,59	22 180,36	830,17	179	M1
28	Páprika	1,92	7,36	15 096,87	7687,13	37 113,21	3987,62	18	M3
29	Trigo	0,96	1,60	1290,90	868,52	5167,50	283,33	65	M2
30	Cebada	1,03	1,30	1548,18	1494,67	6030,00	225,00	47	M2

Fuente: Adaptado de INEI (2021).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

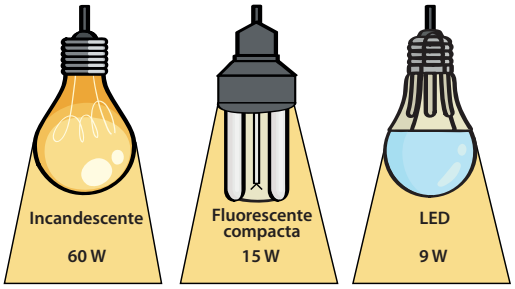
Exploramos



Recuerda lo aprendido, reflexiona con tus compañeros y prepárate para enfrentar estos desafíos.

1. Focos de ahorro

Una comunidad, de aproximadamente 100 000 hogares, quiere promover el uso eficiente de la energía generada por una central hidroeléctrica, que produce 263 (considera que 1 MW = 10^6 W). Se cuenta con la siguiente información:



Se estima que $\frac{2}{5}$ del total de hogares utilizan, en promedio, cinco focos incandescentes para iluminar su vivienda durante 4 horas al día, mientras que $\frac{1}{5}$ emplea cuatro focos fluorescentes en el mismo periodo.

a. ¿Cuánta energía diaria se podría ahorrar si todos esos hogares cambiaran sus focos por luces LED de 9 W?

b. Se afirma: "$1{,}5 \times 10^5$ W es mayor que 15×10^4 W porque tiene una potencia 10 veces mayor". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Orden en los virus

Un grupo de investigadores diseña una infografía sobre virus según su tamaño, pero en ella se han cometido errores en el uso de potencias de base 10 (Considera 1 nm = 1×10^{-9} m).

a. Observa con atención la información de los organismos, evalúa los valores en la tabla, identifica los errores y corrige.



Pithovirus
($1{,}5 \times 10^{-0{,}6}$ nm)

Mimivirus
(400 nm)

Bacteriófago T4
($2{,}25 \times 10^3$ nm)



Zica
(50 nm)

VIH
(120 nm)

Organismo	Metros (m)
Pithovirus	$1{,}5 \times 10^{-3}$
Mimivirus	$4{,}0 \times 10^{-7}$
Bacteriófago T4	$2{,}25 \times 10^{-3}$
VIH	$1{,}2 \times 10^{-7}$
Zika	$5{,}0 \times 10^{8}$

b. Imagina que eres un científico en tu propio laboratorio, ¿cómo ordenarías los virus desde el más diminuto hasta el más grande?

3. Comparación de distancias

¿Sabías que un año luz no mide el tiempo, sino la distancia?

Es el trayecto que recorre la luz en un año: aproximadamente 9,46 billones de kilómetros. Aquí tienes algunos datos curiosos sobre esta enorme medida.

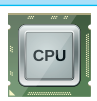
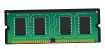
- La estrella Próxima Centauri está a 4,2 años luz de la Tierra.
- La galaxia Andrómeda se encuentra a unos 2,5 millones de años luz de la Tierra.

Si deseas comparar (cuántas veces) la distancia entre la Tierra y la estrella Próxima Centauri con la distancia entre la Tierra y la galaxia Andrómeda, ¿qué procedimiento seguirías para emplear expresiones con potencias de base 10?

4. Capacidad de almacenamiento de datos

Una empresa tecnológica requiere expresar las capacidades de almacenamiento de forma breve.

a. Plantea una propuesta, para ello, completa la tabla escribiendo cada capacidad en potencias de base 10.

Dispositivo		Capacidad de almacenamiento (*bytes*)
	**Disco duro:** 1 000 000 000 000 *bytes*	
	**Memoria RAM:** 1 600 000 000 *bytes*	
	**Tarjeta SD:** $12{,}8 \times 10^7$ *bytes*	
	**Disco de estado sólido (SSD):** 5000×10^5 *bytes*	

b. Si necesitas almacenar un archivo de 3×10^9 *bytes*, ¿qué dispositivo (o combinación de dispositivos) de los mostrados emplearías? Explica la estrategia que emplearías.

5. Estrategias para operar

A continuación, se muestra una operación

$$E = 45\,000 + 2 \times 10^5 - 1{,}5 \times 10^3 + 3 \times 10^5$$

En seguida, se presenta el procedimiento para resolverla

$E = (2 \times 10^5 + 3 \times 10^5) + (45\,000 - 15\,000)$

$E = 5 \times 10^5 + 30\,000$

$E = 500\,000 + 30\,000$

$E = 530\,000$

$E = 5{,}3 \times 10^5$

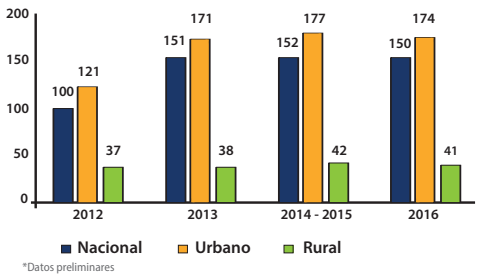
a. ¿El procedimiento de resolución es correcto? De no ser así, plantea el adecuado.

b. Se afirma: "$7{,}9 \times 10^5$ es menor que $8{,}1 \times 10^4$". ¿Es correcta esta afirmación? Usa ejemplos o propiedades para justificar tu respuesta.

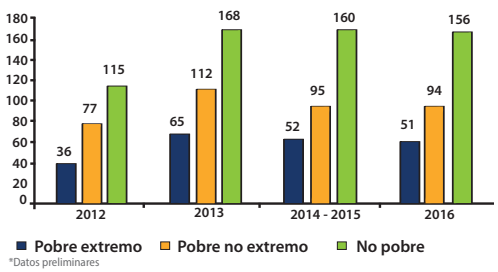
6. Consumo de energía eléctrica

A continuación, se muestra el consumo de electricidad en el Perú en el periodo 2012-2016

Evolución del consumo de electricidad por hogares



Evolución del consumo de electricidad per cápita por nivel de pobreza



Fuente: Adaptado de Osinergmin (2016).

Nota: Per cápita se utiliza para calcular cuánto le corresponde a cada persona, en promedio, dentro de un grupo.

a. Si asumes que cada hogar urbano tiene, en promedio, 4 personas y cada hogar rural tiene 5 personas, ¿cuál sería el consumo eléctrico per cápita mensual aproximado en cada caso en el 2016?

b. ¿Cómo es el consumo per cápita de personas no pobres ese mismo año respecto al consumo nacional?

1. Vida animal

En un proyecto de conservación de fauna silvestre, se tiene la siguiente información:





Sea *x* la vida promedio del zorro andino, en años. Se requiere completar la información del zorro andino. Al respecto, se sabe que la llama vive cuatro años más que el doble de la vida promedio del zorro andino.

a. ¿Cuál es el número de años que colocaríamos en el cartel del zorro andino?

b. Se afirma: "Si la edad promedio del zorro andino disminuye, entonces la edad de la llama también disminuye en la misma cantidad". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. De visita al parque

Para ingresar a un parque recreativo con piscina natural, se anuncia lo siguiente:



a. ¿Cuál es el precio de cada entrada usando este cupón si sabes que incluye acceso a la piscina y alquiler de flotador por persona?

b. Si el precio del cupón es *p* soles, ¿cuál sería el precio de cada entrada, que incluye el acceso a la piscina y el alquiler del flotador?

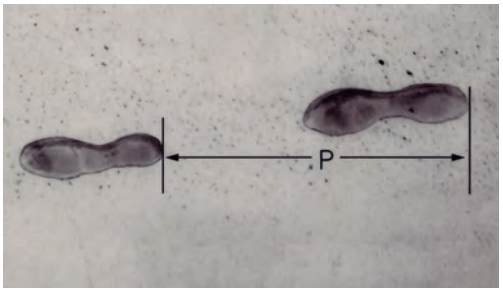
c. Se considera que: "Si el precio del cupón se duplica, entonces el costo de la entrada también se duplica". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

3. Medidas de nuestros pasos

La siguiente imagen muestra las huellas consecutivas de una persona cuando camina. La fórmula $n = 140P$ relaciona el número de pasos por minuto (n) con la longitud del paso (P) en metros.

a. Enrique da 70 pasos por minuto, y Mario, 98. ¿Qué estrategia usarías para encontrar la longitud de sus pasos?

b. ¿Qué relación existe entre *n* y *P*? Representa en una tabla diferentes combinaciones posibles de pasos por minuto y la longitud del paso, que cumplan con la fórmula. Luego, grafica los datos y explica el comportamiento de las variables.



Fuente: Adaptado de PISA (2003).

4. Traducción de expresiones

Completa la siguiente tabla con la expresión adecuada:

Expresión verbal	Expresión algebraica
La temperatura en grados Fahrenheit es 32 más que $\frac{9}{5}$ de la temperatura en grados Celsius.	
Una temperatura en Kelvin es igual a la temperatura en grados Celsius más 273,15.	
Si se conoce la temperatura en grados Fahrenheit, para encontrar la temperatura en Celsius, se resta 32 y se multiplica por $\frac{5}{9}$.	

5. Resolución de ecuaciones

Observa la solución de la siguiente ecuación lineal:

$$4(x-2)+1=-5(x-5)-5$$
$$4x-8+1=-5x+25-5$$
$$4x-7=-5x+25-5$$
$$4x+5x=25-7$$
$$9x=18$$
$$x=\frac{18}{9}$$
$$x=2$$

a. ¿Qué propiedades de la igualdad crees que se han aplicado al resolver la ecuación? Explica con tus propias palabras.

b. ¿El valor encontrado para x cumple la igualdad? De no ser así, plantea un procedimiento adecuado para resolverla.

6. Gastos en transporte

A continuación, se muestran los precios según el tipo de gasolina.

Se sabe que un vehículo estándar consume, en promedio, 2 gal/100 km y un vehículo de alto desempeño, 3,5 gal/100 km.

a. Si ambos vehículos, estándar y de alto rendimiento, recorren una distancia de d kilómetros, ¿qué expresión algebraica representa el gasto en gasolina para ambos vehículos?

b. ¿Cómo podrías representar gráficamente el gasto en gasolina regular y *premium* para diferentes distancias recorridas?

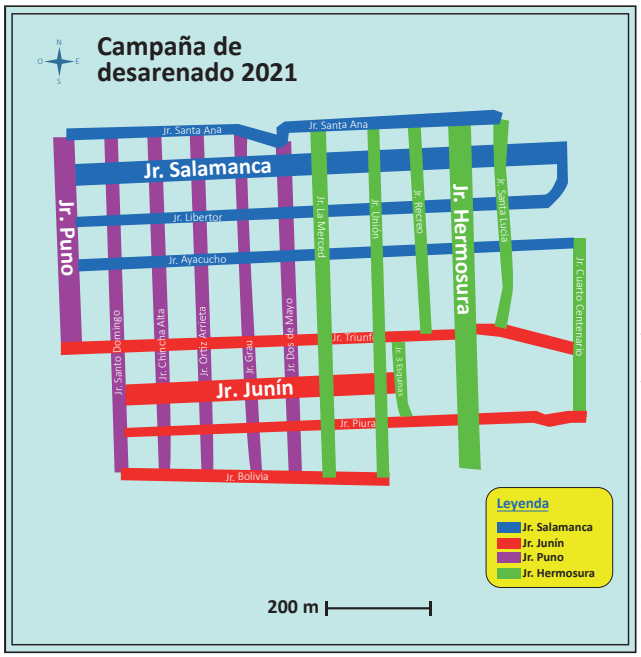
c. Se considera que: "Para resolver la ecuación $0{,}29x + 0{,}5 = 0{,}64x$ es suficiente restar $0{,}29x$ a ambos miembros". ¿Estás de acuerdo con este procedimiento? Justifica tu respuesta.



1. Campaña de desarenado

Como parte de una campaña de desarenado (remover arena y sedimentos de calles, plazas o parques), la Municipalidad de Chachapoyas se encargará de recoger la arena o sedimentos que se encuentren en el frontis de las viviendas.

Para planificar el recorrido, se emplea el siguiente mapa, que permite conocer las distancias que recorrerá.



Fuente: Adaptado de gob.pe (2021).

a. Completa la tabla.

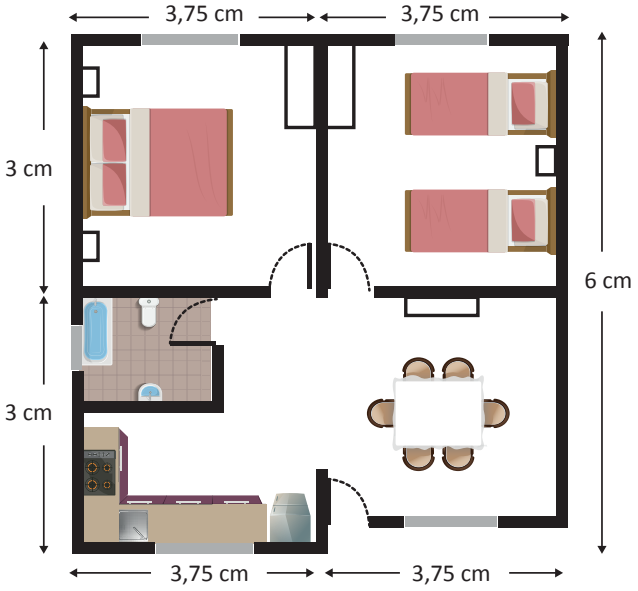
Tramo	Distancia en el plano (cm)	Distancia en la realidad (m)
Jr. Salamanca		
Jr. Junín		
Jr. Puno		
Jr. Hermosura		

b. Si la campaña se realiza en cuatros días, ¿cuál sería una de las rutas propuestas para la limpieza?

c. Se afirma: "Si la escala fuera 1:500 en lugar de 1:1000, las medidas del nuevo plano se duplicarían para mantener la misma información". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Venta de departamentos

Alexis es un ingeniero que necesita presentar el plano de un departamento (drepeciar los márgenes del departamento y sus ambientes) que se muestra en una hoja tamaño A3 (29,7 × 42 cm) y en A4 (21 cm × 29,7 cm).

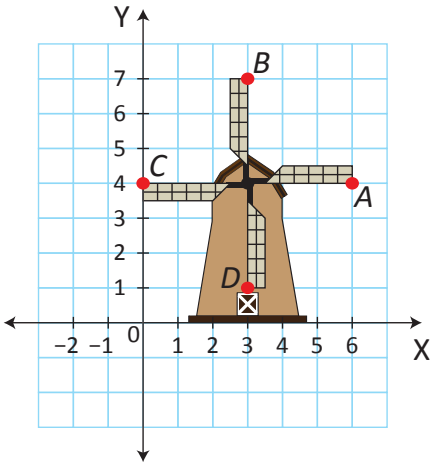


a. ¿Qué escala debe elegir Alexis para que el plano del departamento se ajuste correctamente dentro del área útil de cada hoja?

b. Se sostiene lo siguiente: "La escala 1:150 significa que cada centímetro en el plano representa 150 m en la realidad". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

3. El molino de viento

Raúl ha diseñado un aspa de molino en un plano cartesiano aplicando rotaciones (con sentido antihorario) a partir del aspa de inicio, para su fabricación, tal como se muestra.



a. Completa la tabla considerando el centro de rotación (3; 4) y el aspa de inicio.

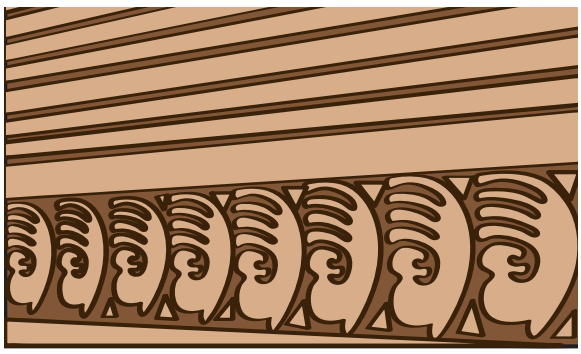
Punto de inicio y final	Ángulo de rotación	Coordenada
A - *B*		
A - *C*		
A - *D*		

b. Si las aspas tardan 20 segundos en hacer una rotación completa, ¿qué ángulo recorren las aspas en 4 segundos?

c. Encuentra las coordenadas del punto *A* después de 4 segundos.

4. Transformaciones con historia

A continuación, se muestran las imágenes de dos expresiones artísticas preincaicas. Ambas presentan transformaciones geométricas.



Friso de Chan Chan



Manto Paracas

a. ¿Qué transformaciones geométricas (traslaciones, rotaciones, reflexiones o ampliaciones) identificas en los diseños del friso y del manto? Describe cómo se combinan en cada caso para formar los patrones visuales.

b. ¿Qué puedes descubrir sobre cómo están organizados los diseños del friso y del manto cuando observas las combinaciones de rotaciones, ampliaciones o reducciones?

Nota: Ignorar los cambios de color

Desarrollamos



Examina situaciones, presenta resoluciones, justifica ideas matemáticas y consolida lo aprendido.

Tu propósito de aprendizaje

Representa magnitudes muy grandes o pequeñas usando potencias de base 10 y notación científica. Convierte entre notación científica y decimal, y argumenta su utilidad para simplificar operaciones y comprender la magnitud de los datos.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Demuestra compromiso y responsabilidad en tus aprendizajes, participa y perserva para alcanzar tus metas.
- Modela situaciones cotidianas con tablas. Analiza soluciones que integran el bienestar de la comunidad y el cuidado sostenible del planeta.

Pensamos y actuamos



Durante una feria de ciencias, un grupo de estudiantes observó información sobre fenómenos naturales y tecnológicos que involucran números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, ellos vieron que la distancia de la Tierra al Sol es de 150 000 000 km y que el tamaño de una célula humana es de aproximadamente 0,00001 m. Cuando intentaron anotar estos datos en sus cuadernos, se dieron cuenta de que escribir tantos ceros les resultaba complicado. Entonces, se preguntaron: ¿Existe una forma más corta y práctica de escribir estos números sin alterar su valor?

1. Analizamos y respondemos.

a. ¿Qué dificultades encuentras al escribir y leer números con muchos ceros?

b. ¿Qué pasaría si tuvieras que sumar o multiplicar varios de estos números?

c. Completa la tabla escribiendo los siguientes números en notación científica y expresión decimal:

Situación	Expresión decimal	Notación científica
Tamaño de una bacteria	0,000002 m	2×10^{-6} m
Cantidad de granos de arena	7 500 000 000 000 000 000	
Masa de una célula humana promedio		1×10^{-6} kg
Duración del parpadeo humano promedio	0,0003 s	
Cantidad de células en el cuerpo humano		$3{,}7 \times 10^{13}$
Diámetro de un protón	0,000000000000001 m	
Diámetro del Sol		$1{,}392 \times 10^{9}$ m

2. Observa la siguiente tabla de información sobre nuestro sistema solar:

Planeta	Radio (m)	Distancia del Sol (m)
Mercurio	$2{,}42 \times 10^{6}$	$5{,}791 \times 10^{10}$
Venus	$6{,}085 \times 10^{6}$	$1{,}082 \times 10^{11}$
Tierra	$6{,}378 \times 10^{6}$	$1{,}496 \times 10^{11}$
Marte	$3{,}375 \times 10^{6}$	$2{,}279 \times 10^{11}$
Júpiter	$7{,}140 \times 10^{7}$	$7{,}785 \times 10^{11}$
Saturno	$6{,}04 \times 10^{7}$	$1{,}427 \times 10^{12}$
Urano	$2{,}36 \times 10^{7}$	$2{,}869 \times 10^{12}$
Neptuno	$2{,}23 \times 10^{7}$	$4{,}498 \times 10^{12}$

a. ¿Cuál es el planeta de radio menor?

b. ¿Qué planeta está casi diez veces más lejano del Sol que de la Tierra?

c. Calcula la distancia que hay entre Venus y la Tierra. Expresa el resultado en km.

d. Imagina que un grupo de investigadores descubre un nuevo planeta llamado Vallecus a 25 880 800 000 000 m del Sol. Expresa esta distancia en notación científica.

e. ¿Cuántas veces estaría más lejos el planeta Vallecus del Sol que la Tierra?

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Para escribir cantidades en notación científica se usa siempre una potencia de base 10.	La notación científica cambia el valor de los números.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece equivalencias y representa cantidades usando notación científica y decimal.
- Interpreta el valor y signo del exponente (en notación científica) como magnitud y dirección de la conversión.
- Emplea procedimientos de conversión entre notación científica y decimal, aplicando reglas.
- Argumenta la necesidad de la notación científica para la lectura, las operaciones, la comparación y manipulación de cantidades muy grandes o pequeñas.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Escribe, en notación científica, cada uno de los siguientes números:**

   a. 6302 000 _____ b. 0,00036 _____ c. 380 000 000 _____

   d. 0,0000654 _____ e. 7850 000 000 _____ f. 0,000000000675 _____

2. **Escribe, en número decimal, las siguientes expresiones escritas en notación científica:**

   a. $9{,}32 \times 10^{4}$ _____ b. $3{,}5 \times 10^{-5}$ _____ c. $1{,}01 \times 10^{6}$ _____

   d. $5{,}03 \times 10^{6}$ _____ e. $5{,}681 \times 10^{-5}$ _____ f. $2{,}09 \times 10^{10}$ _____

3. **Expresa cada proposición en notación científica.**

   a. La masa de la tierra es, aproximadamente, de 5970 000 000 000 000 000 000 000 kg.

   b. El diámetro de un electrón es de casi 0,0000000000004 cm.

   c. Un año luz equivale a 9461 000 000 000 km.

   d. La longitud media de un ácaro de polvo es, aproximadamente, de 0,0001 mm.

   e. El diámetro aproximado del sol es de 1400 000 km.

4. **¿El número $0{,}9 \times 10^{-5}$ está escrito correctamente en notación científica? Justifica.**

5. **¿Por qué? Si la velocidad de la luz es 3×10^{8} m/s, ¿cuánto tarda en recorrer 15 km?**

6. **Un bebé recién nacido tiene cerca de 26 000 000 000 células. Un adulto tiene cerca de $4{,}94 \times 101^{3}$ células. ¿Cuántas células más tiene un adulto que un recién nacido? Escribe la respuesta en notación científica.**

Tu propósito de aprendizaje

Modela figuras geométricas en el plano usando isometrías (traslación, rotación, reflexión). Comunica las transformaciones y la posición de las figuras con coordenadas. Emplea estrategias para aplicar las transformaciones y hallar las nuevas coordenadas. Argumenta que las isometrías conservan la forma y tamaño, variando la posición u orientación.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Promueve la distribución de responsabilidades de liderazgo rotativo, evitando un solo rol de responsabilidades en el trabajo del equipo.
- Reflexiona sobre cómo se verían sus soluciones dentro de diez años, utilizando comparaciones y proyecciones para anticipar impactos futuros.

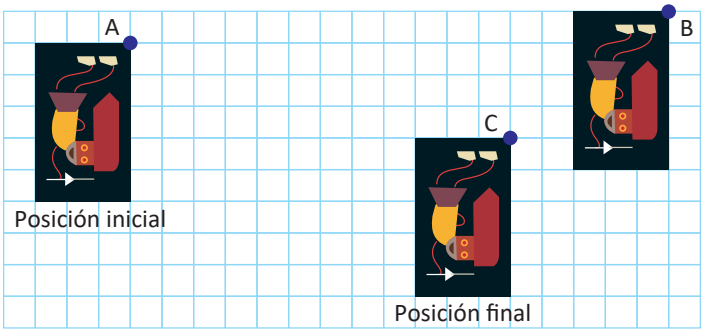
Pensamos y actuamos

Observa el siguiente manto incaico. Analiza las figuras sin importar su color, y enfócate en las formas y posiciones relativas.



La figura A es la base. Analiza cómo se generan las figuras B, C y D a partir de ella.

1. Observa las siguientes figuras y responde. Usa la cuadrícula para contar unidades y considera la flecha como referencia de la orientación.

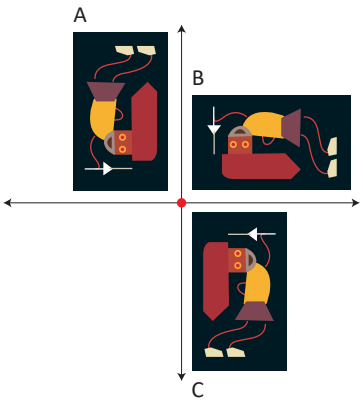


a. ¿Cuántos cuadraditos se trasladó la figura A para llegar a la B?

b. ¿Cuántos cuadraditos se trasladó la figura B para llegar a la C?

c. ¿Cuántos cuadraditos se trasladó la figura A para llegar a la C?
(Suma los desplazamientos de A → B y B → C.)

2. Observa las siguientes figuras y completa las rotaciones alrededor del punto rojo (centro):



a. Aplica una rotación de 90° a la figura A en sentido horario y obtienes la figura B.

b. Aplica una rotación de 90° a la figura B en sentido horario y obtienes la figura C.

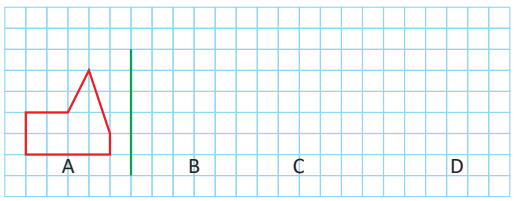
c. Aplica un rotación de 90° a la figura C en sentido horario y obtienes la figura D.

3. **Observa la figura A en la cuadrícula y sigue los siguientes pasos:**

   a. Aplica una simetría axial respecto de la recta verde a la figura A para obtener la figura B.

   b. Aplica una rotación de 90° en sentido horario a la figura B para obtener la figura C y, luego, traslada la figura 2 unidades a la derecha.

   c. Aplica una simetría central a la figura C para obtener la figura D.



¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
En el manto, las transformaciones aplicadas a la figura A no alteran su forma ni tamaño, solo su posición y orientación.	Si rotas una figura 360°, obtienes una figura diferente porque cambia su orientación.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

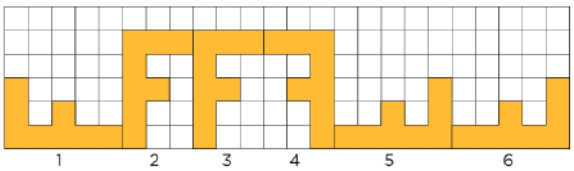
Evalúa tus progresos

- Relaciona la figura inicial y la transformada usando transformaciones isométricas (traslación, rotación, reflexión) en el plano para representar la situación.
- Expresa con lenguaje geométrico (coordenadas, sentido, eje) las transformaciones e interpreta la posición y orientación de la figura resultante.
- Emplea el cálculo y la gráfica para hallar coordenadas de la figura transformada, aplicando reglas específicas de traslación, rotación o simetría.
- Justifica que las isometrías conservan la forma y tamaño, argumentando con ejemplos y contraejemplos cómo solo cambian la posición y/o la orientación.

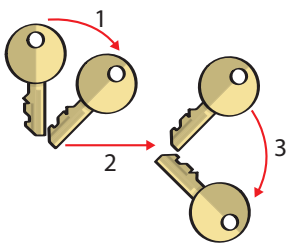
Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Describe qué transformaciones geométricas se aplicaron para formar las diferentes posiciones de la letra F.**



2. **Observa las imágenes, compáralas y completa.**



a. En el paso 1, la llave está girando. Por lo tanto, hay _____

b. En el paso 2, la llave mantiene la misma orientación. Por lo tanto, hay _____

c. En el paso 3, la llave mantiene su tamaño y forma, pero cambia de orientación. Por lo tanto, hay _____

Tu propósito de aprendizaje

Modela situaciones de contexto real (por ejemplo: compras, inversiones) mediante sistemas de ecuaciones lineales de dos variables; comunica las relaciones y la solución mediante gráficos y tablas; emplea la representación gráfica y la tabulación para determinar el conjunto solución; y argumenta que el punto de intersección satisface las condiciones del problema.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Muestra disposición para recibir retroalimentación asumiendo inmediatamente en nuevas tareas para mejorar en el aprendizaje.
- Refuerza la solidaridad y la responsabilidad al resolver problemas vinculados con el ambiente, comparte estrategias de solución y reflexiona sobre el uso adecuado de los recursos naturales.

Pensamos y actuamos



La familia Gutiérrez asiste a una feria láctea para abastecer su tienda con queso fresco y maduro, para ello, la familia dispone de S/390. Los precios son S/30 el kilo (fresco) y S/20 el kilo (maduro). La familia debe adquirir exactamente 15 kg en total, y al menos 1 kg de cada tipo. ¿Cuántos kilos de cada queso debe comprar para cumplir el presupuesto y la cantidad? Explica y justifica tu procedimiento.

1. Identifica y completa los datos conocidos que faltan.

a. El costo de 1 kg de queso fresco es S/ _____

b. El costo de 1 kg de queso maduro es S/ _____

c. La cantidad de queso a comprar es _____

d. El dinero a invertir es S/ _____

2. Identifica y define dos incógnitas que representen los datos desconocidos.

a. x _____

b. y _____

3. Escribe en cada caso una ecuación que exprese las condiciones del problema utilizando las incógnitas definidas en el paso anterior.

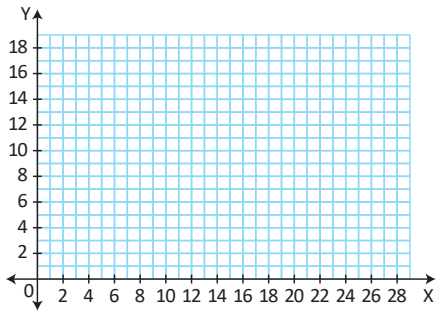
a. Cantidad de queso a comprar _____ (ecuación 1)

b. Dinero a invertir _____ (ecuación 2)

4. Completa la tabla con valores para x e y que sean solución de las ecuaciones que se dan.

Ecuación 1: $x + y = 15$			Ecuación 2: $30x + 20y = 390$		
x	y	$(x; y)$	x	y	$(x; y)$
1	14	(1; 14)	1	18	(1; 18)
2					
3					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
9					
10					
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	1	(14; 1)			

5. **Grafica en el siguiente plano cartesiano la ecuación 1 y 2.**



6. **Escribe las coordenadas del punto de intersección de las gráficas, ¿qué relación tiene el punto de intersección de las gráficas con el problema propuesto? ¿De qué otra forma podrías resolver el sistema de ecuaciones? Explica.**

7. **Otro día la familia Gutiérrez asistió a una feria gastronómica y consumió dos tipos de platos: arroz con pollo y carapulcra. De los seis integrantes de la familia, cuatro comieron arroz con pollo y dos comieron carapulcra, por lo cual gastaron en total S/140. Además, se sabe que el precio de la carapulcra fue S/4 más que el arroz con pollo. ¿Cuál el precio de cada plato?**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
El punto de intersección de las rectas en el plano cartesiano corresponde al único par $(x; y)$, que cumple ambas condiciones: cantidad total de kilos y costo total.	Si se modifican los precios de los quesos o la cantidad total de kilos, las ecuaciones del sistema también cambian, lo que genera una nueva solución.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre cantidades desconocidas en un contexto, exprésalas como un sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas y represéntalas gráficamente.
- Emplea procedimientos para definir las incógnitas y ecuaciones, e interpreta las coordenadas (x,y) que satisfacen la solución del sistema de ecuaciones.
- Emplea tablas de valores y gráficos para identificar la intersección de las rectas y, con ello, determinar la solución del sistema.
- Justifica con ejemplos que el punto de intersección constituye la solución única, verifica que satisface simultáneamente ambas ecuaciones del problema.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Con dos camiones cuyas capacidades de carga por viaje son 3 y 4 toneladas, respectivamente, se hicieron en total 23 viajes entre ambos para transportar 80 toneladas de madera. ¿Cuántos viajes realizó cada camión?**

2. **Marta y Carmen asistieron a un evento musical; ellas no saben cuál fue el precio de las entradas, pero sí recuerdan cuánto pagaron en total: Marta pagó S/96 por 3 niños y 5 adultos, y Carmen pagó S/73 por 4 niños y 3 adultos. ¿Cuál fue el precio de una entrada de niño y el de adulto, respectivamente?**

3. **En un puesto de frutas, un vendedor tiene dos variedades de fresas: estándar y de selección. Él vende una caja de fresas estándar a S/35 y una de selección a S/70. En un día, vendió 32 cajas de fresas y recaudó un total de S/1540. ¿Cuántas cajas de cada tipo vendió?**

Formalizamos



Identifica en los ejemplos representaciones clave y reflexiona en grupo para dar sentido a las ideas matemáticas en tus desafíos.

Ten en cuenta

La notación exponencial permite expresar de forma abreviada multiplicaciones repetidas de una misma base elevada a un exponente; al usar base 10, facilita representar números muy grandes o muy pequeños mediante la notación científica

Ejemplo: El número 524 000 puede expresarse como

5240×10^2

524×10^3

División

$$\frac{a \times 10^m}{b \times 10^n} = \frac{a}{b} \times 10^{m-n}$$

Ejemplo:

$$F = \frac{4{,}5 \times 10^9}{1{,}5 \times 10^8}$$

$$F = \frac{4{,}5}{1{,}5} \times \frac{10^9}{10^8}$$

$$F = 3 \times 10^{9-8} = 3 \times 10$$

$$F = 3 \times 10^1$$

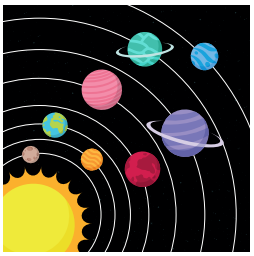
Practica valores

- Incorpora ejemplos en las actividades matemáticas que valoran las diversas regiones del país, comparando contextos ambientales y aprendiendo a tomar decisiones en beneficio de las comunidades.
- Valora diversos métodos heurísticos, como trabajar hacia atrás o casos particulares, para abordar problemas complejos colaborativamente.

NOTACIÓN EXPONENCIAL Y CIENTÍFICA

Notación científica

Situación: Distancia a una estrella



Una estrella está a 40 000 000 000 000 km de la Tierra. Los estudiantes dicen que es difícil escribir o recordar ese número. ¿Cómo escribirías esta distancia sin tener que contar ceros o cometer errores?

Recordemos las potencias de 10.

$100 = 10^2$; $1000 = 10^3$; $10\,000 = 10^4$

El exponente indica la cantidad de ceros después del 1.

La distancia la podemos escribir de la siguiente manera:

$40\,000\,000\,000\,000 = 4 \times 10\,000\,000\,000\,000 = 4 \times 10^{13}$ km

Esta forma de expresar se denomina notación científica.

El problema resuelto ilustra que un número en **notación científica** es una forma estandarizada de representar números muy grandes o pequeños, compuesta por un número llamado mantisa y una potencia de base 10, donde n es el orden de magnitud ($n \in \mathbb{Z}$).

$a \times 10^n$

Mantisa $1 \leq a < 10$

Potencia de base 10 con exponente entero

Expresamos números en notación científica:

Números grandes	Números pequeños
$124\,000\,000 = 1{,}24 \times 10^8$ Cuando corremos la coma a la izquierda, el exponente del 10 es positivo.	$0{,}00000000476 = 4{,}76 \times 10^{-9}$ Cuando corremos la coma a la derecha, el exponente del 10 es negativo.

Adición y sustracción

Para sumar o restar dos números expresados en notación científica, ambos deben tener la misma potencia de base 10. A partir de ello, se pueden sumar o restar las mantisas y se conserva la potencia de 10.

$$a_1 \times 10^n \pm a_2 \times 10^n = (a_1 \pm a_2) \times 10^n$$

Ej.: $3 \times 10^5 + 4{,}5 \times 10^5 = (3 + 4{,}5) \times 10^5 = 7{,}5 \times 10^5$

Multiplicación y división

Para multiplicar o dividir números expresados en notación científica, se multiplican o dividen por separado las mantisas y las potencias de 10.

$$(a \times 10^m) \times (b \times 10^n) = (a \times b) \times 10^{m+n}$$

Ej.: $E = (5{,}6 \times 10^4) \times (2{,}5 \times 10^3) = (5{,}6 \times 2{,}5) \times (10^4 \times 10^3)$

$E = 14 \times 10^{4+3} = 14 \times 10^7 = 1{,}4 \times 10^8$

SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Situación: Las cajas de chocolate



Fernando compró doce cajas de chocolates de dos tamaños: pequeñas y medianas. Cada caja pequeña cuesta S/5 y cada caja mediana, S/8. Si en total gastó S/75, ¿cuántas cajas de cada tipo compró?

- Organizamos en una tabla algunas posibilidades de compra de Fernando.

Cajas pequeñas	Cajas medianas	N.° de cajas	Gasto (S/)
5	7	12	5(5) + 8(7) = 81
6	6	12	5(6) + 8(6) = 78
7	5	12	5(7) + 8(5) = 75
8	4	12	5(8) + 8(4) = 72
9	3	12	5(9) + 8(3) = 69

En la tercera fila se cumplen ambas condiciones: al comprar siete cajas pequeñas y cinco medianas, se obtiene un total de doce cajas y un gasto total de S/75. Por lo tanto, Fernando compró siete cajas pequeñas y cinco cajas medianas de chocolate.

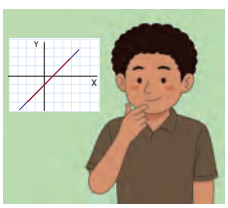
A partir de lo trabajado, podemos afirmar que un **sistema de ecuaciones** lineales con dos incógnitas es un conjunto de dos ecuaciones que contienen las mismas incógnitas. Tiene la forma

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

Donde
a_1; a_2; b_1; b_2: coeficientes
x; y: incógnitas
c_1; c_2: términos independientes
a_i; $b_i \neq 0$

El conjunto solución (C. S.) es un par ordenado $(x; y)$ que satisface simultáneamente las dos ecuaciones.

Situación: Análisis de sistemas



José observa el siguiente sistema y responde que el C. S. es el par ordenado (2; 0), y el sistema es compatible indeterminado, pues $x = 2$, pero como $y = 0$, la recta no estaría fija en el plano cartesiano. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

- Procedemos a tabular el sistema.

Para la primera ecuación

$y = 4 - 2x \longrightarrow 2x + y = 4$

X	0	1	2
Y	4	2	0

Para la segunda ecuación

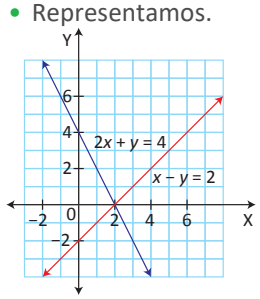
$y = x - 2 \longrightarrow x - y = 2$

X	0	1	2
Y	−2	−1	0

Nos damos cuenta de que la intersección está en

$x = 2 \wedge y = 0 \Longrightarrow$ C. S. = {(2; 0)}

- Representamos.



Por lo tanto, la afirmación de José es incorrecta. El sistema tiene una única solución: (2; 0), por lo tanto, es compatible determinado.

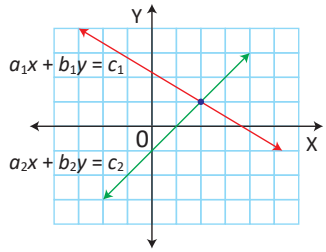
¿Sabías que...?

Los sistemas de ecuaciones lineales modelan decisiones con restricciones en infraestructura y procesos. Permiten balancear energía y agua, calcular mezclas óptimas, planificar rutas o turnos, y ajustar costos y demandas. Al resolverlos —gráfica, sustitución o eliminación— los estudiantes comparan escenarios, justifican soluciones factibles y proponen innovaciones sostenibles basadas en datos.

TIC

Recuerda

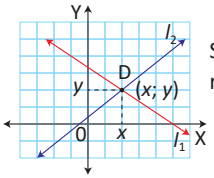
Un sistema de ecuaciones lineales puede representarse en el plano cartesiano a través de rectas; el punto de intersección $(x; y)$ de ambas gráficas indicará la solución del sistema.



Ten en cuenta

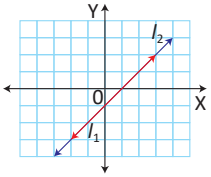
Los tipos de sistemas de ecuaciones, según su número de soluciones, son

Sistema compatible determinado



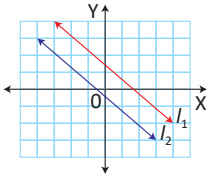
Solución única, rectas secantes

Sistema compatible indeterminado



Infinitas soluciones, rectas coincidentes

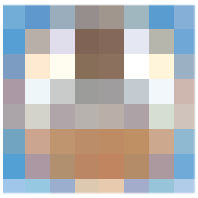
Sistema incompatible



No tienen solución, rectas paralelas

Resolución con el método gráfico

Situación: Reparto de paquetes



Andrés recibe un sueldo fijo de S/50 por día más S/10 por cada paquete entregado. Por su parte, Carla no tiene sueldo fijo, pero gana S/15 por cada paquete entregado. ¿Después de entregar cuántos paquetes ambos habrán ganado lo mismo? ¿Podrías representarlo en una gráfica?

- Ordenamos los datos usando tablas.

x: Número de paquetes entregados por cada uno.

y: ingreso total en soles.

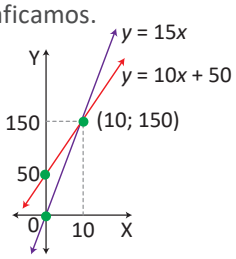
Para Andrés: $y = 10x + 50$

X	0	5	10	20
Y	50	100	150	250

Para Carla: $y = 15x$

X	0	5	10	20
Y	0	75	150	300

- Se observa que el par ordenado (10; 150) satisface a las dos ecuaciones.
- Graficamos.



- Igualamos ambas expresiones

$15x = 10x + 50$

$5x = 50 \Longrightarrow x = 10$

$\Longrightarrow y = 15 \times 10 = 150$

De esa forma, también obtenemos el par ordenado (10; 150), que es conjunto solución.

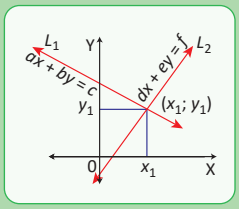
El análisis previo muestra que el **método de gráfico** consiste en representar las ecuaciones del sistema en el plano cartesiano y determinar en qué punto se cortan.

Pasos:

1. Despeja la misma incógnita en cada una de las dos ecuaciones del sistema.
2. Construye una tabla de valores para cada ecuación.
3. Representa gráficamente las dos ecuaciones en el plano cartesiano.
4. Identifica el punto de intersección de las dos gráficas.

Sea el sistema

$$\begin{cases} ax + by = c \ldots (L_1) \\ dx + ey = f \ldots (L_2) \end{cases}$$



Situación: El reto de la profesora



La profesora plantea el siguiente sistema de ecuación para que sus estudiantes lo resuelvan, y afirma que la intersección es el par ordenado (3; 2). ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ 3x - 5y = -1 \end{cases}$$

- Despejamos la incógnita *y* en ambas ecuaciones y tabulamos.

$2x + 3y = 12$

$\Longrightarrow 3y = 12 - 2x$

$y = \dfrac{12 - 2x}{3}$

X	0	3	6
Y	4	2	0

$x = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{12 - 2(0)}{3} = 4$; $x = 3 \Longrightarrow y = \dfrac{12 - 2(3)}{3} = 2$

$3x + 5y = -1$

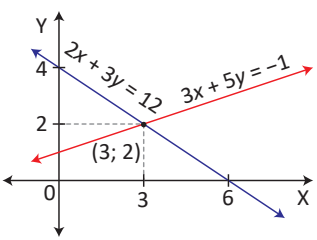
$\Longrightarrow 5y = 1 - 3x$

$y = \dfrac{1 + 3x}{5}$

X	0	3	8
Y	0,2	2	5

$x = 0 \Longrightarrow y = \dfrac{1 + 3(0)}{5} = 0{,}2$; $x = 3 \Longrightarrow y = \dfrac{1 + 3(3)}{5} = 2$

- Graficamos.



El C. S. = {(3; 2)}, por lo tanto, es correcta la afirmación.

Reto matemático

Dos servicios de reparto pagan distinto:

- Plan A: sueldo fijo de S/50 + S/10 por paquete.
- Plan B: sin sueldo fijo, pero S/15 por paquete. ¿Cuándo ambos pagarán lo mismo?

Resolución con el método de sustitución

Situación: La compra de frutas



En un mercado, un estudiante compra 2 kg de manzana y 3 kg de mandarina, y paga S/18. Luego, su hermana compra 4 kg de manzana y 2 kg de mandarina, y paga S/20. ¿Cuánto cuesta el kilogramo de mandarina?

- Planteamos las incógnitas.
  Precio de 1 kg de manzana: x
  Precio de 1 kg de mandarina: y
- Escribimos las ecuaciones según las condiciones.
  $2x + 3y = 18$ ... (I)
  $4x + 2y = 20$ ... (II)
- Si a la primera ecuación la multiplicamos por 2, obtenemos la misma cantidad de pago de manzanas, es decir:
  $2x(2x + 3y = 18)$
  $\Longrightarrow 4x + 6y = 36$
- De esta ecuación despejamos $4x = 36 - 6y$
- Sustituimos en (II).
  $36 - 6y + 2y = 20$
  $36 - 4y = 20 \Longrightarrow 16 = 4y$
  $\therefore \quad y = 4$

Por lo tanto, concluimos que el precio de un kilo de mandarina es S/4.

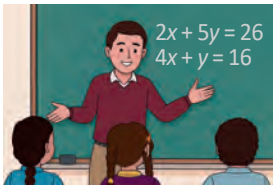
Como se aprecia en el ejemplo anterior, el **método de sustitución** consiste en despejar una incógnita en una de las ecuaciones y reemplazar la expresión obtenida en la otra ecuación para obtener una igualdad con una sola incógnita.

Pasos:

1. Despeja una incógnita en una de las ecuaciones.
2. Sustituye en la otra ecuación.
3. Resuelve para encontrar el valor de la incógnita.
4. Reemplaza ese valor en una de las ecuaciones para obtener el valor de la otra incógnita.

Situación: Reto en la clase Matemática

El profesor presenta el siguiente sistema de ecuación: $\begin{cases} 2x + 5y = 26 \\ 4x + y = 16 \end{cases}$



Él pide a sus estudiantes justificar que el C. S. = {(3; 4)}. Plantea un procedimiento para afirmar lo mencionando por el profesor.

$\begin{cases} 2x + 5y = 26 \text{ ... (I)} \\ 4x + y = 16 \text{ ... (II)} \end{cases}$

- En (II) despejamos y.
  $y = 16 - 4x$ ... (III)
- Reemplazamos (III) en (I):
  $2x + 5(16 - 4x) = 26$
- Aplicamos la propiedad distributiva
  $2x + 5(16 - 4x) = 26$
  $2x + 80 - 20x = 26$
  $-18x = -54$
  $x = 3 \quad \Longrightarrow \quad$ C. S. = {(3; 4)}
- Reemplazamos en (III) el valor de x
  $y = 16 - 4(3)$
  $y = 4$

  Por lo tanto, su solución es C. S. = {(3; 4)}

¿Sabías que...?

Frecuentemente, un sistema de ecuaciones surge de un problema. El sistema de dos ecuaciones de primer grado con dos incógnitas aparecerá cuando se tengan que hallar dos números y se conozcan dos condiciones independientes que esos números deben cumplir.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre incógnitas al resolver una situación problemática, exprésalas como un sistema de ecuaciones lineales y represéntalas como rectas en el plano cartesiano.
- Emplea procedimientos para definir la incógnita y las ecuaciones, e interpreta el punto de intersección (solución) en el contexto del problema planteado.
- Aplica métodos de resolución (tablas de valores, representación gráfica o sustitución) para hallar el punto de intersección de las rectas y, con ello, la solución del sistema.
- Justifica con ejemplos que el punto de intersección constituye la solución única y verifica que satisface simultáneamente las condiciones impuestas por ambas ecuaciones.

¿Sabías que...?

La escala permite representar infraestructuras y cultivos en planos o mapas, comparar medidas reales, estimar distancias y áreas. Los estudiantes evalúan materiales, validan diseños y sustentan decisiones sostenibles aplicadas en ciencia, industria, agricultura y ciudadanía responsable, optimiza recursos y promueve un desarrollo ambientalmente equilibrado.

Recuerda

La **escala** es la relación proporcional que existe entre las dimensiones en el dibujo y las dimensiones en la realidad con la misma unidad de medida.

$$E = \frac{\text{Medida en el dibujo}}{\text{Medida real}}$$

Ejemplo:

$$E = \frac{1}{150}$$

O también

$E = 1:150$

Se lee "escala de 1 a 150".

Se interpreta: 1 cm en el dibujo representa 150 cm en la realidad.

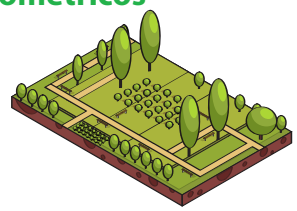
Evalúa tus progresos

- Interpreta la relación entre longitudes (k), áreas (k^2) y volúmenes (k^3).
- Aplica procedimientos para calcular medidas con precisión.
- Argumenta que al duplicar una arista, el volumen aumenta.

ESCALA

Factores de escala en figuras y cuerpos geométricos

Situación: El parque del barrio



Un parque tiene una forma rectangular de 80 m de largo por 60 m de ancho. En una maqueta se representará el parque con una escala de 1:200. ¿Cuáles serán las nuevas medidas del parque en la maqueta?

Si la escala es 1:200, eso quiere decir que 1 cm en la maqueta equivale a 200 cm en la realidad.

$$\frac{L_{maqueta}}{L_{real}} = \frac{1}{200} \Longrightarrow L_{maqueta} = \frac{L_{real}}{200}$$

Sabemos que 80 m = 8000 cm; 60 m = 6000 cm.
Entonces, para saber cuánto mide en la maqueta, usamos la proporción

$$\frac{1}{200} = \frac{x}{8000} \Longrightarrow x = \frac{1 \times 8000}{200} = 40 \text{ cm (largo)}$$

$$\frac{1}{200} = \frac{x}{6000} \Longrightarrow x = \frac{1 \times 6000}{200} = 30 \text{ cm (ancho)}$$

Podemos concluir que las medidas del parque rectangular serán de 40 cm de largo y 30 cm de ancho en la maqueta; es decir, se redujo a su $\frac{1}{200}$ parte de su tamaño original.

La experiencia anterior permite reconocer que al representar figuras semejantes, sus dimensiones están relacionadas por un **factor de escala**. Este factor afecta a los lados, al área y al volumen. Sea k el factor de escala, es decir, la razón entre una dimensión nueva (dibujo) y la original (real); k = nuevo/original.

- Relación entre lados: lado nuevo = $k \times$ (lado original)
- Relación entre áreas: área nueva = $k^2 \times$ (área original)
- Relación entre volúmenes: volumen nuevo = $k^3 \times$ (volumen original)
- Si $k < 1$, hay reducción.
- Si $k > 1$, hay amplificación.

Situación: Tanques de agua

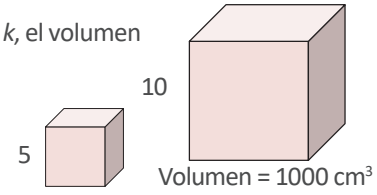
Un tanque cúbico tiene una arista de 5 cm. Se pide a un equipo de estudiantes construir una maqueta ampliada a escala 2:1 o $k = 2$. Un estudiante asegura que, al duplicar la arista, el volumen también se duplica, por lo que el nuevo tanque cúbico tendrá un volumen 250 cm³.

Estás de acuerdo con la afirmación del estudiante? Justifica.

Sabemos que, al multiplicar los lados por un factor k, el volumen de cuerpos semejantes cambia por k^3.

La arista del cubo original: 5 cm
Entonces el $V_{original} = a^3 = 5^3 = 125 \text{ cm}^3$

Para la escala 2:1



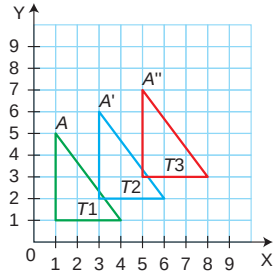
Como $k = 2$, la nueva arista es a , luego $2a = 10$ cm.
$V_{nuevo} = (2a)^3 = 2^3 \times a^3 = 8 \times 125 = 1000 \text{ cm}^3$
El nuevo tanque no tiene 250 cm³, tiene 1000 cm³, ocho veces el volumen original.
Por lo tanto, se concluye que la afirmación del estudiante es incorrecta.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS

Traslación

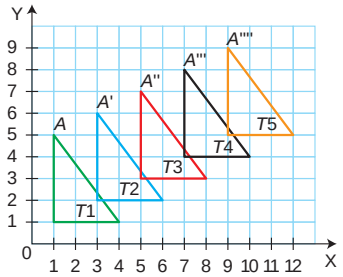
Situación: Diseño creativo

Gerardo viene diseñando el logo para una empresa como el mostrado en la figura. Para terminar con el diseño se requiere completar con dos figuras iguales a las mostradas. ¿Cuál es la distancia horizontal y vertical que se desplaza la figura T2 respecto a la figura T1 y T3 respecto a T2? ¿Cómo será el diseño final?

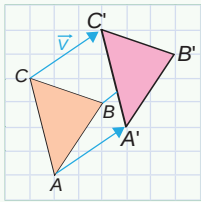


Luego de observar los vértices de los triángulos en el plano cartesiano, sabemos que

Triángulo 1 (T1): A (1; 5), triángulo 2 (T2): A' (3; 6) y triángulo 3 (T3): A'' (5; 7); cada figura se desplaza 2 unidades a la derecha (eje X) y 1 unidad hacia arriba (eje Y), es decir, el vector de traslación es $\vec{v}(2; 1)$. En consecuencia, para continuar con el diseño, desplazaremos la figura T3 de acuerdo con el vector (2; 1). El diseño final se muestra en la imagen.



El problema resuelto usa una transformación geométrica que conserva las distancias y las medidas de las figuras llamada **translación**.



La traslación de una figura geométrica desplaza todos los puntos de ella en una misma distancia, dirección y sentido.

Al trasladar un punto A, le corresponderá otro punto A' en el que $\overrightarrow{AA'} = \vec{v}$, que es vector de traslación.

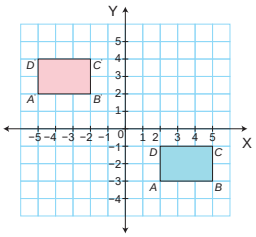
Vamos a trasladar el punto A hacia A' mediante el vector $\vec{v} = (a; b)$. Entonces

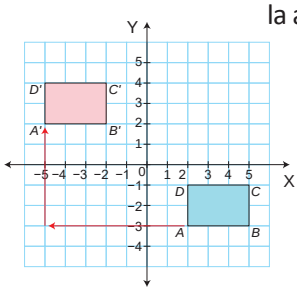
$$x' = x + a \quad \wedge \quad y' = y + b$$

Situación: Traslación de una figura



En el gráfico, el rectángulo celeste se traslada hasta coincidir con el rectángulo rosado. Mario afirma que el desplazamiento es 7 unidades en el eje X y 5 unidades en el eje Y, así el vector es (7; 5). ¿Compartes la afirmación de Mario? Justifica.





Luego de analizar el gráfico, veremos que, para encontrar el vector de traslación, comparamos un vértice con su imagen. Tomaremos $A(2; -3)$ y $A'(-5; 2)$.

$\vec{v} = (x' - x; y' - y) = (-5 - 2; 2 - (-3)) = (-7; 5)$

El desplazamiento en el eje X es 7 unidades a la izquierda: –7; el desplazamiento en el eje Y es 5 unidades hacia arriba.

La afirmación de Mario es incorrecta. El vector de traslación es $\vec{v} = (-7; 5)$.

¿Sabías que...?

Las transformaciones geométricas isométricas permiten conservar formas y medidas al trasladar, rotar o reflejar diseños. Facilitan ubicar paneles, optimizar orientaciones y validar estructuras, lo cual reduce desperdicios y sustenta decisiones innovadoras, seguras y sostenibles en ciencia, tecnología y desarrollo urbano responsable.

Recuerda

Las **transformaciones isométricas** conservan las longitudes, los ángulos y el área. La figura imagen es congruente con la figura original.

Ten en cuenta

Método práctico

Luego de trasladar el punto $A(1; 3)$ con el vector de traslación $\vec{v}\ (2; 5)$ se obtiene

$A' = A + \vec{v}$

$A' = (1; 3) + (2; 5)$

$\Longrightarrow A' = (3; 8)$

También se lee "la imagen de A es A'".

Traslación

Coordenadas de A, B y C	$+\ \vec{v}$	Coordenadas de A', B' y C'
$A(1; 2)$	$+ (7; 8)$	$A'(8; 10)$
$B(3; 6)$	$+ (7; 8)$	$B'(10; 14)$
$C(1; 8)$	$+ (7; 8)$	$C'(8; 16)$

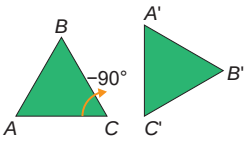
Recuerda

La **traslación** y la **rotación** están comprendidas dentro de los movimientos rígidos, pues conservan su forma y tamaño a través del movimiento.

Rotación

Situación: Triángulo girado

En el aula de tercer grado de secundaria, el profesor pide a sus estudiantes que dibujen un triángulo en una hoja cuadriculada, y que lo giren 90° en sentido horario, para ello, deben considerar como punto fijo el vértice *C*. Luego, les pide que comparen el triángulo rotado con el original y reflexionen con estas preguntas: ¿cambió su forma?, ¿y su orientación?



Luego de realizar la rotación de 90° en sentido horario (es decir, hacia la derecha), el triángulo mantiene su forma y tamaño, ya que las rotaciones son transformaciones isométricas, es decir, no alteran las dimensiones ni los ángulos de la figura. Como el punto *C* se mantiene fijo, el lado $\overline{AC}$ gira en sentido horario, y el punto *A* describe un arco de circunferencia al moverse.

Por tanto, la forma del triángulo y el tamaño no cambian, y la orientación se conserva; lo que cambia es la posición de la figura en el plano.

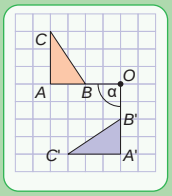
Ten en cuenta

Los giros que van en el sentido contrario al de las agujas del reloj (sentido antihorario) se consideran positivos, y los que van en el sentido de las agujas del reloj (sentido horario) se consideran negativos.



La resolución de la situación anterior evidencia lo siguiente sobre la **rotación**:

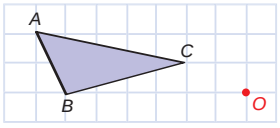
- Para identificar el ángulo de rotación de una figura, elige un vértice *A* y su correspondiente *A'* en la figura rotada. Luego, traza los segmentos *OA* y *OA'* (*O* es el centro). El ángulo de rotación es $\angle AOA'$.



- Una rotación es una transformación isométrica, en la cual todos los puntos se mueven respecto a un punto fijo llamado centro (*O*) mediante un ángulo α. Además, la longitud, los ángulos, las áreas y la orientación se conservan.

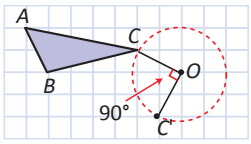
Situación: La rotación de figuras

El profesor pide construir la rotación de la figura respecto al punto *O*, de 90° en sentido antihorario. ¿Cómo sería el procedimiento?



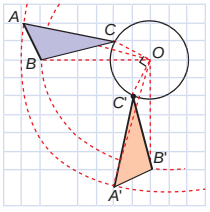
Almendra menciona que, como es en sentido antihorario, la rotación sería hacia abajo y cada vértice gira en el mismo sentido. ¿Compartes el análisis de Almendra? Justifica.

- Procedemos a graficar considerando el giro antihorario



- Dibujamos una circunferencia con centro *O* y radio $\overline{OC}$, y con un transportador determina un ángulo de 90°. Luego, marca en la imagen el punto *C'* en la circunferencia.

- Repetimos el mismo procedimiento, luego unimos los puntos. Con esto obtenemos la imagen del triángulo *ABC*, es decir, el triángulo *A'B'C'*.



- Cada vértice gira respecto al punto fijo *O*.

Con lo desarrollado, se concluye que el análisis de Almendra presenta un error.

Reto matemático

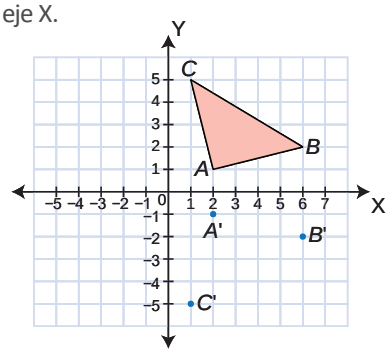
En una actividad, Ana giró una figura 90° en sentido antihorario, y Luis la giró 270° en sentido horario, ambos con el mismo centro. ¿Llegaron al mismo resultado? ¿Por qué?

Simetría axial y simetría central

Situación: La ubicación de uno igual

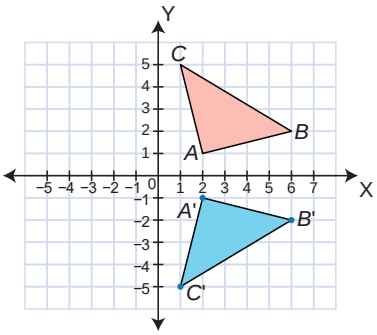
El profesor presenta a sus estudiantes las coordenadas de los vértices de un triángulo: $A(2; 1)$, $B(6; 2)$ y $C(1; 5)$. Luego, les pide graficar otro triángulo simétrico respecto al eje X.

- Graficamos el triángulo ABC. Luego, graficamos el triángulo simétrico respecto al eje X.



- Los vértices quedan a igual distancia del eje X que sus correspondientes del triángulo original.

Se identifica que los segmentos AA', BB' y CC' son perpendiculares al eje de simetría.



El nuevo triángulo mantiene su forma y las dimensiones, además, los vértices guardan la misma distancia respecto al eje X.

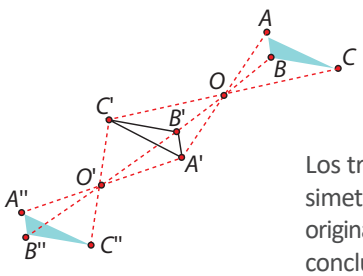
El análisis previo nos muestra que

- La **simetría axial** es una transformación isométrica en la que cada punto de una figura se refleja respecto a una recta (eje de simetría), de modo que el segmento que une un punto con su imagen es perpendicular al eje, y se divide en dos partes iguales.
- La **simetría central** también denominada simetría puntual, es una transformación isométrica en la que cada punto de una figura tiene una imagen equidistante respecto a un punto fijo O (centro de simetría), pero en dirección opuesta. Es equivalente a una rotación de 180°.

Situación: Movimiento del triángulo

Se indica a los estudiantes que trabajen con el triángulo ABC, el cual se refleja primero respecto al punto O, de modo que se obtiene la imagen $A'B'C'$. Luego deben aplicar una segunda simetría central respecto a otro punto O', por lo que se obtiene el triángulo $A''B''C''$. Alondra comenta que, como se aplicaron dos simetrías centrales seguidas, el triángulo $A''B''C''$ debe coincidir exactamente con el triángulo original ABC. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta.

- Procedemos a realizar el gráfico.

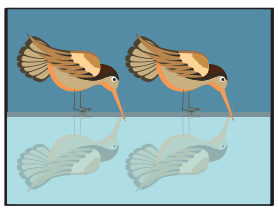


- Como la simetría es central, entonces
  $AO; OA'; A'O'; O'A''$
  $BO; OB'; B'O'; O'B''$
  $CO; OC'; C'O'; O'C''$

Los triángulos ABC y $A''B''C''$ no coinciden, porque dos simetrías centrales solo devuelven la figura a su posición original si comparten el mismo centro. Por lo tanto, Alondra concluyó erróneamente.

Ten en cuenta

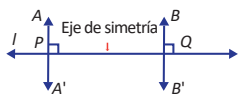
La **simetría** se puede observar en el reflejo del agua.



Una **reflexión** (simetría axial) cambia la orientación, mientras que una rotación o traslación no lo hace.

Ten en cuenta

Simetría axial



$AP = PA'$, $BQ = QB'$

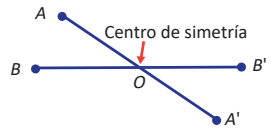
A' es imagen de A

B' es imagen de B

A y A' son simétricos respecto a la recta l

B y B' son simétricos respecto a la recta l

Simetría central



$AO = OA'$, $BO = OB'$

A' es imagen de A

B' es imagen de B

A y A' son simétricos respecto al punto O

Reto matemático

Imagina que mueves una figura (traslación) y después la reflejas en un eje (simetría), ¿el resultado será el mismo si haces las transformaciones en el orden contrario? Justifica tu respuesta.

Evalúa tus progresos

- Relaciona la congruencia y la semejanza entre figuras en una situación problemática, representa tus transformaciones (isometrías y homotecias) en el plano cartesiano.
- Expresa la semejanza considerando el vector, centro y razón *k*, e interpreta el efecto de la razón de homotecia *k* sobre las longitudes y el área.
- Emplea procedimientos basados en acciones de simetrías y homotecias (incluida la multiplicación de coordenadas por *k*) a fin de hallar las coordenadas de la figura transformada.
- Justifica con ejemplos y contraejemplos si una transformación conserva solo la forma (semejanza) o forma y tamaño (isometría), y evalúa las propiedades en las figuras.

Composición de isometrías

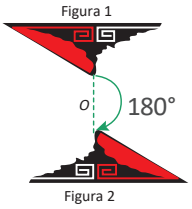
Situación: ¿Qué pasó con la figura?

El docente presentó estas tres figuras a los estudiantes.

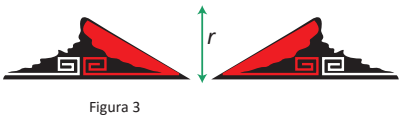


Luego, les pregunta qué tipo de transformaciones isométricas se han realizado para ir de la figura 1 a la figura 3.

- Observemos que en la figura 1 se le aplicó una rotación de 180° en sentido horario, con lo que se obtiene la figura 2.



- Luego, a la figura 2 le aplicamos una simetría axial respecto a la recta *r*.



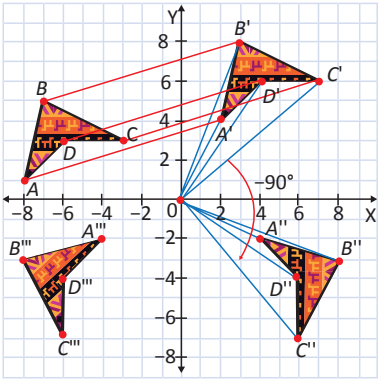
Notamos, entonces, que las transformaciones isométricas pueden pasar por diversos movimientos y no pierden su forma.

Tal como se vio en el caso presentado, la **composición de transformaciones isométricas** consiste en aplicar una transformación isométrica a una figura y sobre la figura imagen aplicar otra transformación isométrica, y así sucesivamente. El orden de aplicación importa.

Situación: Figuras que se mueven

A un cuadrilátero, cuyos vértices son *A*(−8; 1), *B*(−7; 5), *C*(−3; 3), *D*(−6; 3), se le aplica una traslación con vector (10; 3), luego una rotación (0; −90°), en el que *O* es el origen de coordenadas, y, por último, una simetría respecto al eje Y.

Se afirma que la figura final quedará en la misma posición original porque se han realizado tres movimientos y las coordenadas solo cambian de signo.



¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta.

Procedemos a ubicar el cuadrilátero inicial.

Seguimos con el vector de traslación (10; 3). A las abscisas le sumamos 10 y a las ordenadas les sumamos 3, entonces los vértices serán *A*'(2; 4), *B*'(3; 8), *C*'(7; 6), *D*'(4; 6).

Ahora realizamos el giro de (0; −90°) en sentido horario, entonces tenemos los vértices *A*''(4; −2), *B*''(8; −3), *C*''(6; −7), *D*''(6; −4).

Realizamos la simetría axial respecto al eje Y: para *A* se trasladan 4 unidades; para *B*, 8 unidades; para *C*, 6 unidades; y para *D*, 6 unidades. Así tendremos las coordenadas de la posición final *A*'''(−4; −2), *B*'''(−8; −3), *C*'''(−6; −7), *D*'''(−6; −4).

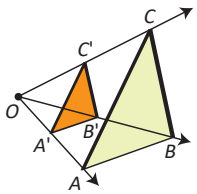
La afirmación es incorrecta, pues la figura no coincide con la posición inicial.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Homotecias

Situación: Logo publicitario

Un diseñador necesita que el nuevo logotipo triangular que está elaborando sea una copia exacta, pero ampliada tres veces su tamaño original. ¿Cómo puede hacer para que el logotipo aumente de tamaño, pero conserve su forma exacta?



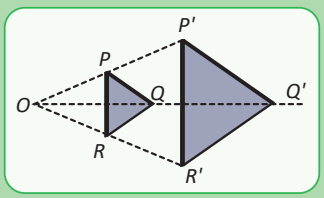
Los lados del triángulo deben aumentar de manera proporcional; así, ampliamos la figura y mantenemos su forma, pues sus medidas angulares internas no cambian.

Se concluye que todas las medidas deben aumentar proporcionalmente desde un punto fijo de centro *O*. A este procedimiento se le denomina homotecia con razón de ampliación 3 ($k = 3$).

El problema resuelto ilustra que una **homotecia de ampliación**, de centro *O* y razon *k*, en la que $k > 1$, denotada por $H(O; k)$, es la transformación que hace corresponder a cada punto *P* otro punto *P'*, alineado con *O* y *P*, de forma que $OP' = k \times (OP)$.

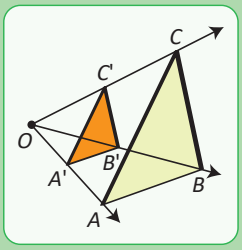
El punto *O* se llama centro de homotecia y la constante *k* **razón de homotecia.**

$$\frac{OP'}{OP} = \frac{OQ'}{OQ} = \frac{OR'}{OR} = k$$



Una **homotecia de reducción,** de centro *O* y razón *k*, en la que $0 < k < 1$, denotada por $H(O; k)$, es la transformación que hace corresponder a cada punto *A* otro punto *A'*, alineado con *O* y *A*, de forma que $OA' = k \times (OA)$.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB} = \frac{OC'}{OC} = k$$



Situación: Trabajo universitario

En un trabajo universitario se pide aplicar una homotecia $H(O; 1{,}5)$, con $O = (0; 0)$, a un triángulo de vértices $A(4; 2)$, $B(2; 6)$, $C(6; 4)$ para encontrar los vértices del triángulo imagen. Alejandra afirma que si a las coordenadas de los vértices les sumamos 1,5, obtenemos $A_1(5{,}5; 3{,}5)$, $B_1(3{,}5; 7{,}5)$, $C_1(7{,}5; 5{,}5)$. ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

Para encontrar el triángulo homotético, realizaremos el producto de las coordenadas de los vértices de *ABC* con la razón de la homotecia $1{,}5 = \frac{3}{2}$.

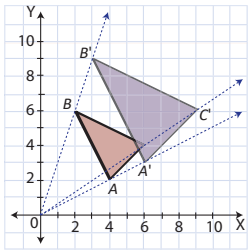
Entonces

$$A(4; 2) \Rightarrow A'\left(4 \times \frac{3}{2}; 2 \times \frac{3}{2}\right) = A'(6; 3)$$

$$B(2; 6) \Rightarrow B'\left(2 \times \frac{3}{2}; 6 \times \frac{3}{2}\right) = B'(3; 9)$$

$$C(6; 4) \Rightarrow C'\left(6 \times \frac{3}{2}; 4 \times \frac{3}{2}\right) = C'(9; 6)$$

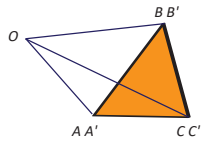
Nos damos cuenta de que Alejandra comete un error al sumar la razón a los vértices en vez de multiplicarlos.



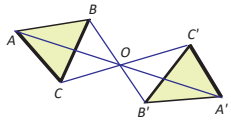
Ten en cuenta

- Si $k = 1$, entonces $OA = OA'$ y $OB = OB'$ y $OC = OC'$.

  Luego, las figuras son congruentes y se superponen.



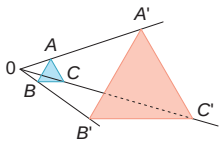
- Si $k = -1$, entonces las figuras son isométricas respecto al centro de homotecia.



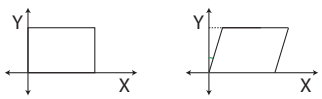
Ten en cuenta

Algunas transformaciones no isométricas mantienen la forma original de las figuras.

Por ejemplo, la homotecia sí conserva la forma, aunque puede cambiar el tamaño, como se muestra a continuación



En cambio, una proyección oblicua deforma la figura, de modo que hace que cambie su forma, como se muestra a continuación



Evalúa tus progresos

- Aplica la homotecia para modelar y calcular imágenes de figuras.
- Justifica conclusiones mediante ejemplos y corrige errores.

Actividad lúdica



¡Asume el desafío! Interpreta las reglas del juego, desarrolla tus estrategias y da sentido matemático a tus acciones.

Propósito de aprendizaje

Modela un juego de mesa con coordenadas cartesianas, simetrías y rotaciones para ubicar piezas. Comunica jugadas y consecuencias basadas en transformaciones geométricas. Aplica estrategias de anticipación y simetría para elegir posiciones que maximicen espacio y optimicen decisiones. Argumenta la efectividad de las jugadas, y justifica la ventaja obtenida mediante conceptos geométricos.

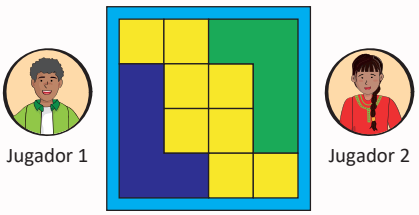
Practica valores

- Muestra disposición para recibir retroalimentación; asume inmediatamente en nuevas tareas para mejorar en el aprendizaje.
- Refuerza la solidaridad y la responsabilidad al resolver problemas vinculados con el ambiente, compartiendo estrategias de solución y reflexionando sobre el uso adecuado de los recursos naturales.

Torneo de clasificación del juego de la L

1. Situación

En una competencia te enfrentas a un oponente en el juego de la L en un tablero de 4 × 4 vacío. Tu objetivo es desarrollar una estrategia que te permita inmovilizar a tu contrincante en menos de cinco movimientos, y ser capaz de identificar la jugada más efectiva desde el inicio con el fin de que ocupes un espacio importante y obligar a tu oponente a responder de una manera muy limitada, de ese modo tu victoria estará asegurada. ¿Qué decisiones iniciales influyen en el resultado final?



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Se dispone de dos L y dos fichas de un color neutro. Cada jugador elige una pieza en forma de L de color distinto.

b. El juego comienza con un tablero vacío.

c. En cada turno, el jugador puede:

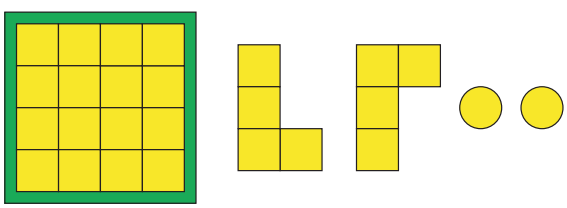
- Colocar o mover su pieza L en una posición válida (que ocupan cuatro casillas conectadas en forma de L).
- Si lo desea mueve, una de las fichas neutras a una casilla vacía.

d. Las piezas no deben superponerse ni salirse del tablero.

e. No se permite repetir el mismo estado del tablero en turnos consecutivos.

f. Gana quien logre inmovilizar la pieza del oponente, y le impida realizar un movimiento válido.

g. Si ambos jugadores no pueden avanzar o acuerdan dar por finalizada la partida, se declara empate.



3. Desarollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

a. Diseña una jugada inicial que permita ganar en pocos movimientos. Por ejemplo, apertura (recomendado: esquina) y registra L.

b. Planifica una secuencia para bloquear al oponente en el tercer turno.

c. Identifica posiciones de victoria equivalentes por simetría o rotación.

d. Propón variantes con tableros de 5 × 5 o con piezas en forma de T.

Propuesta de planilla de coordenadas y registro de jugadas

Turno	Jugador	Acción (L/ficha neutra)	Coordenadas L (3 casillas)	Coordenadas (ficha neutra)	¿Estado válido? (Sí/No)

4. Reflexión

a. ¿Cómo influyó la simetría del tablero en tus decisiones de juego?

b. ¿Cuántas posiciones equivalentes puedes identificar usando giros o reflejos?

c. ¿Qué coordenadas tienen en común las casillas ocupadas por tu pieza en distintas jugadas?

d. ¿Cómo describirías la posición de tu pieza L usando coordenadas cartesianas?

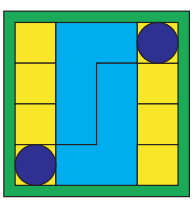
e. ¿Qué área cubre cada pieza L? ¿Cuántas combinaciones de ubicación puede tener en el tablero?

f. ¿Qué perímetro tienen las piezas en diferentes posiciones del tablero?

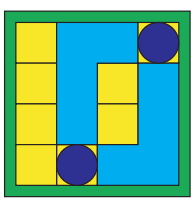
g. ¿Puedes contar cuántas casillas quedan libres después de colocar ambas piezas y las fichas neutras?

h. ¿Cómo afecta el número de casillas ocupadas a la posibilidad de realizar un movimiento válido?

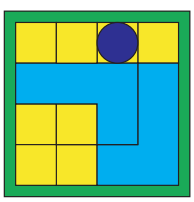
i. ¿Qué evidencias presentarías para afirmar que la posición solo admite empate forzado?



Movimiento del jugador 1



Movimiento del jugador 2



Movimiento del jugador 3

Evalúa tus progresos

- Relaciona posición y movimiento en el tablero, representa las jugadas mediante coordenadas y aplicando simetrías o rotaciones de las piezas.
- Expresa, con lenguaje geométrico (coordenadas, rotación, simetría, área), el estado del tablero e interpreta la distribución de casillas ocupadas para planificar el siguiente movimiento.
- Emplea conteo de casillas, área y perímetro para identificar posiciones ventajosas y optimizar el espacio disponible en el tablero.
- Justifica que una jugada es óptima con base en la simetría, el área ocupada o el bloqueo de movimientos, y evalúa el impacto de las decisiones en el resultado final del juego.

UNIDAD

6

Diseñamos soluciones eficientes para entornos urbanos y rurales

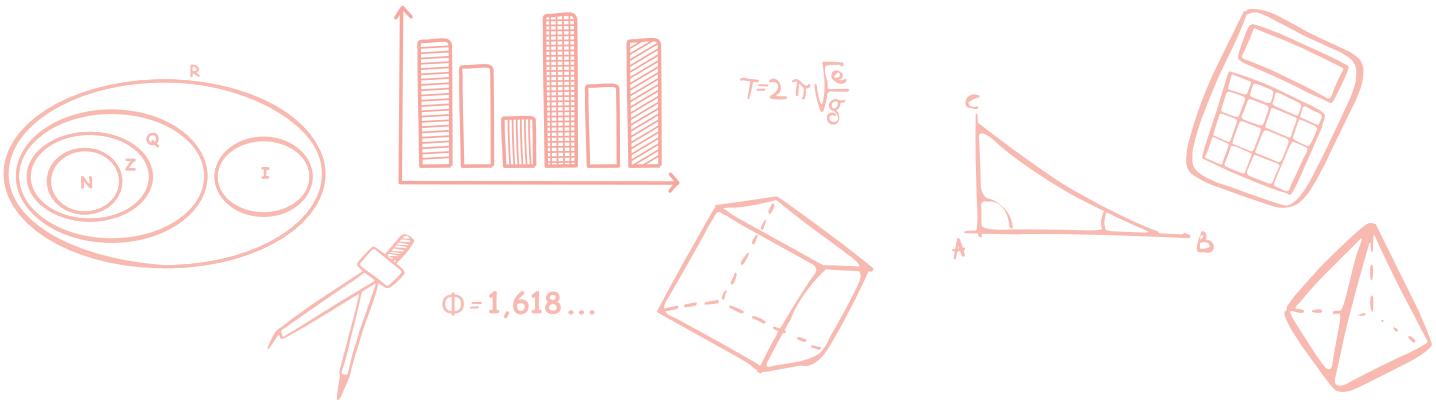


OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

11 CIUDADES Y COMUNIDADES SOSTENIBLES

Este objetivo busca asegurar que las ciudades y los asentamientos humanos sean inclusivos, seguros, resilientes y sostenibles. Se conecta directamente con:

- La creación de propuestas que mejoren la infraestructura urbana.
- El diseño de soluciones que fomenten la sostenibilidad del entorno como sistemas de transporte o riego eficientes, accesibles y seguros.
- La promoción de prácticas del uso responsable del espacio, los recursos naturales y la tecnología.





Fuente: Freepik.es

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque de búsqueda de la excelencia
  - Flexibilidad y apertura
  - Superación personal
- Enfoque ambiental
  - Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional
  - Respeto a toda forma de vida

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Magnitudes proporcionales
- Magnitudes proporcionales compuestas
- Magnitudes proporcionales y regla de tres

Formas bidimensionales
- Triángulos congruentes
- Criterios de congruencia
- Triángulos semejantes
- Criterios de semejanza

Medidas de formas bidimensionales
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos
- Triángulos rectángulos notables
- Razones trigonométricas en triángulos rectángulos notables

Formas tridimensionales
- Proyección ortogonal
- Vistas ortogonales

Escala
- Mapas: curvas de nivel

Eventos probabilísticos
- Probabilidad de sucesos independientes
- Probabilidad de sucesos dependientes

Investigamos



Examina cada situación, asume un rol, resuelve con apoyo del anexo y reflexiona sobre las soluciones matemáticas.

SITUACIÓN
Diseño de un sistema de transporte en una ciudad con relieve variado

Una ciudad con un relieve variado está evaluando implementar un sistema de transporte público de bicicletas compartidas que tome en cuenta las diferencias topográficas. Para lograr esto, se debe considerar la altitud y las pendientes del terreno. Como ingeniero civil, tu tarea será diseñar un sistema de bicicletas que reduzca el esfuerzo de los usuarios y maximice la eficiencia del servicio.



Fuente: Freepik.es

¿Cómo puedes diseñar un sistema de bicicletas compartidas de manera accesible y eficiente para una ciudad con un relieve variado, de modo que beneficie al mayor número de ciudadanos?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Elabora** un mapa topográfico de tu ciudad usando una escala adecuada y curvas de nivel. Luego, identifica las zonas de mayor tránsito peatonal, las áreas altas y bajas, y las rutas óptimas para el transporte público.
- **Selecciona** el tipo de sistema de bicicletas compartidas más adecuado según las pendientes del terreno y las necesidades de los usuarios. Para ello, utiliza razones trigonométricas (por ejemplo, para calcular inclinaciones de las pistas).
- **Ubica** estratégicamente las estaciones de bicicletas en zonas de alta afluencia. Traza triángulos en el plano para verificar si son congruentes o semejantes, lo que permitirá una distribución proporcional. Además, formula una propuesta de ciclovías seguras y tranquilas que conecten las estaciones, y justifica tu propuesta mediante la representación tridimensional del terreno.
- **Elige** una ruta en el mapa en función de la distancia, del tiempo y de la velocidad de acuerdo con el terreno o la altitud. Luego, formula problemas de proporcionalidad compuesta para hallar valores desconocidos (por ejemplo, el tiempo requerido en una subida o la velocidad necesaria para llegar en un tiempo determinado en bicicleta).
- **Promociona, evalúa y mejora** el sistema de bicicletas. Para ello, realiza una simulación sencilla sobre el uso del sistema de bicicletas compartidas, y evalúa su estado utilizando la probabilidad de sucesos independientes y dependientes.

SITUACIÓN
Diseño de riego por goteo para la agricultura sostenible

Un grupo de agricultores en una región de clima variable busca optimizar el diseño de un sistema de riego por goteo para maximizar la eficiencia en el uso del espacio, del agua y de los nutrientes. El terreno posee desniveles, lo que representa un desafío adicional para la distribución del riego. Como ingeniero agrónomo, tu tarea será diseñar un sistema de riego por goteo que distribuya el agua y los nutrientes de manera uniforme entre todos los cultivos.

Cada año hay 10 mil hectáreas nuevas con riego por goteo



Fuente: Freepik.es

¿Cómo puedes diseñar un sistema de riego por goteo que garantice un crecimiento homogéneo y proporcional de los cultivos, y que aumente la producción sostenible?

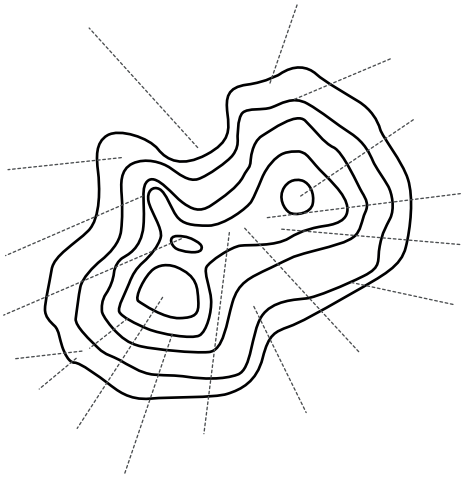
Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

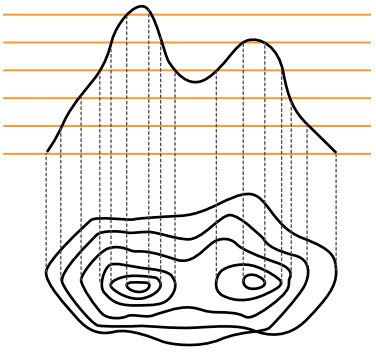
- **Elabora** un mapa topográfico a escala del terreno, simula curvas de nivel y mide las distancias para identificar desniveles y pendientes con el fin de planificar con precisión la ubicación de tuberías y goteros.
- **Determina** los ángulos de inclinación que afectan la presión y distribución del agua. Para ello, utiliza razones trigonométricas (tangente, seno, coseno), luego propón datos de distancia horizontal y desnivel (altura).
- **Estima** la cantidad de agua necesaria, el número de goteros y el tiempo de riego para cubrir toda el área cultivada. Para ello, considera los datos del anexo y ajusta las cantidades aplicando la proporcionalidad compuesta. Si es necesario, asume valores razonables para los datos que falten.
- **Diseña** la red de tuberías y goteros, para ello, asegura que la forma y distribución sean proporcionales y uniformes. Esto garantiza un riego homogéneo en todo el terreno, incluso en zonas con desniveles mediante el uso de la congruencia y semejanza de triángulos.
- **Evalúa** la confiabilidad del sistema mediante el análisis de la probabilidad de fallos independientes (como la obstrucción de un gotero) y dependientes (fallos que afecten varias partes del sistema) con el fin de prever mantenimientos y asegurar un funcionamiento continuo y eficiente.

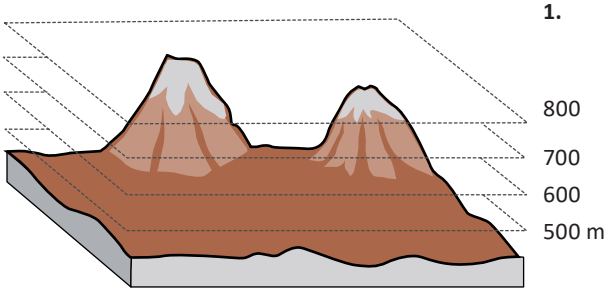
Anexo A: Diseño de un sistema de transporte en una ciudad con relieve variado

1. Ejemplo de un mapa topográfico del relieve y curvas de nivel

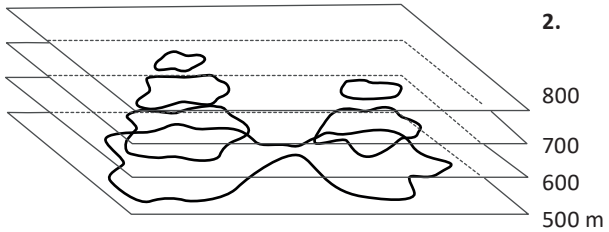
Relieve



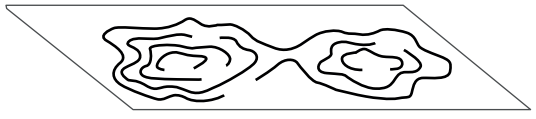




Suponer una serie de planos horizontales a igual distancia entre sí.



La intersección de los planos con el relieve origina unas líneas cerradas: curvas de nivel.



Las curvas de nivel obtenidas se representan juntas a escala de un solo plano: el plano del mapa.

Obtención de las curvas de nivel.

Mapa topográfico

Fuente: Ruiz, B. (s. f.).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Sistema de bicicletas compartidas

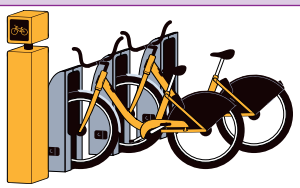
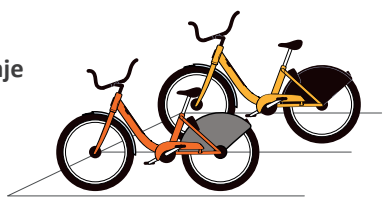
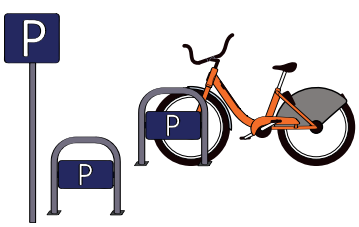


Fuente: Freepik.es

Los sistemas de bicicletas compartidas han adoptado muchas formas en la última década: desde bicicletas gratuitas distribuidas por toda una comunidad hasta estaciones gestionadas manualmente por un asistente, e incluso los sistemas tecnológicamente más avanzados y seguros que vemos hoy en día en la mayoría de las ciudades. Sin embargo, el propósito de estos sistemas siempre ha sido el mismo: permitir a los usuarios recoger una bicicleta en un lugar y devolverla en otro, para facilitar la movilidad de un punto a otro.

A la hora de planificar un sistema de bicicletas compartidas, es importante tener en cuenta una gran variedad de factores: la densidad, la topografía y el clima de la ciudad, así como su compromiso con la inversión en infraestructura, y su voluntad política para fomentar la movilidad activa.

a. Tipos de sistema de bicicletas compartidas

Tipo	Población (millones)
Con anclaje 	Sistemas que requieren que las bicicletas sean recogidas y devueltas en espacios de anclaje designados o candados inteligentes.
Sin anclaje 	Sistemas que no requieren puntos de anclaje fijos. Los usuarios localizan y desbloquean una bicicleta mediante una aplicación web o móvil y completan el viaje cerrando el candado de la bicicleta.
Híbridos 	Sistemas que combinan puntos de anclaje en estaciones físicas y en zonas geocercadas. Los usuarios tienen la opción de recoger y devolver bicicletas en una estación; recoger una bicicleta en una estación y bloquearla en cualquier lugar dentro de la zona designada; recoger una bicicleta dentro de la zona y devolverla a una estación; o recoger y bloquear una bicicleta en cualquier punto dentro del área designada.

Fuente: Yanocha et al. (2018).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Planificación de sistemas con anclaje

a. Ubicación de las estaciones

La selección de la ubicación adecuada para las estaciones es fundamental para asegurar un uso frecuente y eficiente del sistema. Las estaciones deben estar a intervalos regulares y en sitios estratégicos que generen actividad durante todo el día. El diseño y la ubicación de las estaciones deben considerar el entorno urbano.

Características ideales de ubicación de estaciones

En la vereda	En la calle
• Zona soleada con mínima cobertura arbórea • Próxima a estaciones de transporte público • Área de alta visibilidad • Acceso fácil para usuarios y mantenimiento de los vehículos • Cerca de la infraestructura ciclista • Dejar un mínimo de 2 metros de espacio libre para peatones	• Cerca de los cruces • Cerca de estaciones de transporte público • Alta visibilidad y alumbrado público • Calles con bajo volumen vehicular y límites de velocidad bajos • Adyacente a infraestructura ciclista • No bloquea elementos urbanos como alcantarillas o desagües

Fuente: Yanocha et al. (2018).

4. Tablas adicionales

a. Velocidad promedio en bicicleta según altitud

Altitud de la zona	Velocidad promedio (m/s)	Velocidad promedio (km/h)	Comentarios
Zona baja	3,3 - 4,2	12 - 15	Buen rendimiento en terreno plano o urbano. Requiere poco esfuerzo físico y sin efectos de altitud.
(0 - 500 m s. n. m.)	2,5 - 3,6	9 - 13	Leve reducción de velocidad debido a la pendiente o fatiga. Posibles tramos irregulares.
Zona media	1,8 - 2,7	6,5 - 9,7	Disminución notable de velocidad por menor oxigenación y mayor esfuerzo en subidas o caminos no pavimentados.

b. Calidad de bicicletas por estación

Estación	Total de bicicletas	Bicicletas con fallas	Bicicletas operativas
1	10	2	8
2	8	1	7
3	12	3	9
4	9	1	8
5	14	2	12

Información propuesta y adaptada para fines educativos

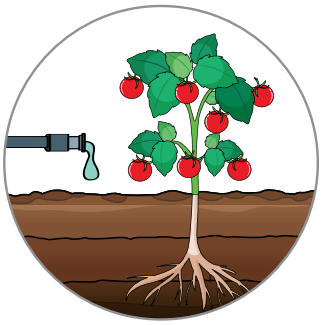
Anexo B: Diseño de riego por goteo para la agricultura sostenible

1. ¿Qué es el sistema de riego por goteo?

El riego más eficiente es por goteo

Con este método de riego, se utiliza mucha menos agua que con el riego por aspersión y por gravedad. Sin embargo, el costo de instalación de estos sistemas es alto.

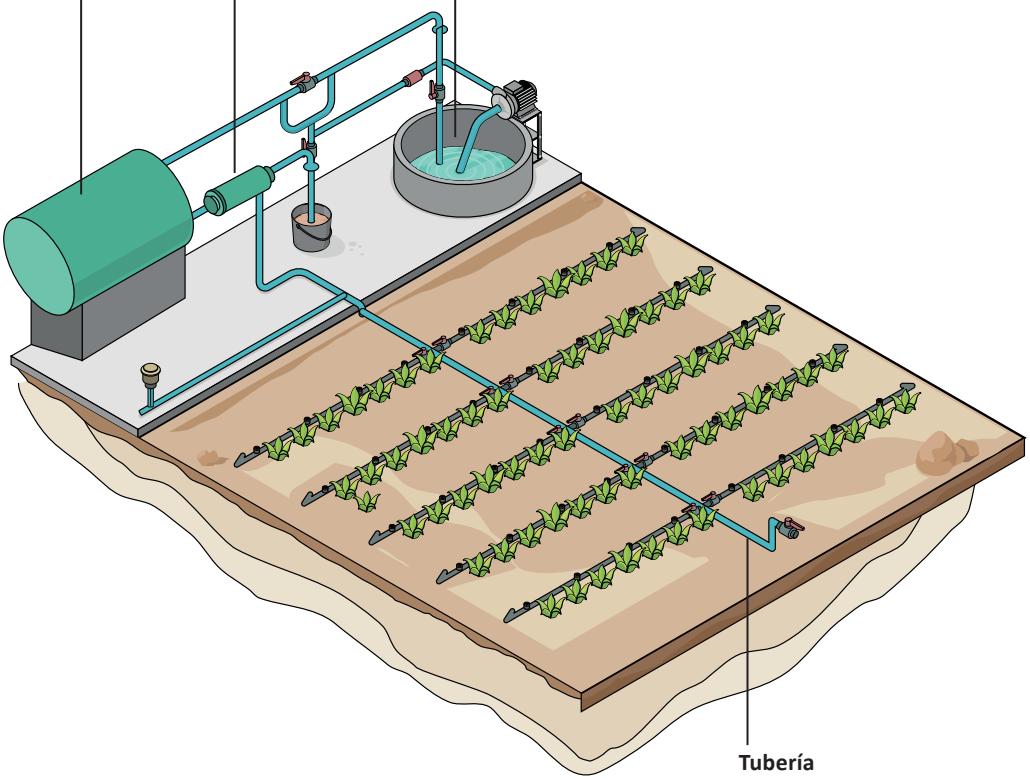
Goteros
Son propensos a taponearse. Se deberían limpiar una vez cada dos meses. Son colocados a 20, 30 a 50 centímetros de distancia.



Bomba de agua
Se debe verificar la presión una vez al mes.

Filtros
Estos necesitan limpieza a diario.

Depósito de agua o pozo



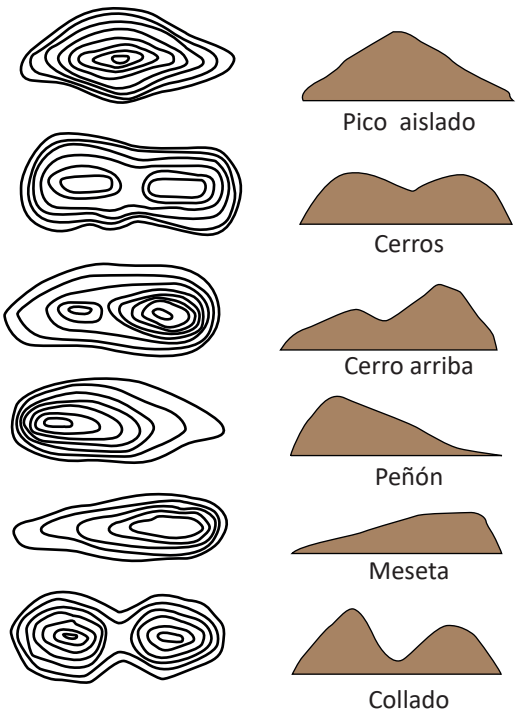
Tubería

Fuente: Adaptado de Interés agronómico. (2022).

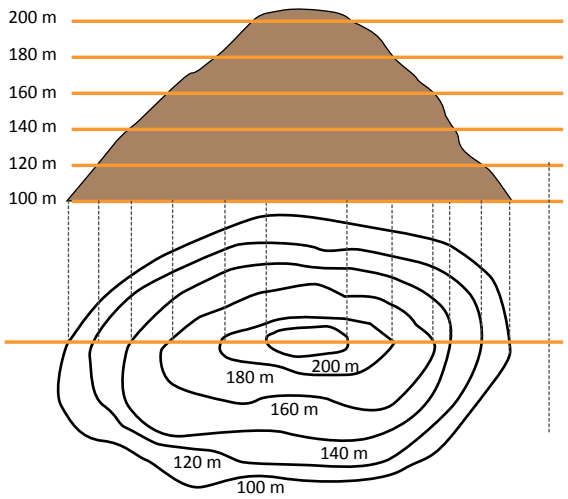
Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Ejemplo de representación de las curvas de nivel

Aprende a interpretar las curvas de nivel



Nota: Las alturas de los cerros serán definidas por las cotas colocadas en los planos topográficos



Fuente: Newton Almeida (2014).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Tablas

a. Características del terreno

Punto A (tanque)	Punto B (cultivo)	Altura (m)	Distancia horizontal (m)
A	B	2,0	10,0
A	C	1,5	7,0
A	D	1,4	6,0
A	E	1,6	6,0
A	F	2,0	7,0

b. Necesidades hídricas, número de goteros de algunos cultivos

Cultivo	Área (m^2)	Necesidad de agua (L/m^2/día)	Cantidad total de agua (L/día)	Número de goteros (suponiendo 2 L/h)	Tiempo de riego (minutos)
Tomate	50	4	200	5	60
Lechuga	30	2	60	2	45
Páprika	40	3	120	3	60
Zanahoria	35	3,5	122,5	4	55
Maíz	60	5	300	6	60

c. Fallas de goteros

Total de goteros	Goteros fallados	Goteros buenos
40	4	36
50	5	45
60	3	57
70	2	68
80	5	75
100	10	90
120	15	115

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Exploramos



¡Tú puedes! Usa tus aprendizajes previos y descubre cómo aplicarlos en estos retos.

1. Proporcionalidad en recetas de tortas

Julia está probando tres recetas distintas de tortas para su emprendimiento de postres. Para mantener el sabor equilibrado, sigue una regla fija: 2 g de chocolate por cada gramo de harina.

a. ¿Qué cantidad de chocolate es necesaria en cada receta para mantener el sabor? Completa la tabla.

Receta	Cantidad de harina (g)	Cantidad de chocolate (g)
A	60	
B	80	
C	100	

b. ¿Cómo representarías esta relación en el plano cartesiano? ¿Qué expresión matemática describe esta situación?

c. Se afirma: "Si la receta mantiene una proporcionalidad directa, al duplicarse la cantidad de harina, la cantidad de chocolate se divide entre dos". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

2. Llenado del reservorio

En una comunidad se organiza una faena comunal para llenar un reservorio de agua. Se sabe que un solo grifo tarda 6 horas en llenar el reservorio. Sin embargo, se pueden conectar varios grifos iguales, y todos funcionan al mismo tiempo y con el mismo caudal de agua.

N.° de grifos	1	2	3
Tiempo (h)	6	3	2

a. ¿Qué relación existe entre la cantidad de grifos utilizados y el tiempo que se tarda en llenar el reservorio?

b. ¿Qué expresión matemática permite calcular cuánto tiempo tomará el llenado si se conectan 4; 5; 6 o más grifos?

c. Se asegura lo siguiente: "La gráfica de una proporcionalidad inversa siempre es una recta decreciente". ¿Concuerdas con esta afirmación? Sustenta tu respuesta con la expresión matemática hallada.

3. Exprimir naranjas: una relación de proporcionalidad

Algunos estudiantes se organizaron para abrir un puesto de jugo de naranja en la feria solidaria. Uno de ellos logró exprimir 480 naranjas en una hora sin hacer pausas. Para atender a más visitantes este fin de semana, ellos deciden trabajar en equipo al mismo ritmo (se desconoce tiempos de preparación y descansos).

a. ¿Cuántos minutos les tomará exprimir las 480 naranjas si ahora participan 5 o 12 estudiantes, y todos trabajan al mismo tiempo?

b. ¿Qué tipo de relación existe entre la cantidad de personas que participan en la tarea y el tiempo requerido para completarla? ¿Cómo se representa en el plano cartesiano? Explica lo que observas.

c. ¿Cambiaría esta relación si los estudiantes trabajaran a ritmos diferentes? Explica tu respuesta.



4. Reparto veloz

Un grupo de jóvenes emprendedores ha creado un sistema de reparto de productos agrícolas entre varias ciudades. Para evaluar la eficiencia del transporte, registran que una miniván recorre 165 km en 3 horas y mantiene una velocidad promedio. Ahora deben trasladar un lote de productos a un pueblo lejano, ubicado a 330 km de distancia.

a. Completa la siguiente tabla:

Tiempo (h)	3	5	12	15	20	25
Distancia (km)	165			825		

b. ¿Cuántas horas les tomará completar el viaje si mantienen la misma velocidad promedio? Fundamenta tu respuesta.

5. Mural escolar

Un grupo de estudiantes pintará un mural artístico en una pared del colegio. En un mural anterior, de 52 m², se usaron exactamente 24 litros de pintura. Esta vez, el nuevo mural tendrá 78 m² de superficie. ¿Cuánta pintura utilizarán?

Un estudiante plantea lo siguiente:

$$\frac{52}{58} = \frac{x}{24} \Longrightarrow x\,\frac{52 \times 24}{78} = \frac{1248}{78} = 16$$

Se necesitarán 16 litros de pintura.

a. ¿Son correctos los procesos ejecutados? En caso de haber un error, ¿cuál sería la corrección?

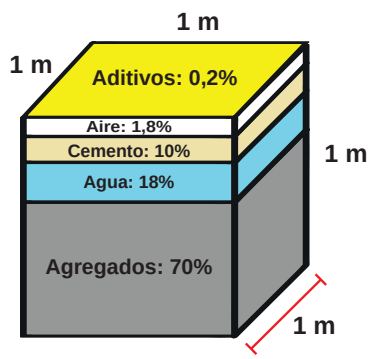
b. Se afirma: "En una relación inversa, la razón entre las magnitudes es constante". ¿Te parece acertada esta afirmación? Justifica tu respuesta.

6. ¿Cómo se reparte el concreto?

En tu colegio construirán un aula y necesitarán preparar una mezcla de concreto. Un ingeniero muestra esta imagen, que indica las proporciones típicas de los componentes en 1 m³ de mezcla.

a. Completa los datos en la tabla.

Volumen de mezcla	Volumen de materiales				
	Agregados (arena y piedra chancada) m³	Agua (m³)	Cemento (m³)	Aire (m³)	Aditivos (m³)
1 m³	0,70	0,18	0,10	0,018	0,002
2 m³					
3 m³					
6 m³					



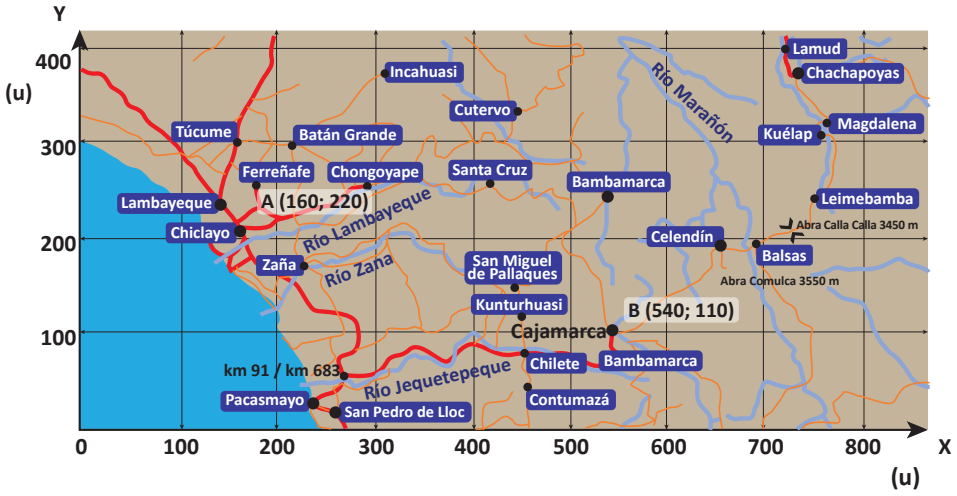
b. Responde.

- ¿Qué volumen ocupa cada material si se preparan 6 m³ de concreto? ¿Notas alguna relación entre el volumen de la mezcla y el de cada material? Explícalo.
- Se afirma lo siguiente: "Al aumentar el volumen total de mezcla, los porcentajes de cada material también aumentan". ¿Estás de acuerdo con esa afirmación? Justifica tu respuesta.
- Construye gráficos que representen cómo varían los agregados, el agua y el cemento en relación con el volumen total de la mezcla. ¿Cómo interpretas estos gráficos en el contexto de la situación?

1. Ruta alterna segura

Durante los días de lluvia, una de las principales rutas de transporte público se vuelve riesgosa debido a los deslizamientos de tierra en zonas de alta pendiente.

a. A continuación, se muestra un mapa que muestra centros poblados del norte del país:



b. Propón rutas para ir desde la estación A (160; 220), ubicada en Chiclayo, hasta la estación B (540; 110), en Cajamarca, para ello, asegura que el recorrido pase por centros poblados. Considera los desplazamientos en línea recta.

c. ¿Cuál es la distancia de recorrido más corto para ir de la estación A a la estación B? Considera cada 100 unidades ≈ 39 km.

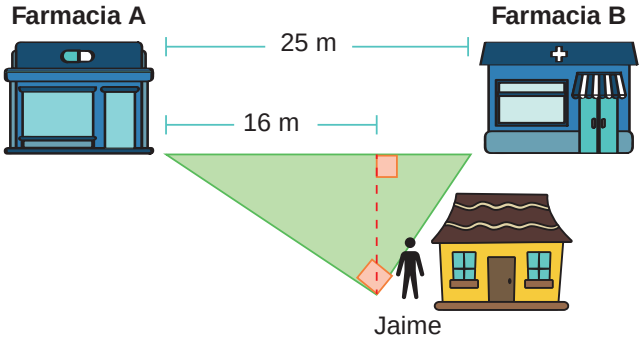
d. Se propone lo siguiente: "La ruta más corta en el plano de Cajamarca a Chachapoyas siempre será la más rápida, incluso si atraviesa zonas con pendientes elevadas". ¿Qué opinas sobre esta afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

3. ¿Qué farmacia le conviene a Jaime?

Dos farmacias se ubican en el mismo lado de la calle. Jaime, que vive al frente, quiere comprar un medicamento en cualquiera de ellas.

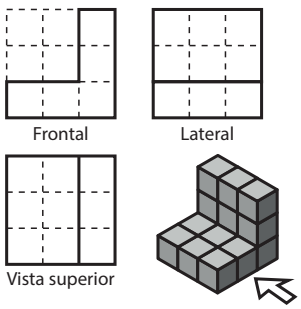
a. ¿A cuántos metros se encuentra la farmacia más cercana a la casa de Jaime?

b. ¿Qué sucede si la farmacia A cambia de ubicación, pero mantiene un triángulo semejante al anterior? Explica con un gráfico cómo se conservarían las relaciones entre los lados del triángulo y qué elementos geométricos te permiten afirmar que los triángulos son semejantes.

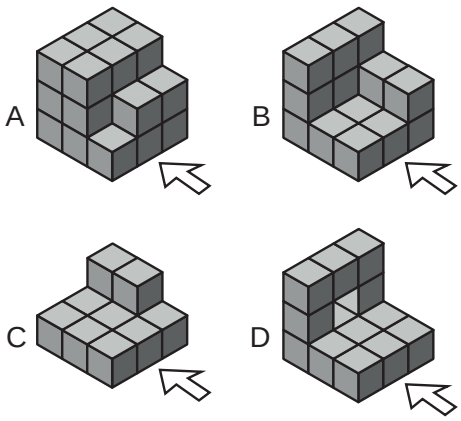


4. Objetos singulares

Observa el ejemplo.

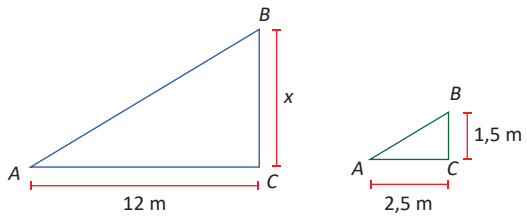


Presenta las tres vistas principales de los siguientes objetos:



5. Triángulos semejantes

Se han construido dos triángulos rectángulos semejantes, tal como se muestra. ¿Cuál es la longitud del lado $\overline{BC}$?



Solución propuesta

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{B'C'}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{A'C'}} \quad \frac{x}{2,5} = \frac{12}{1,5} \quad x = \frac{30}{1,5} \quad x = 20$$

La longitud del lado $\overline{BC}$ es 20 m.

a. Verifica si el valor de x cumple la proporción. En caso contrario, plantea el procedimiento correcto.

b. Se considera lo siguiente: "En triángulos semejantes, los ángulos correspondientes no siempre son iguales; solo los lados lo son". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

6. Construcción de un invernadero

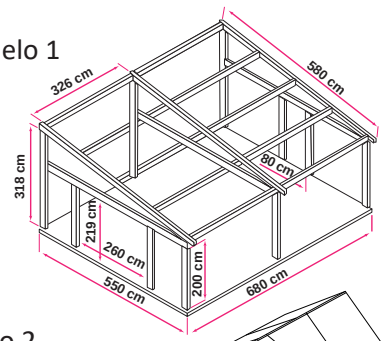
A continuación, se muestran dos modelos de invernadero:

a. Representa ambos modelos mediante una vista frontal. A partir de ello, identifica las medidas y relaciones que se forman con triángulos, y explica cómo se relacionan sus lados y ángulos.

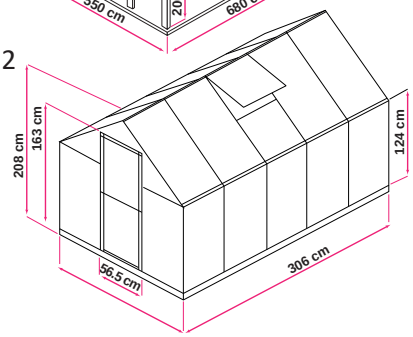
b. ¿Puedes afirmar que los triángulos formados son semejantes, congruentes o distintos? Explica tu elección.

c. Representa la estructura triangular del techo de uno de los modelos y señala qué propiedades se conservarían si se desea ampliar el tamaño del invernadero de forma proporcional.

Modelo 1

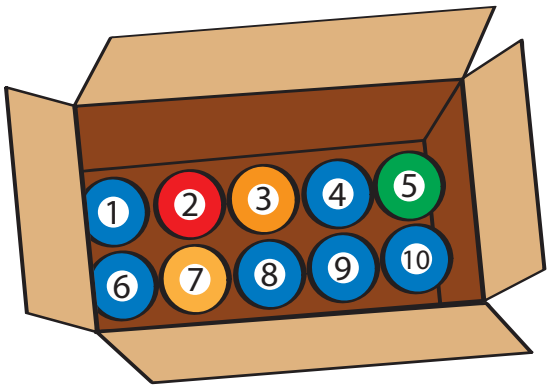


Modelo 2



1. La caja sorpresa: ¿qué bolita saldrá?

Se tiene una caja que contiene bolitas del mismo tamaño, peso y textura, en cinco colores y numeradas del 1 al 10, como se muestra en la imagen.



a. Si se extrae una bolita al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea azul y esté numerada con un valor mayor que 5?

b. Se afirma: "La probabilidad de extraer al azar una bolita con número par es menor que la de extraer una con número impar". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Un juego con las monedas

Se propone un juego que consiste en lanzar tres monedas al aire. El costo de participar es de S/2 y los premios posibles se encuentran en el cartel.

Lanza y gana

Tres caras o tres sellos:
1 parlante portátil

Dos caras y un sello:
1 mochila deportiva



a. ¿Cuáles son todos los resultados que se podrían obtener en este juego? ¿Cómo los podrías organizar?

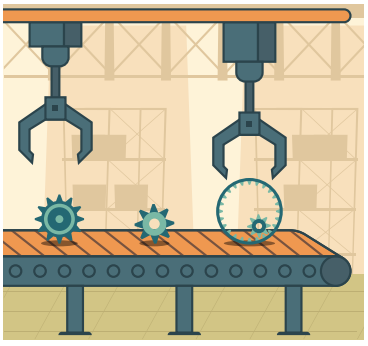
b. ¿Cuál es la probabilidad de ganar un parlante portátil?, ¿y de ganar una mochila deportiva? Explica si los sucesos son probables, muy probables o casi seguros.

c. Se afirma: "Si se ejecuta muchas veces seguidas este juego, la probabilidad de ganar un parlante aumenta". ¿Consideras correcta esta afirmación? Sustenta tu respuesta.

3. Piezas defectuosas

Una fábrica ensambla piezas compuestas con tres componentes. Después de ensamblar un lote de 300 piezas, el equipo de control de calidad realizó la inspección correspondiente y detectó defectos en algunos componentes

25 piezas en el componente A
32 piezas en el componente B
15 piezas en el componente C



a. Si seleccionas una pieza de manera aleatoria, ¿qué procedimiento seguirías para calcular la probabilidad de que tenga un defecto en el componente B?

b. Compara las probabilidades de encontrar defectos en los componentes A, B y C. ¿Cómo interpretarías estos valores en términos de eventos seguros, posibles o imposibles? Justifica tu respuesta.

4. Juego de dados

Mateo y sus amigos participan en un desafío de dados en una feria. El juego consiste en lanzar dos dados (con la misma medida y masa) de seis caras y sumar los valores que aparecen en las caras superiores.

Se sabe que si la suma es mayor a ocho, el jugador gana un premio; si es ocho o menor, pierde el turno.

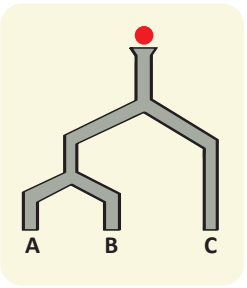
a. Completa la siguiente tabla:

Dado 1 / Dado 2	1	2	3	4	5	6
1	2					
2						
3			6			
4						
5						
6				10		

b. ¿Cómo podrías calcular la probabilidad de ganar el premio en este juego?

5. ¿Qué tan probable es un suceso?

Se suelta una pelota por unas tuberías, tal como indica la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de que caiga en A si cuando llega a una bifurcación, la pelota tiene la misma probabilidad de dirigirse a la izquierda o a la derecha?



La pelota puede caer en A, B o C, así que hay tres caminos posibles. Como todos los caminos parecen iguales y hay tres salidas, entonces la probabilidad de que caiga en cada una es igual. Luego, la probabilidad de que caiga en A es $\frac{1}{3}$.

a. ¿Estás de acuerdo con la solución planteada? De no ser así, identifica el error y corrígelo.

b. Se sostiene lo siguiente: "Es lo mismo decir 'tres salidas' que 'tres caminos equiprobables'". ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

6. Un menú singular

Andrea administra un restaurante y organiza menús que consisten en entrada, segundo y postre. Para organizar los menús, ella elabora tres cajas con papelitos que contienen nombres de cada opción.

a. ¿Cuál es la probabilidad de escoger al azar un menú cuya entrada incluya un ceviche y cuyo segundo sea un lomo saltado?

b. Se afirma lo siguiente: "Como hay más segundos que entradas, es más probable que salga un lomo saltado que un ceviche". ¿Te parece acertada esta afirmación? Explica tu respuesta.

c. Entre los siguientes sucesos, indica cuál es seguro, posible, improbable o imposible. Explica la razón de tu clasificación.

- Que el menú tenga exactamente tres platos distintos.
- Que al azar se repita el mismo plato en la entrada y el segundo.
- Que el menú incluya un postre que no está en la lista.
- Que al armar el menú se incluya una entrada.



Desarrollamos



Reflexiona críticamente sobre situaciones, muestra resoluciones, explica ideas matemáticas y profundiza al afrontar nuevos retos.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve situaciones que involucran la relación entre tres o más magnitudes mediante el uso de la proporcionalidad compuesta, representa las relaciones directas e inversas en tablas y argumenta la validez del procedimiento matemático.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Escucha con atención y respeto las ideas y opiniones de tus compañeros, aunque sean distintas.
- Usa gráficos para visibilizar especies locales, promueve el respeto cotidiano hacia sus ciclos, hábitats y necesidades específicas.

Pensamos y actuamos

En el distrito de San Miguel de Cajamarca, varias familias trabajan en el tejido artesanal. La señora Rosales, responsable de un taller textil, recibió un pedido de mantas tejidas a mano. Para planificar la producción, debe calcular cuántas mantas puede elaborar su equipo en distintas condiciones: con 4 personas, trabajando 5 días, deben tejer 40 mantas de diseños vistosos. Ella quiere saber lo siguiente: ¿cuántas mantas podrán tejer 6 personas si trabajan 8 días?



1. Analiza y responde.

a. Si hay más personas, ¿la producción aumenta o disminuye?

b. Si trabajan más días, ¿la producción aumenta o disminuye?

c. Cuando ambas magnitudes aumentan, ¿qué tipo de relación hay entre ellas?

2. Completa la tabla con los datos de la situación y las relaciones de proporcionalidad.

D. P. ⟹ A más personas

N.° de personas	N.° de días	N.° de mantas
4	5	40
		x

D. P. ⟹ A más días

3. Escribe una relación de proporcionalidad entre las cantidades para completar el siguiente esquema y determina el valor de x:

$$\frac{\square}{\square} \times \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{x}$$

4. Si seis personas trabajan ocho días, ¿cuántas mantas podrán tejer?

5. **Mediante el procedimiento anterior, resuelve las siguientes situaciones:**

   a. En otro taller, 5 personas producen 120 ponchos en 12 días. Si trabajan 7 personas, ¿cuántos ponchos podrán tejer en 10 días?

N.° de personas	N.° de días	N.° de ponchos
		x

   b. Por tiempos de carnavales, ahora se producen 240 pantalones de bayeta trabajando 8 h diarias durante 5 días. Debido a la gran demanda recibieron el pedido de confeccionar 360 pantalones, por ello, han decidido trabajar 2 h diarias extras. ¿En cuánto tiempo entregarán este pedido?

N.° de pantalones	N.° de horas	N.° de días
		x

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Si el número de personas se triplica y los días también, la producción se multiplicará por nueve.	Si disminuyes el número de personas a la mitad y duplicas los días, la producción se mantiene igual.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Resuelve situaciones con varias magnitudes usando la proporcionalidad compuesta e igualdad de razones; define las unidades y el resultado.
- Representa con tablas y flechas, e indica si cada magnitud es D.P. o I.P. respecto al resultado.
- Emplea procedimientos basados en la igualdad de razones para establecer la relación de proporcionalidad compuesta.
- Justifica el modelo comparando variaciones: si aumenta o disminuye.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En una granja con 12 kg de alfalfa, 9 conejos comen durante 6 días. ¿Cuántos días tardarán 12 conejos en comer 24 kg de alfalfa?**
2. **El mar peruano es uno de los territorios más ricos en variedad de peces, lo que permite una importante actividad pesquera y de conservación. En una fábrica dedicada a la producción de latas de conserva de pescado, se sabe que 3 máquinas iguales producen 1800 latas en 6 horas. ¿Cuántas latas de conserva producirán 5 máquinas si funcionan 8 horas?**
3. **Una empresa contratista asignó inicialmente a 24 obreros con la meta de construir un reservorio de agua en 45 días con 6 horas diarias de trabajo. Sin embargo, después de 5 días de trabajo, surgió la necesidad de acelerar la construcción. Por eso, la empresa decidió contratar a 6 obreros adicionales (ahora son 30 obreros) y aumentar la jornada laboral de 6 a 8 horas diarias. ¿En cuánto tiempo total se completó la obra si consideras estos cambios?**

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas contextualizados para el reconocimiento de longitudes y alturas, modela situaciones con triángulos rectángulos, selecciona la razón trigonométrica adecuada y aplica procedimientos matemáticos para validar la solución.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Propón retos personales de investigación matemática, gestiona tiempos y presenta evidencias claras de avances y dificultades.
- Elige problemas contextualizados en biodiversidad local, mostrando consideración por cada especie y aprende de conocimientos comunitarios.

Pensamos y actuamos



En el patio de tu colegio se realizará una ceremonia importante, y necesitan saber la altura exacta del asta de la bandera. No hay escaleras lo suficientemente altas ni herramientas sofisticadas para medir directamente la altura.

Propón una solución usando un transportador de ángulos y una cinta métrica, luego, ubícate a cierta distancia del asta y mide el ángulo hacia la punta de la bandera.

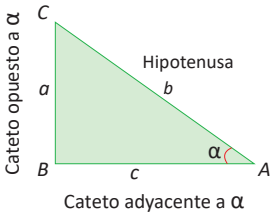
Se recogen los siguientes datos:

- La distancia desde tu posición hasta la base del asta: 8 metros.
- El ángulo de elevación medido: 37°.

¿Cómo podrías calcular la altura del asta usando el ángulo de elevación y la distancia al asta? ¿Es posible hacerlo sin medir directamente la altura?

1. Analiza y responde.

a. Los matemáticos descubrieron que, en un triángulo rectángulo, los lados están relacionados con los ángulos de una manera especial. A estas relaciones se les llama razones trigonométricas. Las principales son



Razón trigonométrica	Notación simbólica	Relación entre los lados
Seno de α	senα	$\frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$
Coseno de α	cosα	$\frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$
Tangente de α	tanα	$\frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto adyacente de } \alpha} = \frac{a}{c}$

b. Dibuja el triángulo rectángulo que representa la situación. Identifica y señala cada lado.

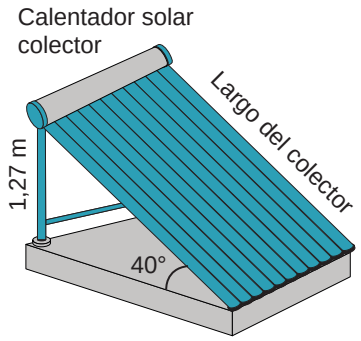
c. En esta situación usa la tangente, porque tienes el cateto adyacente y quieres conocer el opuesto.

$$\tan 37° = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}} \qquad \tan 37° = \frac{3}{4} = \frac{\text{altura del asta}}{8}$$

Resuelve esta ecuación para encontrar la altura.

d. ¿Qué sucede si el ángulo se incrementa a 60°? ¿Cómo varía la altura del asta?

2. **Determina el largo del colector sabiendo que tiene las siguientes dimensiones. Luego, resuelve utilizando la calculadora científica.**



3. **Se tiene un parque cuya forma es un triángulo rectángulo. El lado mayor, es decir, la hipotenusa, mide 123 metros. Además, se sabe que el coseno del mayor ángulo agudo del parque es $\frac{40}{41}$. ¿Cómo calcularías el perímetro del parque?**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Las razones trigonométricas dependen únicamente de los ángulos, no de las medidas específicas de un triángulo, siempre que sea semejante.	Las razones trigonométricas se pueden usar en cualquier triángulo, aunque no sea rectángulo.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Modela la situación problemática, identifica y representa el triángulo rectángulo que corresponde, y expresa correctamente los lados y el ángulo de referencia.
- Selecciona la razón trigonométrica que vincula la incógnita (cateto opuesto, adyacente o hipotenusa) con los datos conocidos (ángulo y longitud).
- Plantea procedimientos para obtener la razón trigonométrica basada en la longitud o distancia desconocida, de ser necesario utilizando herramientas tecnológicas (calculadora).
- Argumenta la elección de la razón trigonométrica y justifica la validez del resultado obtenido, e interpreta el contexto del problema.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En un colegio, se construye una escalera de emergencia. La escalera forma un triángulo rectángulo con el suelo. La distancia horizontal desde la base de la escalera hasta la pared es de 2,4 metros, y la escalera se apoya en un punto a 3 metros de altura. ¿Qué longitud tiene la escalera?**
2. **Un teleférico sube un cerro con una inclinación de 30° respecto al suelo. La distancia horizontal desde la base hasta el punto de llegada es de 200 metros. ¿Qué longitud recorre el teleférico?**
3. **Una rampa de acceso al segundo piso tiene un ángulo de inclinación de 12° y el lado horizontal mide 10 metros. ¿Cuál es la altura a la que llega la rampa?**

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas de probabilidad, e identifica y clasifica los sucesos como dependientes o independientes; calcula la probabilidad de sucesos compuestos y justifica la elección del modelo probabilístico.

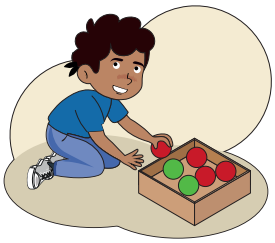
Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Muestra disposición para recibir retroalimentación y las aplica inmediatamente en nuevas tareas para mejorar en el aprendizaje.
- Refuerza la solidaridad y la responsabilidad al resolver problemas vinculados con el ambiente, comparte estrategias de solución y reflexiona sobre el uso adecuado de los recursos naturales.

Pensamos y actuamos



Pablo está jugando con una caja que contiene seis bolas del mismo tamaño, peso y textura, de las cuales cuatro son rojas y dos son verdes. Él saca una bola, anota el color y repite el proceso de dos formas distintas:

- **Juego 1:** Cada vez que Pablo saca una bola, la vuelve a meter en la caja antes de sacar otra.
- **Juego 2:** Pablo saca una bola y no la devuelve a la caja antes de sacar otra.

¿Cuál es la probabilidad de que él obtenga dos bolas rojas en el juego 1 y 2, respectivamente?

¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea verde y la segunda, roja en el juego 1 y 2, respectivamente?

1. **Analiza y responde.**

   a. ¿Cuál es el experimento que realiza Pablo?

   b. ¿Cuál es el espacio muestral?

   c. ¿Qué sucesos se forman en este experimento?

   d. ¿Qué tipos de sucesos se forman al extraer con devolución?, ¿y sin devolución?

2. **Organiza la información en las siguientes tablas:**

Juego 1 (con devolución)

Situación	Probabilidad del primer suceso	Probabilidad del segundo suceso	Probabilidad de ambos sucesos
Suceso 1: Sacar dos bolas rojas			
Suceso 2: Sacar una bola verde y luego una bola roja			

Juego 2 (sin devolución)

Situación	Probabilidad del primer suceso	Probabilidad del segundo suceso	Probabilidad de ambos sucesos
Suceso 1: Sacar dos bolas rojas			
Suceso 2: Sacar una bola verde y luego una bola roja			

3. **¿Cuál es la probabilidad de que obtenga dos bolas rojas en el juego 1?, ¿y en el juego 2?**
4. **¿Cuál es la probabilidad de que la primera sea verde y la segunda, roja en el juego 1?, ¿y en el juego 2?**
5. **Si Pablo aumenta tres bolas de cada color, ¿cuáles serían las nuevas probabilidades de cada suceso?**

¿Qué construimos?

Luego de haber analizado lo desarrollado en las actividades previas, dos estudiantes expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Si extraes una bola sin devolverla, el segundo evento depende del primero porque el número total de bolas cambia.	La probabilidad de extraer dos bolas rojas con devolución es mayor que la probabilidad de sacar una sola bola roja.

¿Con cuál o cuáles estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada uno que apoyen o rechacen las afirmaciones planteadas.

Evalúa tus progresos

- Modela el experimento aleatorio al espacio muestral y define los sucesos simples y compuestos para extracción con y sin devolución.
- Comunica la clasificación de los sucesos compuestos (dependientes o independientes) y cómo el reemplazo modifica las probabilidades.
- Usa la regla de multiplicación para calcular la probabilidad de ambos sucesos en cada caso.
- Argumenta la elección del procedimiento y compara la probabilidad de ambos sucesos en cada caso.

Profundizamos

Para resolver los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En una caja con seis bolas: tres rojas, dos verdes y una azul, ¿cuál es la probabilidad de que la primera bola sea roja y la segunda azul con devolución?, ¿y sin devolución?**
2. **En una caja hay diez camisetas: seis son talla M y cuatro son talla L. Si extraes dos camisetas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean de la talla M?**
3. **En un sobre hay cinco tarjetas numeradas del uno al cinco. Si extraes dos tarjetas sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la primera tarjeta sea par y la segunda, impar?**
4. **Si lanzas dos monedas al mismo tiempo, ¿cuál es la probabilidad de obtener dos caras? ¿Son sucesos dependientes o independientes? Explica.**
5. **En una bolsa hay cuatro bolas rojas, tres verdes y tres azules. Si un estudiante extrae una bola, la observa y la vuelve a meter en la bolsa antes de sacar otra:**
   a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener dos bolas del mismo color?
   b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener una bola azul y luego una verde?

Formalizamos



Examina los ejemplos y las relaciones entre las estrategias de solución, reflexiona y dialoga para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

¿Sabías que...?

Las magnitudes proporcionales permiten analizar relaciones constantes entre variables como agua-superficie o consumo-población, diseñar riegos eficientes, optimizar energía y justificar decisiones sostenibles en planificación, ciencia y ciudadanía responsable.

Recuerda

Magnitud directamente proporcional (D. P.)

Una magnitud *A* es directamente proporcional a *B* si, al aumentar o disminuir los valores de *A*, los valores correspondientes de *B* aumentan o disminuyen, respectivamente, en la misma proporción.

Tiempo (h)	1	2	3	...	8
Espacio (km)	50	100	150	...	400

Magnitud inversamente proporcional (I. P.)

Una magnitud *A* es inversamente proporcional a *B* si, al aumentar o disminuir los valores de *A*, los valores correspondientes de *B* disminuyen o aumentan, respectivamente, en la misma proporción.

N.° de trabajadores	1	2	4	...	8
Tiempo (h)	8	4	2	...	1

Practica valores

Acepta apoyo cuando lo requiere para alcanzar las metas.
Es solidario y responsable con el ambiente mediante el uso adecuado de los recursos.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Magnitudes proporcionales compuestas

Situación: Producción de mascarillas

Una máquina produce 200 mascarillas en 5 horas y funciona con 2 operarios. ¿Cuántas mascarillas se producirán en 8 horas si se emplean 3 operarios? ¿Cómo afecta el tiempo de trabajo y el número de operarios a la producción total de mascarillas?

Organizamos los datos en una tabla

N.° de horas	N.° de mascarillas	N.° de operarios
5	200	2
8	*x*	3

Observamos y calculamos.

Si 2 operarios hacen 200 mascarillas en 5 h, 1 operario produce $\frac{200}{2} = 100$ mascarillas en 5 h, entonces un operario produce $\frac{100}{5} = 20$ mascarillas en 1 h.

Luego, la producción de 3 operarios por hora es 3(20) = 60 mascarillas.

En 8 horas será 8(60) = 480 mascarillas.

Observa que, a más horas y más operarios, la producción aumenta en forma directamente proporcional.

La experiencia anterior permite reconocer que la **proporcionalidad compuesta** es la relación entre una magnitud *y* y tres o más magnitudes x_1; x_2, ... donde *y* varía directamente con algunas así como de forma inversa con otras.

Situación: Campaña solidaria



En una campaña de solidaridad, 4 voluntarios arman 6 paquetes de alimentos en 2 horas. Ahora se cuenta con 6 voluntarios para armar 18 paquetes. ¿Se trata de una proporcionalidad compuesta? ¿En cuántas horas podrían completar el trabajo?

Analizamos los datos.

Si con 4 voluntarios arman 6 paquetes en 2 h; para armar 18 paquetes (el triple), se necesitaría el triple de tiempo: 2 × 3 = 6 h.

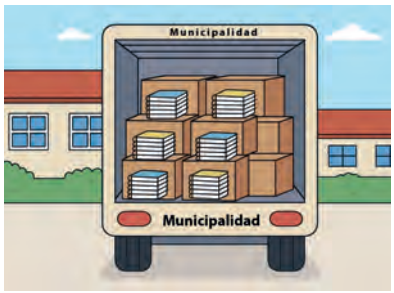
Si ahora hay 6 voluntarios en lugar de 4 (más personas trabajando), el tiempo disminuye. Como hay $\frac{6}{4} = \frac{3}{2}$ veces más personas, el tiempo se reduce a $\frac{2}{3}$ partes: $6 \times \frac{2}{3} = 4$ h.

Así llegamos a la conclusión de que, con 6 voluntarios, se puede armar 18 paquetes en 4 horas, y es una proporcionalidad compuesta porque las magnitudes "n.° de voluntarios" y "n.° de paquetes" están variando simultáneamente e influyen en una tercera magnitud que es el tiempo (horas).

Magnitudes proporcionales y regla de tres

Situación: Reparto de cuadernos

Una municipalidad distribuye cuadernos a varios colegios. Con 6 camiones durante 3 días reparte 7200 cuadernos. Ahora desea repartir 12 000 cuadernos en 2 días, pero no sabe cuántos camiones necesitará. Un estudiante dice: "Como hay menos días, solo se necesitan menos camiones".



¿Estás de acuerdo con el análisis del estudiante? Justifica.

Organizamos los datos en una tabla y establecemos las relaciones de proporcionalidad.

D. P. $\Longrightarrow$ "Para llevar más cuadernos se necesitan más camiones".

N.° de camiones	N.° de días	N.° de cuadernos
6	3	7200
x	2	12 000

I. P. $\Longrightarrow$ "Con menos días de viaje se necesitan más camiones".

Igualamos la razón que contiene la incógnita con el producto de las razones de las otras magnitudes de forma que si son D. P., no se invierte, y si son I. P., se invierte la razón

$$\frac{6}{x} = \frac{2}{3} \times \frac{7200}{12\,000}$$

Resolvemos.

$$x = \cancel{6}^{1} \times \frac{1}{\cancel{3}_{1}} \times \frac{\cancel{12\,000}^{6000}}{\cancel{7200}_{\cancel{2400}^{400}}} \Longrightarrow x = 15 \text{ camiones}$$

Por lo tanto, el estudiante cae en un razonamiento parcial: considera una sola magnitud (días) y olvida que el aumento de cuadernos requiere más camiones.

De lo observado en la situación inicial, la **regla de tres compuesta** es un procedimiento que permite resolver situaciones en las que dos o más magnitudes actúan simultáneamente sobre una incógnita y están relacionadas entre sí de forma directa o inversa respecto a la magnitud desconocida (la incógnita).

Para resolver problemas usando la regla de tres compuesta, sigue los siguientes pasos:

1. Identifica las **magnitudes** que intervienen en el problema (número de personas, número de días, cantidad) y la incógnita.
2. Organiza los **datos en una tabla** para visualizar mejor las relaciones entre las magnitudes.
3. Relaciona la incógnita con cada una de las demás magnitudes y determina si son directamente proporcionales o inversamente proporcionales.
4. Plantea la ecuación considerando que para magnitudes D. P. la razón se mantiene; y para I. P. la razón se invierte. Luego, resuelve para hallar el valor desconocido.

Ten en cuenta

- Son magnitudes directamente proporcionales: el costo y el número de artículos comprados.
- Son magnitudes inversamente proporcionales: la velocidad de un auto y el tiempo que demora en recorrer una distancia.

Evalúa tus progresos

- Representa una situación problemática (magnitudes, datos y la incógnita) organízala en una tabla de valores, e identifica mediante esquemas las relaciones de proporcionalidad (D.P. o I.P.) con la magnitud desconocida.
- Emplea procedimientos que implican la multiplicación de razones, y ajusta la posición de los términos de las magnitudes.
- Sustenta la elección de la relación de proporcionalidad (D.P. o I.P.) entre cada magnitud y la magnitud de resultado; justifica por qué las razones de las magnitudes inversas deben ser invertidas en el planteamiento de la modelo para la solución.

¿Sabías que...?

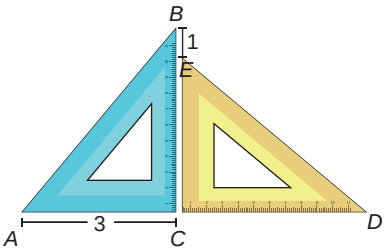
El estudio de figuras bidimensionales permite diseñar espacios urbanos sostenibles al calcular áreas y perímetros. Los profesionales planifican parques, veredas y jardines, y optimiza materiales y promoviendo decisiones inclusivas, seguras y ecológicas.

FORMAS BIDIMENSIONALES

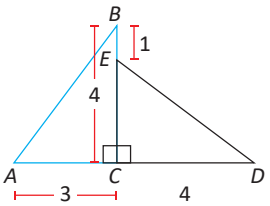
Triángulos congruentes

Situación: Las escuadras de la profesora

En la clase de Matemática, la profesora junta dos escuadras del mismo tamaño, como muestra el gráfico. ¿Cómo podríamos calcular la longitud de $\overline{AD}$?



- Graficamos las reglas.

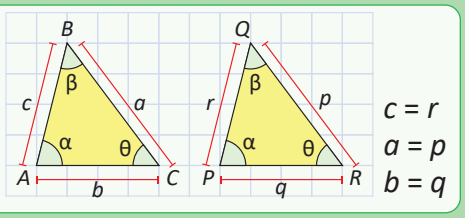


- Como las reglas tienen el mismo tamaño, son congruentes, entonces $\overline{EC} = \overline{AC} = 3$.
- Luego, vemos que $\overline{BC} = \overline{CD} = 4$.

  Por lo tanto, concluimos que $\overline{AD} = 3 + 4 = 7$.

El problema resuelto muestra que **dos triángulos son congruentes** cuando sus tres ángulos correspondientes tienen la misma medida y los lados opuestos esos ángulos son de igual longitud. En otras palabras, dos triángulos son congruentes cuando todos sus elementos, lados y ángulos son, respectivamente, iguales.

Gráficamente



$c = r$
$a = p$
$b = q$

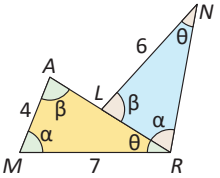
Respecto a los triángulos ABC y PQR, bajo las condiciones indicadas, se sabe lo siguiente:

$\Delta ABC \cong \Delta PQR$

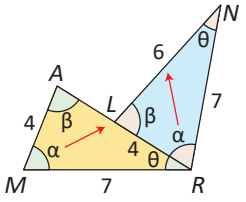
$\cong$: se lee "es congruente a".

Situación: Piezas de rompecabeza

Alessandro le presenta a su hermana dos piezas de la misma forma y del mismo tamaño con ciertas longitudes, como muestra el gráfico, y le pide calcular la longitud de $\overline{AL}$. Ella, rápidamente, responde: "Si las figuras son iguales, entonces $\overline{AM} = \overline{LR} = 4$, así tenemos que $\overline{AL} + 4 = 7$, es decir, $\overline{AL} = 3$". ¿Compartes la afirmación de la hermana? Justifica.



- Revisamos el gráfico.



- Como las piezas son congruentes y tenemos las medidas angulares internas, sabemos que a las medidas angulares iguales se oponen lados de igual longitud, entonces

  $\overline{AM} = \overline{LR} = 4$, $\overline{MR} = \overline{RN} = 7$. Así también $\overline{AR} = \overline{LN} = 6$

  $\Longrightarrow \overline{AL} + 4 = 6 \Longrightarrow \overline{AL} = 2$

  Por lo tanto, se concluye que la hermana analizó incorrectamente el problema, porque cometió el error de comparar solo áreas sin considerar la congruencia de los triángulos.

Practica valores

- Decide el nivel de desafío de sus actividades, regulan tu esfuerzo y mantén la perseverancia hasta alcanzar resultados verificables y coherentes con los objetivos planteados.
- Elige problemas contextualizados en la biodiversidad local, muestra respeto y consideración por cada especie, al mismo tiempo integra los conocimientos y saberes de su comunidad.

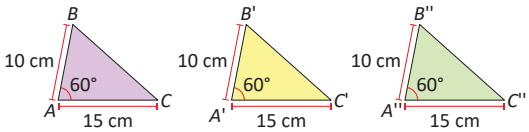
Criterios de congruencia

Situación: Banderines para el aula

Para adornar el aula con banderines se utiliza un molde con dos tiras de 10 cm y 15 cm, unidas en un ángulo fijo de 60°. Con este procedimiento se recortan muchas piezas para formar una tira decorativa.

¿Podrían resultar triángulos diferentes si siempre se emplean las mismas longitudes y el mismo ángulo?

- Analizamos las formas de los banderines.



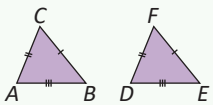
Por lo tanto, al colocar uno encima de otro, estos coincidirán de manera exacta. La longitud del lado opuesto a 60° es la misma en todos los banderines y el resto de los ángulos tiene la misma medida en todos.

De acuerdo con lo analizado, para comprobar la congruencia de dos triángulos, basta con identificar tres elementos correspondientes, incluido al menos un lado, según los criterios LLL, LAL o ALA.

Al encontrar dos triángulos congruentes, se puede afirmar que a ángulos iguales se oponen lados de igual longitud, y viceversa.

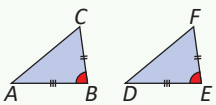
Criterio LLL

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\overline{BC} \cong \overline{EF}$ y $\overline{AC} \cong \overline{DF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



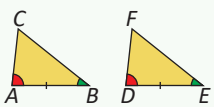
Criterio LAL

Si $\overline{AB} \cong \overline{DE}$, $\hat{B} \cong \hat{E}$ y $\overline{BC} \cong \overline{EF}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



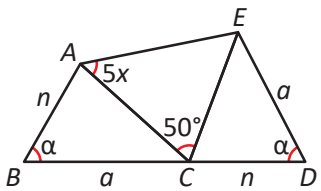
Criterio ALA

Si $\hat{A} \cong \hat{D}$, $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ y $\hat{B} \cong \hat{E}$, entonces $\triangle ABC \cong \triangle DEF$



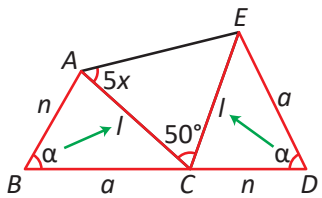
Situación: Trabajo en equipo

Rita y José observan el gráfico, y afirman que los triángulos *ABC* y *ECD* son congruentes por el criterio LLA, y que el triángulo *ACE* es isósceles, donde $\overline{AC} = \overline{CE}$, entonces $5x = 50°$; y concluye que x es igual a 10°. ¿Es correcta la solución de Rita y José? Justifica.



No existe un criterio de congruencia LLA, se debe respetar el orden de presentación de los lados y ángulos.

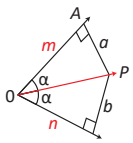
- Además, el cálculo de x es erróneo según el gráfico.



- Observamos que $\Delta ABC \cong \Delta CDE$ por el criterio LAL.
  $\Longrightarrow \overline{AC} = \overline{CE} = l$.
- Tenemos que ΔACE es isósceles
  $\Longrightarrow m\angle CAE = m\angle CEA = 5x$
  Además
  $5x + 5x + 50° = 180°$
  $\therefore x = 13°$

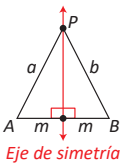
Ten en cuenta

Teorema de la bisectriz
Todos los puntos de la bisectriz de un ángulo equidistan de sus dos lados.



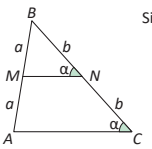
Si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz, se cumple
$a = b$
$m = n$

Teorema de la mediatriz
Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.



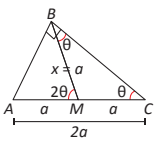
Si $\overrightarrow{OP}$ es bisectriz, se cumple
$a = b$
→ $\triangle APB$: Isósceles

Teorema de la base media
La longitud de la base media es la mitad y paralela al lado relativo.



Si $\overline{MN}$ es base media, se cumple
$\overline{MN} = \frac{\overline{AC}}{2}$
además
$\overline{MN} \parallel \overline{AC}$

Teorema de la mediana relativa a la hipotenusa
La longitud de la mediana relativa a la hipotenusa es igual a la mitad de la longitud de la hipotenusa.



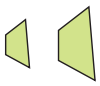
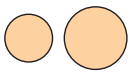
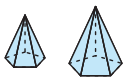
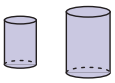
Si $\overline{MN}$ es base media se cumple
$\overline{BM} = \frac{\overline{AC}}{2}$
$(x = a)$

Reto matemático

En un triángulo se conocen los siguientes datos:
$\overline{AB} = \overline{DE} = 8$ cm,
$\overline{BC} = \overline{EF} = 5$ cm, $\angle B = \angle E = 50°$.
¿Qué criterio de congruencia garantiza que $\triangle ABC \cong \triangle DEF$?

Ten en cuenta

Se muetra una tabla con las figuras semejantes

Figura	Propiedades
	Dos trapecios tienen los lados proporcionales y los ángulos iguales.
	Dos círculos son siempre semejantes si sus radios lo son.
	Dos pirámides tienen las aristas proporcionales, las caras semejantes y los ángulos iguales.
	Dos esferas son siempre semejantes si sus radios lo son.
	Dos cilindros tienen los radios de las bases y las alturas proporcionales.

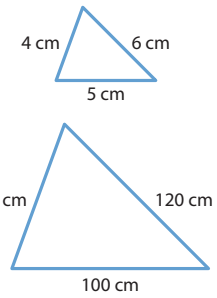
Triángulos semejantes

Situación: Un logo triangular

Se diseñó un logo con forma triangular para elaborar un cartel grande, y se proyectó en una pared para ampliar su tamaño.

Luego de medir el triángulo original, se obtuvieron los siguientes lados: 4 cm, 5 cm y 6 cm. En el logo proyectado, los lados miden 80 cm, 100 cm y 120 cm.

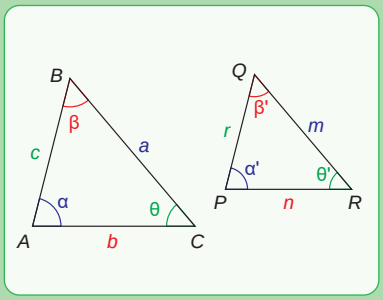
¿Los triángulos tienen la misma forma? ¿Cómo puedes comprobar que mantienen su forma aunque uno sea más grande?



Ambos logos mantienen la forma triangular, pues sus lados son proporcionales. Cada medida se multiplicó por 20, lo que garantiza la semejanza de los logos triangulares.

La experiencia anterior permite reconocer que dos triángulos son semejantes si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados opuestos son proporcionales.

Gráficamente tenemos



Si $\alpha = \alpha'; \beta = \beta'; \theta = \theta'$

y $\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{r} = k$

k es la constante de semejanza, entonces

$\Delta ABC \sim \Delta PQR$

$k > 0$

Si k es igual a 1, los triángulos además son congruentes.

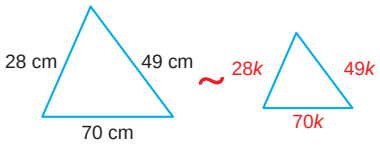
~: se lee "es semejante".

Los lados opuestos a ángulos iguales se llaman lados homólogos y en triángulos semejantes guardan la misma razón k.

Situación: Perímetro singular

Las longitudes de un triángulo son 28 cm, 49 cm y 70 cm. Otro triángulo semejante tiene perímetro 21 cm. ¿Cuánto mide su lado menor?

Un estudiante dice: "No se puede resolver porque la razón de semejanza siempre es mayor que 1". ¿Estás de acuerdo? Justifica.



Como los triángulos son semejantes, sus lados son proporcionales, así los lados del segundo triángulo son $28k$, $49k$ y $70k$. Calculamos el perímetro

$28k + 49k + 70k = 21 \Longrightarrow 147k = 21$

$\Longrightarrow k = \frac{1}{7}$. Luego el lado menor es $28\left(\frac{1}{7}\right) = 4$ cm.

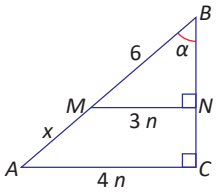
Si $k < 1$, el triángulo semejante resulta más pequeño.

TIC

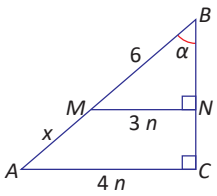
Criterios de semejanza

Situación: El tablero triangular

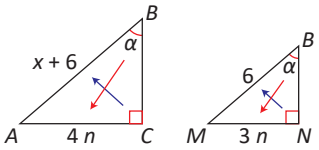
María tiene un tablero triangular como se muestra en el gráfico, y quiere realizar el corte $\overline{MN}$. Si queremos calcular la longitud x, ¿cómo podríamos hacerlo?



- Analizamos el gráfico.
- En B, ambos triángulos ABC y MBN comparten el ángulo α.



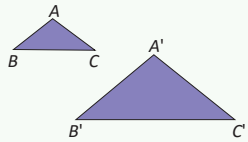
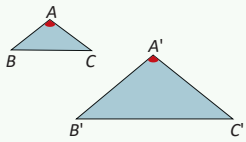
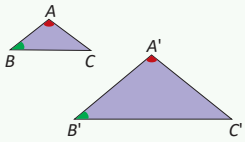
- Separamos los triángulos, luego, observamos que son semejantes por el criterio AA.



- Como los lados son homólogos proporcionales, se tiene lo siguiente: $\frac{4n}{3n} = \frac{x+6}{6}$

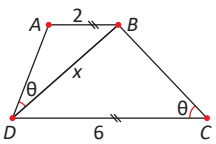
  Luego de resolver la ecuación, $x = 2$.

La resolución de la situación anterior evidencia que dos **triángulos** son **semejantes** cuando se cumple uno de estos criterios

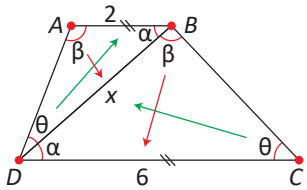
Criterio LLL Lado-Lado-Lado	Criterio LAL Lado-Ángulo-Lado	Criterio AA Ángulo-Ángulo
		
$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$	$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ y $\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$	$\widehat{A} \equiv \widehat{A'}$ y $\widehat{B} \equiv \widehat{B'}$
Tienen sus tres lados correspondientes proporcionales con la misma razón k.	Tienen dos lados proporcionales, y el ángulo comprendido entre ellos es congruente.	Tienen dos ángulos congruentes.

Situación: Reto en el aula

El profesor presenta un reto a sus estudiantes. Él les pide calcular la longitud x, y les da como dato que $\overline{AB} // \overline{CD}$. Para ello, forma grupos de dos estudiantes. El equipo de Wilmer y Valvín, emocionados, gritan: "¡La respuesta es $2\sqrt{3}$!". ¿Compartes la respuesta de este grupo? Justifica mediante un procedimiento.



- Analizamos el gráfico.



- Observamos que $\Delta DAB \sim \Delta DBC$.

  $\Longrightarrow m\angle DAB = m\angle DBC = \beta$
- Y como $\overline{AB} // \overline{CD} \Longrightarrow m\angle ABD = m\angle BDC = \alpha$
- Con esto tenemos que $\frac{x}{6} = \frac{2}{x} \Longrightarrow x^2 = 12$.

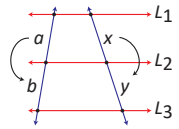
  $x^2 = 4 \times 3 \Longrightarrow x = 2\sqrt{3}$

Así se concluye que el grupo está en lo correcto.

Ten en cuenta

A continuación se muestra un ejemplo del teorema de Thales de Mileto

Si $\overleftrightarrow{L_1} // \overleftrightarrow{L_2} // \overleftrightarrow{L_3}$

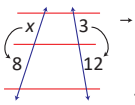


Se cumple $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$

Además $\frac{a+b}{b} = \frac{x+y}{y}$

Ejemplo

Calcule x



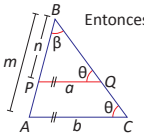
$\rightarrow \frac{x}{8} = \frac{3}{12}$

$x = \frac{24}{12}$

$\therefore x = 2$

En el siguiente ejemplo se cumple el teorema de semejanza

En el gráfico $\triangle ABC \sim \triangle PQL$



Entonces se cumple $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$

Evalúa tus progresos

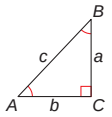
- Resuelve problemas aplicando semejanza para hallar longitudes, y verifica razones entre lados homólogos.
- Demuestra semejanza o congruencia seleccionando datos pertinentes y aplicando criterios adecuados (Por ejemplo: AAA, LAL).
- Sustenta con ejemplos las relaciones de la mediana en hipotenusa y base media.

¿Sabías que...?

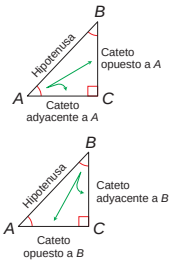
Las razones trigonométricas permiten calcular alturas, pendientes y distancias en proyectos urbanos. Con seno, coseno y tangente, los estudiantes diseñan rampas seguras, estiman ángulos solares y optimizan energía, materiales y espacios, sustentando decisiones sostenibles basadas en ciencia, ingeniería y compromiso ciudadano responsable con el entorno ambiental.

Recuerda

- Se tiene lo siguiente:



- Los vértices se denotan con letras mayúsculas y la medida de los lados con las letras del vértice opuesto, pero con minúsculas.
- El cateto es opuesto o adyacente según al ángulo al que se hace referencia.



Practica valores

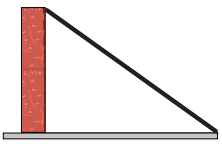
- Plantea retos de investigación matemática y gestiona tu tiempo con autonomía.
- Analiza datos sobre residuos y modifica hábitos para cuidar la vida.

MEDIDAS DE FORMAS BIDIMENSIONALES

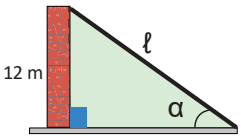
Razones trigonométricas en triángulos rectángulos

Situación: Apoyado en la pared

Una barra metálica descansa sobre una pared lisa, como se muestra en la imagen. Si el seno del ángulo que forma la barra con el suelo es $\frac{3}{5}$ y la altura que alcanza en la pared es de 12 m, ¿cómo determinarías la longitud de la barra?



Recordamos la definición del senα, luego, indentificamos en el gráfico los datos del problema



$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{3}{5}$$

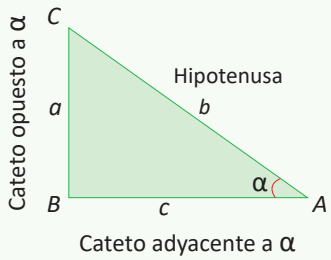
Usamos la longitud de la pared y la longitud L de la barra para establecer una proporción.

$$\frac{3}{5} = \frac{12}{L} \Longrightarrow L = \frac{5 \times 12}{3} = 20$$

Por lo tanto, la longitud de la barra es de 20 m.

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo de un triángulo rectángulo son los cocientes entre las longitudes de sus lados tomados respecto a ese ángulo. De allí se obtienen seis razones: tres principales y sus recíprocas.

En el gráfico, consideramos la medida angular α para indicar sus razones trigonométricas



CO: cateto opuesto para α
CA: cateto adyacente para α
H: hipotenusa

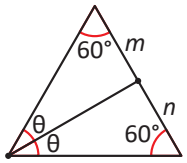
	Razón trigonométrica	Notación simbólica	Relación entre los lados
Razones principales	Seno de α	senα	$\frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{b}$
	Coseno de α	cosα	$\frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{b}$
	Tangente de α	tanα	$\frac{\text{cateto opuesto de } \alpha}{\text{cateto adyacente de } \alpha} = \frac{a}{c}$
Razones recíprocas	Cotangente de α	cotα	$\frac{\text{cateto adyacente de } \alpha}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{c}{a}$
	Secante de α	secα	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente de } \alpha} = \frac{b}{c}$
	Cosecante de α	cscα	$\frac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto de } \alpha} = \frac{b}{a}$

Triángulos rectángulos notables

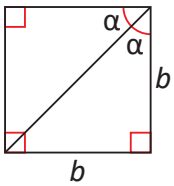
Situación: Geometría en un doblez

En clase de Matemática se pide una hoja de forma cuadrada y otra en forma de triángulo equilátero.

Al doblar la hoja de forma cuadrada por una de sus diagonales y al unir dos vértices del triángulo equilátero, ¿qué triángulos se forman y qué ocurre con sus medidas?



- Realizamos los dobleces



- En el cuadrado, luego de realizar el doblez, encontramos medidas angulares iguales, entonces

$\alpha + \alpha = 90°$
$\Longrightarrow \alpha = 45°$

Así tenemos un triángulo rectángulo isósceles de 45°.

- En el triángulo equilátero también tenemos

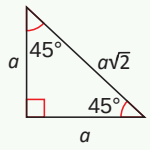
$\theta + \theta = 60°$
$\Longrightarrow \theta = 30°$

- También se observa que $m = n$.

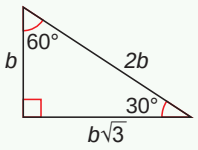
Así tenemos triángulos rectángulos de 30° y 60°.

La resolución de la situación anterior evidencia que los principales **triángulos rectángulos notables** son los siguientes:

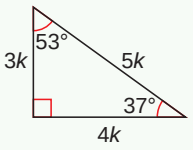
Notable de 45° y 45°



Notable de 30° y 60°

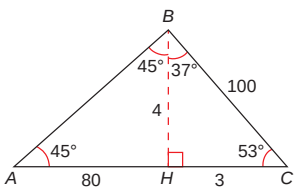


Notable de 37° y 53°



Situación: Tablero de maqueta

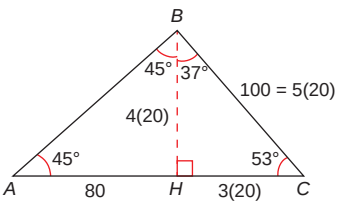
El tablero de una maqueta tiene forma triangular, como se muestra en el gráfico, además, $\overline{BC} = 100$ cm, y se le hará el corte en $\overline{BH}$. El profesor pide a sus alumnos calcular la longitud del lado más grande.



Andrés observa y menciona: "Como el ΔBHC es notable de ángulos 53° y 37°, y $\overline{BC} = 100 = 5k \Longrightarrow k = 20$. Asimismo, $\overline{BH} = 3k = 3(20) = 60$, y $\overline{BH} = \overline{AH} = 60$. Así concluimos que $\overline{AC} = 60 + 60 = 120$".

¿Estás de acuerdo con el razonamiento de Andrés? Justifica.

- Analizamos el gráfico, para ello, identificamos sus longitudes



- El ΔBHC es notable de 53° y 37°.

$\overline{BC} = 100 = 5k \Longrightarrow k = 20$

- A partir de ello, tenemos

$\overline{BH} = 4k = 4(20) = 80$
También $\overline{HC} = 3(20) = 60$.

- El ΔBHA es notable de 45°, luego $\overline{BH} = \overline{HC} = 80$.

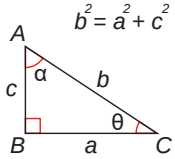
$80 + 60 = 140$

Andrés se equivocó al identificar el lado opuesto que se opone a 53°, por lo tanto, no estamos de acuerdo con él.

Ten en cuenta

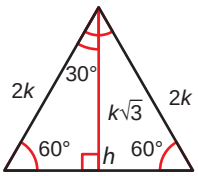
Según el teorema de Pitágoras, en todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

$b^2 = a^2 + c^2$



Ten en cuenta

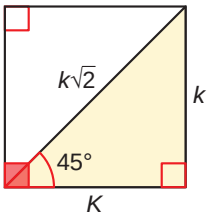
El triángulo notable de 30° y 60° se obtiene, a partir de un triángulo equilátero, trazando la altura desde uno de sus vértices al lado opuesto.



La altura h se obtiene con el teorema de Pitágoras

$h^2 = (2k)^2 - k^2 \Longrightarrow h = (\sqrt{3})k$

El triángulo notable de 45° y 45° se obtiene trazando una de las diagonales del cuadrado.



La hipotenusa se obtiene con el teorema de Pitágoras.

$H^2 = k^2 + k^2$

Ten en cuenta

Propiedad de complementarios

Si $\alpha + \beta = 90°$, entonces

$\text{sen}\alpha = \cos\beta$

$\tan\alpha = \cot\beta$

$\sec\alpha = \csc\beta$

Ejemplo:

$\text{sen}x = \cos y = \frac{5}{13}$

Propiedad de recíprocos

Si $\alpha = \beta$, entonces

$\text{sen}\alpha \cdot \csc\beta = 1$

$\tan\alpha \cdot \cot\beta = 1$

$\sec\alpha \cdot \cos\beta = 1$

Ejemplo:

$\cos x \cdot \sec x = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{12} = 1$

Evalúa tus progresos

- Resuelve situaciones problemáticas que involucran longitudes desconocidas basadas en triángulos rectángulos mediante la razón trigonométrica según el ángulo agudo.
- Expresa triángulos notables, y sus relaciones de lados y razones.
- Simplifica y resuelve expresiones aplicando propiedades de razones trigonométricas usando ángulos notables.
- Argumenta que las razones trigonométricas de un ángulo permanecen siempre constantes, sea el tamaño del triángulo, por semejanza geométrica.

Razones trigonométricas en triángulos rectángulos notables

Situación: Misma medida angular, misma razón

Se muestra a los estudiantes tres triángulos rectángulos notables de 37° y 53° de diferente longitud de catetos. ¿Qué observas en la tangente del ángulo de 37°?

Figura 1

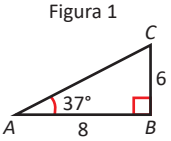


Figura 2

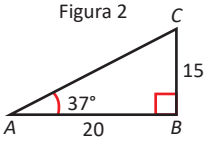
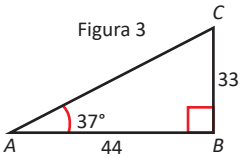


Figura 3



Veamos la tangente 37°.

- Para la figura 1: $\tan 37° = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$
- Para la figura 2: $\tan 37° = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$
- Para la figura 3: $\tan 37° = \frac{33}{44} = \frac{3}{4}$

La tangente de 37° es la misma en los tres triángulos rectángulos. Por lo tanto, las razones trigonométricas dependen solo del ángulo, no del tamaño del triángulo.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que las razones trigonométricas de un ángulo agudo en un triángulo rectángulo notable son cocientes que se establecen entre las longitudes de sus lados respecto a ese ángulo.

Ángulo	sen	cos	tan	cot	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}=2\frac{\sqrt{3}}{3}$	2
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
37°	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
53°	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

Situación: Nuevo reto

El profesor presenta el siguiente reto a sus estudiantes: si $\tan\alpha = \frac{\sec 45° + \cos 45°}{\tan 60°}$, donde α es un ángulo agudo, calcula $M = \sec\alpha$. Como los estudiantes no pudieron resolverlo, les dio la respuesta: $\frac{\sqrt{6}}{2}$. ¿Cuál sería el procedimiento para encontrar la respuesta?

- De la condición: $\tan\alpha = \frac{\sec 45° + \cos 45°}{\tan^2 60°}$

  $\sec 45° = \sqrt{2}$; $\cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

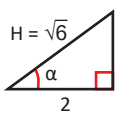
  $\tan 60° = \sqrt{3} \implies \tan^2 60° = 3$

- Reemplazamos en la condición

$$\tan\alpha = \frac{(\sqrt{2}) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{(\sqrt{3})^2} = \frac{\frac{2\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}}{3}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{3(\sqrt{2})}{2}}{\frac{3}{1}} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{CO}{CA}$$

- Como α es la medida de un ángulo agudo, la llevamos a un triángulo rectángulo.
- Calculamos la hipotenusa.



$(H)^2 = (\sqrt{2})^2 + (2)^2$

$(H)^2 = 6$

$\implies H = \sqrt{6}$

- Con ello podemos calcular lo que piden

$M = \sec\alpha = \frac{H}{CA} \implies M = \frac{\sqrt{6}}{2}$

Por lo tanto, debemos conocer las razones de las medidas de los triángulos notables.

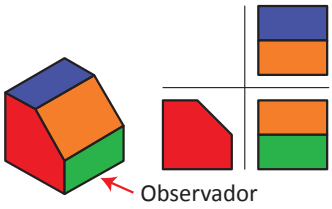
FORMAS TRIDIMENSIONALES

Proyección ortogonal

Situación: Miradas diversas

La profesora muestra cómo se ve un objeto al proyectarlo con rayos perpendiculares sobre tres planos mutuamente perpendiculares.

Ricardo responde: "Las proyecciones se denominan vistas ortogonales.

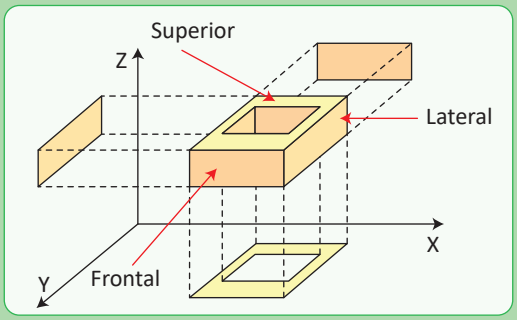


Estamos de acuerdo con Ricardo, ya que este tipo de proyecciones se denominan vistas ortogonales.

De lo observado en la situación inicial, **la proyección ortogonal** representa un objeto tridimensional mediante sus vistas en planos perpendiculares.

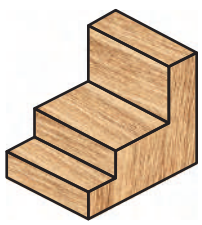
Las líneas de proyección son perpendiculares al plano, lo que permite obtener vistas ortogonales, las cuales forman el triedro ortogonal.

- Frontal (XZ)
- Superior (XY)
- Lateral (YZ)



Situación: ¿Son iguales las vistas?

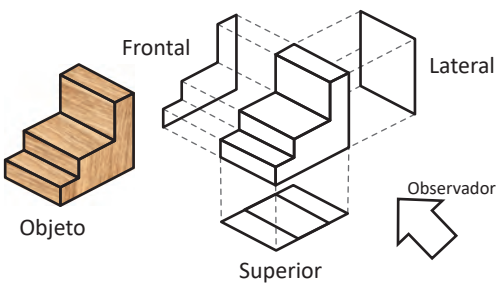
Se observa un bloque de madera en forma de gradas apoyado en el piso con sus caras principales paralelas a dos paredes. La profesora pide evaluar su proyección sobre el piso y las paredes.



Cristian afirma: “Las tres proyecciones son iguales porque es el mismo objeto”. ¿Compartes la afirmación de Cristian? Justifica tu respuesta.

Revisemos bien las proyecciones para verificar la afirmación.

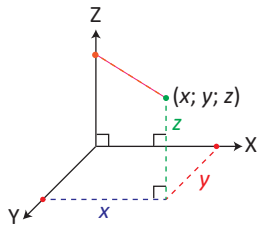
Las vistas ortogonales son distintas; solo juntas describen el objeto.



Por lo tanto, la afirmación de Cristian es incorrecta.

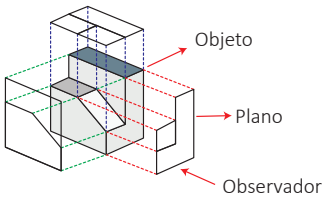
Recuerda

Se presenta un plano en tres dimensiones: X, Y y Z



Ten en cuenta

Los planos de proyección en el sistema ANSI (Instituto Nacional Estadounidense de Estándares) están entre el observador y el objeto. Este método de proyección es empleado en los países de Norteamérica.



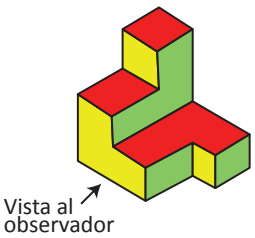
Practica valores

- Dialoga sobre la incertidumbre en datos ambientales y comunica errores con claridad.
- Mantiene la perseverancia y ajusta su esfuerzo hasta lograr resultados verificables.

Vistas ortogonales

Situación: Vistas de un sólido

Se muestra un sólido compuesto por cubos, y se pide a cada estudiante dibujar sus vistas ortogonales. ¿Cómo se vería la figura desde diferentes posiciones: una desde arriba, otra desde el frente y otra desde un costado?



Los estudiantes dibujaron las vistas ortogonales de la siguiente manera:

Vista superior



Vista frontal



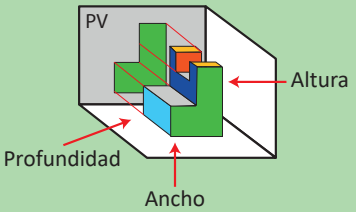
Vista lateral



La experiencia anterior permite reconocer que cada vista se describe así

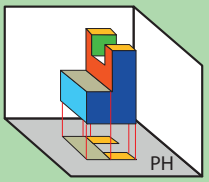
1. **Vista frontal (o plano vertical)**
   - **a.** Muestra la altura y el ancho.
   - **b.** No se representa la profundidad.
   - **c.** Es la vista más usada para la fachada o cara principal.

Ejemplo: al mirar una casa desde la calle, observas su vista frontal.

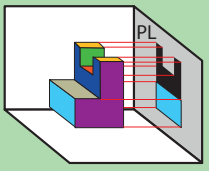


2. **Vista superior (o plano horizontal)**
   - **a.** Muestra el ancho y la profundidad.
   - **b.** No se observa la altura.
   - **c.** Se utiliza para distribuir espacios (planta) en arquitectura.

Ejemplo: un aula vista desde arriba corresponde a su planta.



3. **Vista lateral (o plano de perfil)**
   - **a.** Muestra la altura y la profundidad.
   - **b.** No se observa el ancho.
   - **c.** Es útil para representar el fondo de un objeto o su grosor.



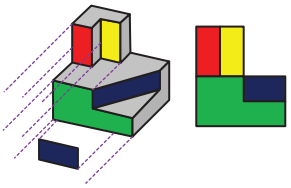
Ejemplo: si vizualizas un auto estacionado desde un costado, estás viendo su plano de perfil.

Situación: El dibujo de un sólido

El profesor presenta un sólido para identificar la vista frontal. Tras observarlo y graficarlo, Cristina comenta: "Este sería el gráfico correspondiente a esa posición".



¿Compartes la conclusión de la estudiante Cristina? Justifica.



Nos damos cuenta de que, luego de mirar de manera frontal, se estaría viendo lo que está en colores.

Por lo tanto, lo que muestra Cristina es la vista superior, entonces su gráfico es incorrecto.

Evalúa tus progresos

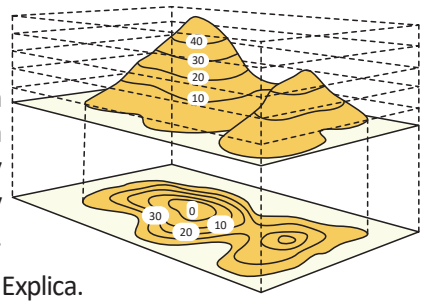
- Resuelve situaciones problemáticas identificando y dibujando las tres vistas ortogonales principales (frontal, superior y lateral) de un sólido tridimensional a partir de su representación isométrica o del objeto físico.
- Expresa las proyecciones ortogonales especificando qué dimensiones (altura, ancho, profundidad) se muestran en cada una de las tres vistas y cómo se relacionan entre sí.
- Emplea procedimientos para alinear y proyectar correctamente las vistas mediante líneas de proyección, aplica las normas del dibujo para representar líneas visibles (continuas) e invisibles (discontinuas).
- Argumenta la correspondencia entre las vistas y el objeto tridimensional, justifica con ejemplos y contraejemplos si un conjunto de vistas es correcto o incorrecto para un sólido dado.

ESCALA

Mapas: curvas de nivel

Situación: Caminata a un mirador

Un grupo de estudiantes realiza una caminata al mirador del Colibrí. La profesora les entrega un mapa topográfico con líneas cerradas y concéntricas que indican diferentes altitudes, y les pide seguir la ruta hasta el punto más alto.

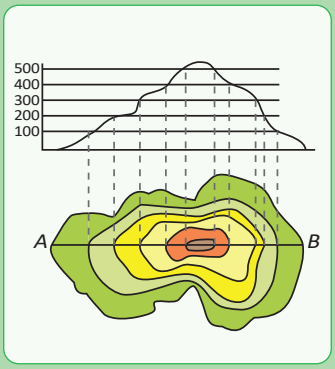


¿Para qué sirven esas líneas curvas del mapa? Explica.

Cada línea une puntos de igual altura y se llama curva de nivel. Cuando están muy juntas, indican mayor pendiente; cuando están separadas, un terreno más plano. Estas líneas permiten reconocer la altura y el relieve del terreno.

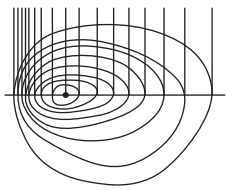
De acuerdo con lo analizado, las **curvas de nivel** son líneas que unen puntos de igual altitud para representar el relieve en un plano. En un mismo mapa están separadas por una equidistancia fija: cuanto más próximas aparecen, mayor es la pendiente del terreno.

La **cota (altitud)** es la distancia vertical entre un punto u objeto y el nivel medio del mar (referencia). Su valor se indica en las curvas de nivel y permite trazar el perfil topográfico entre dos puntos.

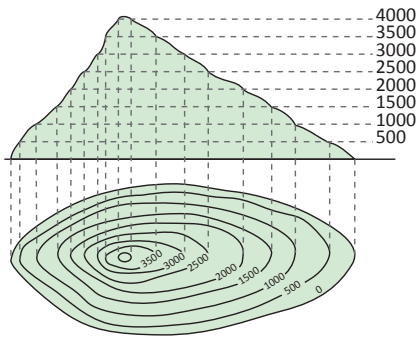


Situación: Un plano con curvas de nivel

Un grupo de estudiantes planea construir un parque en un terreno rural usando un plano con curvas de nivel. Ellos eligen una zona donde las curvas están muy juntas porque piensan que el terreno se ve más parejo. ¿Compartes la afirmación del grupo? Justifica con conceptos topográficos.



Veamos el gráfico.



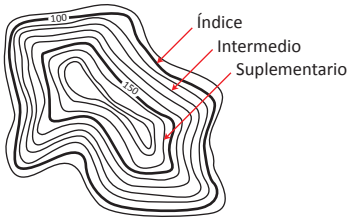
Con equidistancia fija (500), la separación entre curvas indica pendiente, la cercanía entre curvas muestra que la altitud cambia rápidamente, entonces el terreno es inclinado (empinado), poco adecuado para un parque.

Se debe preferir zonas donde las curvas están más separadas, lo que indica que hay menos pendiente.

Por lo tanto, no compartimos la afirmación.

¿Sabías que...?

Las curvas de nivel se clasifican en tres tipos: las índice o maestras, gruesas y numeradas cada cinco intervalos; las intermedias, más delgadas y sin cifras; y las suplementarias, discontinuas, que muestran detalles adicionales del relieve.



Evalúa tus progresos

- Localiza puntos y rutas en mapas topográficos, determina su cota y establece la equidistancia entre curvas de nivel para orientar rutas seguras y eficientes.
- Explica que la separación entre curvas de nivel es inversamente proporcional a la pendiente: menor distancia, mayor inclinación; mayor distancia, terreno más suave y estabilidad.
- Traza e interpreta perfiles topográficos entre dos puntos; usando cotas y curvas para visualizar el relieve, reconocer valles, laderas y cumbres.
- Argumenta sobre relieve, con ejemplos y contraejemplo, si una zona conviene para actividades (construcción, agricultura, senderismo) según pendiente, riesgos y accesibilidad.

¿Sabías que...?

La probabilidad permite anticipar riesgos y tomar decisiones sostenibles. Los estudiantes analizan escenarios como lluvias o cortes eléctricos, estiman posibilidades y proponen medidas preventivas que favorecen comunidades seguras, resilientes y ambientalmente responsables.

Recuerda

El **espacio muestral** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Puede darse por comprensión o por extensión.

El **suceso**, también denominado evento, es cualquier subconjunto del espacio muestral. Puede tener uno (evento simple) o más elementos (evento compuesto).

Según la ley de Laplace, si todos los resultados de un experimento aleatorio son equiprobables, se verifica la probabilidad de un suceso así

$$P(A) = \frac{\text{Número de casos favorables}}{\text{Número de casos posibles}}$$

Ejemplo:

Se escriben al azar las cifras 1; 2 y 3. Determine la probabilidad de que estén ordenados (creciente o decreciente).

Entonces

Todos los resultados posibles (6)

123; 132; 213; 231; 312; 321

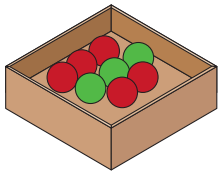
Resultados favorables (2)

$$P = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

EVENTOS PROBABILÍSTICOS

Probabilidad de sucesos independientes

Situación: ¿Afecta devolver la bolita?



En un sorteo, cada estudiante extrae una bolita de una caja con cinco rojas y tres verdes, y la devuelve después de cada turno. ¿Qué tan probable es que dos estudiantes saquen una bolita roja?

Luego de devolver la bolita, el contenido de la caja permanece igual para cada intento. Así el resultado de una extracción no afecta al otro.

La probabilidad de que el primer y el segundo estudiante saquen una bolita roja es $P(R) = \frac{5}{8'}$, ya que lo que extrajo el primero no cambia nada para el segundo.

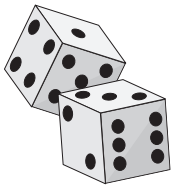
Para que ocurran ambos sucesos, que primero salga una bolita roja y luego otra roja, después se multiplican las probabilidades de cada caso.

$$P(R_1 \text{ y } R_2) = \frac{5}{8} \times \frac{5}{8} \Longrightarrow P(R_1 \text{ y } R_2) = \frac{25}{64}$$

La resolución de la situación anterior evidencia que dos **sucesos son independientes** cuando el resultado del primero no afecta en la probabilidad del segundo.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

Situación: El juego de los dados



En un taller de juegos matemáticos, un equipo de dos estudiantes lanza un dado justo cada uno. El objetivo del juego es que ambos obtengan números pares para ganar un punto extra. Lucía afirma: "Como hay tres pares en cada dado 2; 4 y 6, si en el primer lanzamiento sale un número par, entonces en el segundo será menos probable, y la probabilidad de ambos sucesos sería $\frac{1}{2}$".

¿Estás de acuerdo con la afirmación de Lucía? Justifica tu respuesta.

Obtener un número par en el primer lanzamiento no afecta el resultado en el segundo, por lo tanto, ambas probabilidades son iguales.

Cada dado tiene seis caras, de las cuales tres son números pares.

Establecemos la relación sabiendo que actúan de manera independiente

$P(A)$: sale número par en el primer suceso, entonces $P(A) = \frac{3}{6}$

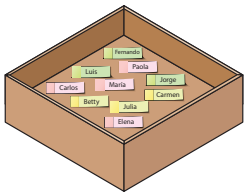
$P(B)$: sale número par en el segundo suceso, entonces $P(B) = \frac{3}{6}$

Determinamos la probabilidad: $P(A \cap B) = \frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$

La probabilidad de obtener números pares en ambos es $\frac{1}{4}$, por lo tanto, no es correcto lo que afirma Lucía.

Probabilidad de sucesos dependientes

Situación: Elección probable sin reposición



La profesora quiere elegir a dos estudiantes al azar para una actividad grupal, para ello, extrae de una urna los nombres de ellos que escribió en tiras de papel (seis mujeres y cuatro varones) sin reposición. ¿La probabilidad de que el segundo elegido sea mujer depende de quién fue elegido primero? Justifica.

Cuando se extrae el primer nombre, sale mujer o varón; como no se repone, la segunda elección depende de la primera.

Caso 1: primero sale una mujer, quedan cinco mujeres y cuatro varones; entonces $P(M_2) = \frac{5}{9}$

Caso 2: primero sale un varón, quedan seis mujeres y tres; entonces $P(M_2) = \frac{6}{9}$

Como la probabilidad del segundo suceso cambia según el primero, los sucesos son dependientes.

El problema resuelto ilustra la **probabilidad de sucesos** dependientes. Entonces dos sucesos son dependientes cuando el resultado del primero modifica la probabilidad del segundo. La probabilidad de que ocurra ambos (primero *A* y luego *B*) se calcula multiplicando la probabilidad del primer suceso por la del segundo suceso, dado que ocurrió el primero.

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A)$$

Probabilidad del primer suceso — Probabilidad del segundo suceso

Situación: Baraja de corazones



Ezio y Rubén están jugando con una baraja de corazones que consta de trece cartas. Ellos proponen extraer dos cartas en forma sucesiva y sin reposición, luego se preguntan: ¿Cuál es la probabilidad de que ambas sean números pares?

Rubén menciona: "Como hay seis cartas pares (2; 4; 6; 8; 10; *Q*), la probabilidad de que salgan dos cartas pares es simplemente multiplicar $\left(\frac{6}{13}\right) \times \left(\frac{6}{13}\right)$, porque las cartas siguen siendo pares". ¿Estás de acuerdo con la afirmación de Rubén? Justifica.

Al no reponer la carta extraída en el primer suceso, la probabilidad del segundo suceso queda afectada, ya que la baraja se ha reducido a doce cartas.

Calculamos la probabilidad de cada suceso

$P(A)$: sale número par en la primera extracción, entonces $P(A) = \frac{6}{13}$

$P(B/A)$: sale número par en la segunda extracción cuando salió número par en la primera extracción. Luego $P(B/A) = \frac{5}{12}$ (sin reposición).

Determinamos la probabilidad del experimento aleatorio

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B/A) \implies P(A \cap B) = \frac{6}{13} \times \frac{5}{12} = \frac{5}{26}$$

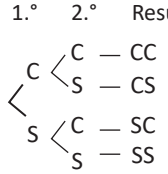
La probabilidad correcta de obtener dos cartas pares es $\frac{5}{26}$.

No estamos de acuerdo con Rubén porque omite que las extracciones se hacen sin reposición y, por lo tanto, la segunda extracción está condicionada a lo que ocurrió en la primera.

Ten en cuenta

A continuación se muestra un ejemplo de lanzamiento de dos monedas mediante el diagrama del árbol.

Cuando lanzas una moneda, puede salir cara o sello. Supón que en el primer lanzamiento salió cara, entonces en el segundo puede salir cara o sello; es decir, por cada resultado del primero hay dos posibles resultados del segundo. El espacio muestral (Ω) de este experimento se puede representar gráficamente de la siguiente manera:



Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas de probabilidad con sucesos independientes y dependientes, distinguiendo extracciones con o sin reposición.
- Justifica con ejemplos la diferencia entre sucesos independientes y dependientes, y explica que el primer resultado no altera el espacio muestral; en sucesos dependientes sí.
- Emplea procedimientos referido a la probabilidad condicional, ajusta espacio muestral y casos favorables tras el primer suceso.

Actividad lúdica



¡Evalúa tu juego! Revisa las reglas del juego y tus estrategias, ajusta tus decisiones y expresa con sentido matemático tus descubrimientos.

Propósito de aprendizaje

Modela un juego de mesa con coordenadas cartesianas, simetrías y rotaciones para ubicar piezas. Comunica jugadas y consecuencias basadas en transformaciones geométricas. Aplica estrategias de anticipación y simetría para elegir posiciones que maximicen espacio y optimicen decisiones. Argumenta la efectividad de las jugadas, justifica la ventaja obtenida mediante conceptos geométricos.

Practica valores

- Propón retos personales de investigación matemática, gestiona tiempos y presenta evidencias claras de avances y dificultades.
- Refuerza la solidaridad y la responsabilidad al resolver problemas vinculados con el ambiente, comparte estrategias de solución y reflexiona sobre el uso adecuado de los recursos naturales.

Triángulos notables en misión secreta

1. Situación

Una sociedad matemática secreta ha dejado un mensaje oculto. Para descifrarlo, los estudiantes deben dominar los triángulos notables (30°, 60°, 90° y 45°, 45°, 90°). Cada equipo tendrá la misión de resolver desafíos matemáticos vinculados con los triángulos notables.



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Conforma equipos de cuatro estudiantes con roles asignados.
   - Explorador trigonométrico: realiza los cálculos y completa las tablas.
   - Guardia de los triángulos: verifica las proporciones de los lados en cada triángulo notable.
   - Codificador de razones: ubica los valores de seno, coseno y tangente de los triángulos en la tabla de razones.
   - Cronista del enigma: justifica cada resultado y registra los aprendizajes.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: Triángulos incompletos

a. Cada equipo recibe tarjetas con triángulos notables en los que faltan lados. Entonces deberán completar los lados usando las proporciones estándar

Triángulo 30°, 60° y 90°	Triángulo 45°, 45° y 90°
90; $90\sqrt{3}$	25; 25

b. A continuación presentamos ejemplos de valores para la tarjeta.

N.°	*a*	*b*	*c*
1	40	30	
2	10	$10\sqrt{2}$	
3	15		30
4	8	$8\sqrt{3}$	
5		9	$9\sqrt{2}$
6	12		24
7	20	20	
8		$16\sqrt{3}$	32
9	25	25	$25\sqrt{2}$
10		$18\sqrt{3}$	36

Desafío 2: La tabla secreta

c. Completa una tabla de seno, coseno y tangente para 30°, 45° y 60°, para ello, justifica cada valor a partir de los triángulos notables.

Ángulo	Seno	Coseno	Tangente
30°			
45°			
60°			
53°			
37°			

Desafío 3: Error trigonométrico

d. Se presenta esta afirmación: "En el triángulo 45°, 45°, 90°, el seno de 45° es $\frac{\sqrt{3}}{2}$".

El equipo debe analizar, refutar y explicar el error utilizando la tabla de razones.

Desafío 4: Razonamiento aplicado

e. Se plantean problemas con contexto real.

Ejemplo: un dron vuela formando un triángulo rectángulo con el suelo. El ángulo de elevación es de 30° y el dron está a 20 metros de altura. ¿A qué distancia horizontal está el dron?

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Cómo identificaron los patrones en los triángulos notables?

b. ¿Por qué es importante conocer los valores exactos sin calculadora?

c. ¿En qué situaciones reales usarían estos triángulos?

Evalúa tus progresos

- Relaciona posición y movimiento en el tablero, presenta las jugadas mediante coordenadas y aplica simetrías o rotaciones de las piezas.
- Expresa, con lenguaje geométrico (coordenadas, rotación, simetría, área), el estado del tablero e interpreta la distribución de casillas ocupadas para planificar el siguiente movimiento.
- Emplea conteo de casillas, área y perímetro para identificar posiciones ventajosas y optimizar el espacio disponible en el tablero.
- Justifica que una jugada es óptima con base en la simetría, el área ocupada o el bloqueo de movimientos, evalúa el impacto de las decisiones en el resultado final del juego.

Referencias bibliográficas

- Andina. (s. f.). https://andina.pe
- Climas y viajes. Guía de climas en el mundo. (s. f.). Clima – Puerto Maldonado Perú. https://www.climasyviajes.com/clima/peru
- Cocinas Mejoradas. (2011, 8 de febrero). Cocinas de talla mundial. [Fotografía]. http://www.cocinasmejoradas.com/2011/02/cocinas-de-talla-mundial.htm
- Daniells, S. (2021, 31 de agosto). *Scientists Discover Probiotic Candidate from Peruvian Fermented Beverages. NutraIngredients-LATAM*. https://www.nutraingredients-latam.com/Article/2021/08/31/Scientists-discover-probiotic-candidate-from-Peruvian-fermented-beverages
- El Peruano. (s. f.). https://elperuano.pe
- Estrada Paredes, J. J. (2012). *Guía para la construcción de invernaderos o fitotoldos. FAO*. [Imagen]. https://openknowledge.fao.org/server/api/core/bitstreams/fe211822-fad2-42fe-86d2-bff8e736e498/conten
- Facebook. (s. f.). www. facebook.com
- FatsecretMéxico. (s. f.). *Base de datos de alimento y contador de cabrías.* https://www.fatsecret.com.mx/calor%C3%ADas-nutrici%C3%B3n/gen%C3%A9rico/pescado
- Freepik. (s. f.) https://www.freepik.es
- Gob.pe. (21, 28 de junio). *Iniciamos campaña de desarenado en la ciudad de Chachapoyas.* [Imagen]. https://www.gob.pe/institucion/munichachapoyas/noticias/503007-iniciamos-campana-de-desarenado-en-la-ciudad-de-chachapoyas
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2021, marzo). C*ostos de producción para la actividad: agricultura, ganadería, caza y silvicultura en base a la Encuesta Nacional Agraria (ENA 2018)*. https://www.slideshare.net/slideshow/costos-de-produccion-para-la-actividad-agricultura-ganaderia-caza-y-silvicultura-en-base-a-la-encuesta-nacional-agraria-ena-2018/273303051#2
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2024a). Acceso a los servicios básicos en el Perú. https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/6755317/5857246-acceso-a-los-servicios-basicos-en-el-peru-2023.pdf?v=1723216091
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2024b). *Estadísticas Vitales: Nacimientos, Defunciones, Matrimonios y Divorcios, 2023. Registros administrativos.* https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/7328714/6256673-estadisticas-vitales-nacimientos-defunciones-matrimonios-y-divorcios-2023%282%29.pdf?v=1739543870
- Mantilla Hernández, J., Nelson Cárdenas, D. y Jácome Bohórquez, J. M. (2009). *Estimación de la Talla a Partir de la Medida de la Tibia en Población Colombiana. International Journal of Morphology.* [Imagen]. https://www.scielo.cl/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0717-95022009000200004
- Melo, Y. (2025, 5 de enero). *Peligro de sobreproducción de papa blanca en Perú: Midagri insta a frenar nuevas siembras.* [Fotografía]. En Infobae. https://www.infobae.com/peru/2025/01/06/peligro-de-sobreproduccion-de-papa-blanca-en-peru-midagri-insta-a-frenar-nuevas-siembras/
- MEJORES RUTAS. (s. f.). *Distancia entre ciudades de Lima por carretera.* https://peru.mejoresrutas.com/tabla-de-distancias/pe-lima/

- Ministerio de Agricultura y Riego. (2015). *Quinua Peruana Situación Actual y Perspectivas en el Mercado Nacional e Internacional al 2015.* https://repositorio.midagri.gob.pe/handle/20.500.13036/76
- Ministerio de Desarrollo Agrario y Riego. (s. f.). *Boletín estadístico mensual.* El agro en cifras. https://www.gob.pe/institucion/midagri/colecciones/388-boletin-estadistico-mensual-el-agro-en-cifras
- Ministerio de Educación del Perú. *Preguntas PISA de ciclos anteriores (PISA 2000 – pisa 2023 – 2012). Matemática.* [Imagen]. http://umc.minedu.gob.pe/wp-content/uploads/2012/05/Matem%c3%a1tica-preguntas-PISA-liberadas-2000-2003-2012.pdf
- Ministerio de Salud. (2022). Endes: en el Perú, el 62.7 % de personas de 15 años a más padece de exceso de peso. [Fotografía]. En tvNoticias. https://tvperu.gob.pe/noticias/nacionales/endes-en-el-peru-el-627-de-personas-de-15-anos-a-mas-padece-de-exceso-de-peso
- National Aeronautics and Space Administration. (2012, 1 de octubre). *Trayectoria de movimiento propio de Próxima Centauri.* https://science.nasa.gov/asset/hubble/proper-motion-path-of-proxima-centauri
- Newton Almeida (2014, agosto, 10). *Curvas de Nível : Isoípsas : Representação do Relevo Terrestre A representação do relevo terrestre através das curvas de nível. En Geografía Newton Almeida.* [Imagen]. https://geografianewtonalmeida.blogspot.com/2014/08/curvas-de-nivel-isoipsas-representacao.html?view=magazine
- Pexels (s. f.). https://www.pexels.com
- Programme for International Student Assessment. (2006, diciembre). *PISA Released Items Mathematics.* https://www.acer.org/files/pisa_relitems_maths_2.pdf?
- Redacción Gestión. (2024, 20 de noviembre). *Efitec, empresa peruana de TI, alista su expansión a Colombia y México.* [Fotografía]. https://gestion.pe/economia/empresas/efitec-empresa-peruana-de-ti-alista-su-expansion-a-colombia-y-mexico-tecnologia-financiero-seguros-noticia/
- RPPNoticias. (2021, 27 de julio). *Heladas en el Perú: ¿Por qué ocurren y cuánto daño le hacen a la sierra sur y centro?* https://rpp.pe/peru/actualidad/heladas-en-el-peru-por-que-ocurren-y-cuanto-dano-le-hacen-a-la-sierra-sur-y-centro-puno-noticia-1349054
- Sencico. (2023, diciembre). *Informe de actividades del laboratorio de evaluación de cocinas mejoradas. Gerencia de Investigación y Normalización.* En Gob.pe. https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/5634723/936611-informe-de-actividades-del-laboratorio-cocinas-mejoradas-2023.pdf?v=1752101097
- Shutterstock. (s. f.). https://www.shutterstock.com
- Superintendencia de Transporte Terrestre de Personas, Carga y Mercancías (Sutran). (s. f.). *Pesos y medidas vehiculares permitidos.* [Imagen] En Gob.pe. https://www.gob.pe/institucion/sutran/campa%C3%B1as/63235-pesos-y-medidas-vehiculares-permitidos
- Tamayo, J., Salvador, J., Vásquez, A. y Vilches, C. (Eds.) (2016). *La industria de la electricidad en el Perú: 25 años de aportes al crecimiento económico del país. Osinergmin*. https://issuu.com/osinergmin/docs/09_-_la_industria_de_la_electricidad_en_el_per__2
- Unicef Perú. (2023). *Resumen Ejecutivo: Análisis del panorama del sobrepeso y la obesidad infantil y adolescente en Perú.* [Imagen]. https://www.unicef.org/lac/media/42516/file/Resumen-Ejecutivo-Obesidad-en-Perú.pdf
- Yanocha, Dana et al. (2018). *Guía de planeación del sistema de bicicletas compartidas. ITDP.* [Fotografía]. https://itdp.org/wp-content/uploads/2021/05/BSPG_espanol20.01.pdf

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I
La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1
Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.
La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.

Artículo 2
El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.

Artículo 3
Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.

Artículo 4
Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.
La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.

Artículo 5
El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.

Artículo 6
La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia.
Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II
La democracia y los derechos humanos

Artículo 7
La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.

Artículo 8
Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.
Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.

Artículo 9
La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.

Artículo 10
La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III
Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11
La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.

Artículo 12
La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.

Artículo 13
La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.

Artículo 14
Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.

Artículo 15
El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.

Artículo 16
La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV
Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17
Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.

Artículo 18
Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.

Artículo 19
Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.

Artículo 20
En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.
El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.
Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.
Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.

Artículo 21
Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.
El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.
Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.

Artículo 22
Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V
La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23
Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.
Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.

Artículo 24
Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.
Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.
Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.

Artículo 25
Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.
La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI
Promoción de la cultura democrática

Artículo 26
La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.

Artículo 27
Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.

Artículo 28
Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos solo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

Sistema del Banco del Libro de Educación Secundaria

REGIÓN:	UGEL:

IE:

CÓDIGO MODULAR	CÓDIGO DEL GRADO	CÓDIGO DEL ÁREA CURRICULAR	N° DE EJEMPLAR

RESPONSABLE DEL BANCO DEL LIBRO:

APELLIDOS Y NOMBRES DEL ESTUDIANTE	FECHA DEL PRÉSTAMO	FECHA DE DEVOLUCIÓN



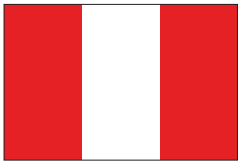
Recuerda que este libro también lo usará otro compañero el próximo año.

¡Vamos a cuidarlo entre todos!



SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL



ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres: seámoslo siempre;
Y antes niegue sus luces el sol,
Que faltemos al voto solemne
Que la Patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

DECLARACIÓN UNIVERSAL DE LOS DERECHOS HUMANOS

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunida ...).
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

DISTRIBUIDO GRATUITAMENTE POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN - PROHIBIDA SU VENTA