SECUNDARIA

TEXTO DE MATEMÁTICA 4







MINISTERIO DE EDUCACIÓN

El ciudadano que queremos



Perfil de egreso de la Educación Básica

El estudiante se reconoce como persona valiosa y se identifica con su cultura en diferentes contextos.

El estudiante propicia la vida en democracia a partir del reconocimiento de sus derechos y responsabilidades y de la comprensión de los procesos históricos y sociales de nuestro país y del mundo.

El estudiante practica una vida activa y saludable para su bienestar, cuida su cuerpo e interactúa respetuosamente en la práctica de distintas actividades físicas, cotidianas o deportivas.

El estudiante aprecia manifestaciones artístico-culturales para comprender el aporte del arte a la cultura y a la sociedad, y crea proyectos artísticos utilizando los diversos lenguajes del arte para comunicar sus ideas a otros.

El estudiante se comunica en su lengua materna, en castellano como segunda lengua(*) y en inglés como lengua extranjera de manera asertiva y responsable para interactuar con otras personas en diversos contextos y con distintos propósitos.

El estudiante indaga y comprende el mundo natural y artificial utilizando conocimientos científicos en diálogo con saberes locales para mejorar la calidad de vida y cuidando la naturaleza.

El estudiante interpreta la realidad y toma decisiones a partir de conocimientos matemáticos que aporten a su contexto.

El estudiante gestiona proyectos de emprendimiento económico o social de manera ética, que le permiten articularse con el mundo del trabajo y con el desarrollo social, económico y ambiental del entorno.

El estudiante aprovecha responsablemente las tecnologías de la información y de la comunicación (TIC) para interactuar con la información, gestionar su comunicación y aprendizaje.

El estudiante desarrolla procesos autónomos de aprendizaje en forma permanente para la mejora continua de su proceso de aprendizaje y de sus resultados.

El estudiante comprende y aprecia la dimensión espiritual y religiosa en la vida de las personas y de las sociedades.

(*) Este aprendizaje es para aquellos estudiantes que tienen como lengua materna una de las 48 lenguas originarias o lengua de señas, y que aprenden el castellano como segunda lengua.

Currículo Nacional

TEXTO DE MATEMÁTICA 4







MINISTERIO DE EDUCACIÓN

TEXTO DE MATEMÁTICA 4

El presente material educativo para estudiantes de cuarto grado ha sido elaborado por la Dirección de Educación Secundaria para promover el desarrollo de las competencias en el área de Matemática, propuestas en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Edición:
© Ministerio de Educación
Calle Del Comercio N.° 193
San Borja
Lima 15021, Perú
Teléfono: 615-5800
www.minedu.gob.pe

Propuesta pedagógica y edición
Pedro David Collanqui Díaz

Especialista en edición
Oscar Emiliano Palomino Flores

Diseño gráfico
Ana Matilde Morales Vásquez
Carlos Héctor Boza Loayza

Elaboración de contenido
José Luis Maurtua Aguilar

Revisión pedagógica
Pedro David Collanqui Díaz

Corrección de estilo
Guillermo Rafael Urrutia Valdizán
Marilú Sujey Alberto Mamani

Diagramación
Carlos Héctor Boza Loayza

Ilustración
Fiorella Alegría Córdova
Elisa del Rocio Espinoza Cerdan

Primera edición: octubre de 2025
Tiraje: 482 417 ejemplares

Impresión
Se terminó de imprimir en noviembre del 2025, en los talleres gráficos de Quad/Graphics Perú S.R.L., sito en Av. Los Frutales 344, Urb. Los Artesanos, Ate, Lima - Perú.
RUC: 20371828851

Todos los derechos reservados. Prohibida la reproducción de este material por cualquier medio, total o parcialmente, sin permiso expreso del Ministerio de Educación.

Debido a la naturaleza dinámica de internet, las direcciones y los contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este material educativo pueden tener modificaciones o desaparecer.

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú
N.° 2025-07557

PEFC
PEFC/01-31-222
El logotipo PEFC en nuestros productos garantiza que nuestros productos proceden de bosques gestionados de forma sostenible, reciclados y fuentes controladas. Cada compra de un producto con la etiqueta PEFC marca la diferencia para los bosques y las comunidades forestales del planeta.
www.pefc.es

Presentación

Querido estudiante:

Aprender matemática es mucho más que resolver operaciones, es una experiencia formativa que fortalece valores, orienta propósitos y guía procesos de evaluación para favorecer el crecimiento personal, la participación activa y el compromiso con la sociedad.

Este texto de Matemática ha sido diseñado con un enfoque práctico y cercano a la vida real, porque busca despertar el interés y ayudarte a interpretar la realidad, tomar decisiones fundamentadas y, con ello, desarrollar los conocimientos matemáticos con el fin de darles sentido y uso en tu propio contexto; además, el texto brinda oportunidades para que te desenvuelvas en otros escenarios y te integres plenamente en una sociedad que cada día está más vinculada a las ciencias.

En este camino, los valores como la responsabilidad, la solidaridad y el respeto orientan la convivencia escolar y el trabajo colaborativo. Los propósitos marcan el rumbo de los aprendizajes que queremos que alcances, vinculados a tu desarrollo integral y al de cada uno de tus compañeros; y la evaluación, entendida como una oportunidad de reflexión y mejora, permite reconocer avances, superar dificultades y asumir un rol protagónico en el aprendizaje.

El presente texto está organizado por unidades, las cuales ofrecen experiencias variadas para el desarrollo de las competencias matemáticas mediante:

- Problemas reales y significativos, que muestran la utilidad de las matemáticas en diferentes contextos.
- Proyectos colaborativos, que estimulan la investigación, la gestión del aprendizaje, la creatividad y el trabajo en equipo, así como la integración de las competencias.
- Recursos prácticos, que favorecen la comprensión de conceptos y el desarrollo de ideas matemáticas en un sentido experimental, inductivo y relacional.
- La integración con herramientas digitales y pensamiento computacional, que enriquecen el aprendizaje y amplían sus posibilidades de aplicación.

De este modo, cada reto abre la puerta a pensar distinto, analizar información de diversas fuentes y encontrar soluciones creativas apoyadas en argumentos sólidos que te preparan para enfrentar los desafíos del presente y del futuro.

Estamos convencidos de que, al avanzar con este texto, apreciarás su valor y reconocerás su importancia en tu formación personal y ciudadana, siempre con base en los valores que fortalecen tu vida escolar y comunitaria.

Dirección de Educación Secundaria

Índice

UNIDAD 1

Evaluamos cómo el riego impacta en la producción y mejoramos con alternativas responsables

Resuelve problema de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia ycambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Investigamos pp. 12-17
- Sostenibilidad hídrica en la producción agropecuaria
- Evaluación de la eficiencia de un sistema de riego agrícola

Exploramos pp. 18-23

Desarrollamos pp. 24-29
- Modela producciones con progresiones geométricas, calcula términos y sumas, y justifica proyecciones de crecimiento.
- Interpreta el discriminante y raíces en ecuaciones cuadráticas, y analiza soluciones según su intersección con el eje X.
- Modela relieves con curvas de nivel, calcula alturas y pendientes, y justifica la ruta más viable.

Formalizamos pp. 30-43
- Número racional
- Operaciones con números racionales y notación científica
- Progresión geométrica (P. G.)
- Ecuaciones cuadráticas
- Escala
- Localización y movimiento en el plano y el espacio

Actividad lúdica pp.44-45

UNIDAD 2

Diseñamos soluciones para recolectar agua de lluvia y aprovecharla en zonas rurales

Resuelve problema de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia ycambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Investigamos pp. 48-53
- Diseño de un sistema de recolección de agua de lluvia
- Estrategias para la cosecha de agua en zonas rurales

Exploramos pp. 54-59

Desarrollamos pp. 60-65
- Modela ganancias con funciones cuadráticas, representa la parábola y analiza el vértice como ingreso máximo.
- Resuelve problemas que involucran prismas y pirámides truncadas a partir de sus dimensiones y desarrollos planos, y determina el área y volumen.
- Resuelve problemas que involucran cilindro, cono y esfera a partir de sus medidas y determina el área lateral, área total y el volumen.

Formalizamos pp. 66-77
- Magnitudes derivadas
- Función cuadrática
- Formas tridimensionales
- Medidas de formas tridimensionales

Actividad lúdica pp.78-79

UNIDAD 3

Diseñamos viviendas seguras y sostenibles para nuestras comunidades

Resuelve problema de cantidad
Resuelve problemas de regularidad, equivalencia ycambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Investigamos pp. 82-87
- Promoviendo una construcción segura y planificada
- Diseño de una vivienda sostenible

Exploramos pp. 88-93

Desarrollamos pp. 94-99
- Modela funciones cuadráticas, determina máximos o mínimos e interpreta vértice y coeficiente principal.
- Modela crecimientos o decrecimientos exponenciales, calcula valores en el tiempo e interpreta asíntota y límites del modelo.
- Aplica razones trigonométricas para determinar alturas y distancias, analiza ángulos y justifica proporcionalidades en contextos reales.

Formalizamos pp. 100-113
- Operaciones con números racionales
- Función cuadrática
- Función exponencial
- Medidas de formas bidimensionales

Actividad lúdica pp.114-115

UNIDAD 4

Diseñamos sistemas productivos que impulsan el bienestar y el equilibrio ambiental

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Investigamos pp. 118-123
- Diseñando un sistema acuícola sostenible
- Gestión eficiente de un restaurante

Exploramos pp. 124-129

Desarrollamos pp. 130-133
- Resuelve sistemas de inecuaciones lineales, interpreta región factible y vértices, determina gráficamente la solución óptima y justifica decisiones basadas en su validez.
- Modela y representa diseños aplicando transformaciones geométricas (traslación, rotación y homotecia), describe sus propiedades isométricas y justifica la conservación de forma, tamaño y orientación en el plano.

Formalizamos pp. 134-149
- Sistema de inecuaciones y región factible
- Transformaciones geométricas isométricas
- Transformaciones geométricas
- Organización y presentación de datos
- Medidas estadísticas

Actividad lúdica pp.150-151

UNIDAD 5

Diseñamos soluciones creativas y reforestamos para cuidar nuestro planeta

Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Investigamos pp. 154-159
- Diseño de un empaque creativo
- Planificación de un proyecto de reforestación

Exploramos pp. 160-165

Desarrollamos pp. 166-171
- Relaciona, calcula y argumenta áreas y perímetros de polígonos irregulares descomponiéndolos en figuras conocidas.
- Organiza, interpreta y justifica conclusiones sobre dispersión y concentración de datos usando cuantiles, ojivas y diagramas de caja.
- Relaciona variables mediante diagramas de dispersión, analiza correlaciones y argumenta predicciones con base en la recta de regresión.

Formalizamos pp. 172-187
- Sistemas de ecuaciones lineales
- Formas bidimensionales
- Medidas de formas bidimensionales
- Medidas de formas tridimensionales
- Medidas estadísticas

Actividad lúdica pp.188-189

UNIDAD 6

Proponemos soluciones para impulsar el turismo y emprender con sostenibilidad

Resuelve problema de cantidad
Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre

Investigamos pp. 192-197
- Propuesta creativa para un proyecto de turismo sostenible
- Desarrollando emprendimientos sostenibles

Exploramos pp. 198-203

Desarrollamos pp. 204-209
- Relaciona y justifica decisiones financieras al analizar la tasa de variación y variación porcentual en situaciones de precios.
- Relaciona y justifica decisiones financieras al analizar sistemas de amortización con capital y cuotas constantes en situaciones de deudas.
- Resuelve y representa eventos aleatorios mediante probabilidades compuestas, analizando independencia o dependencia para decisiones informadas.

Formalizamos pp. 210-219
- Variación porcentual, interés, amortización y términos financieros
- Formas tridimensionales
- Localización y movimiento en el plano y el espacio
- Eventos probabilísticos

Actividad lúdica pp.220-221

Índice temático

Número racional

- Expresión decimal 30
- Fracción generatriz..... 31

Operaciones con números racionales y notación científica

- Adición y sustracción con números racionales 33
- Multiplicación y división con números racionales 34
- Potenciación con números racionales..... 35
- Notación científica 36

Operaciones con números racionales

- Intervalos con números racionales y su representación 100
- Operaciones con intervalos: unión e intersección..... 101
- Operaciones con intervalos: diferencia, diferencia simétrica y complemento..... 103

Magnitudes derivadas

- Velocidad y aceleración..... 66

Variación porcentual, interés, amortización y términos financieros

- Tasa de variación y variación porcentual, términos financieros 210
- Interés simple y compuesto 211
- Sistemas de amortización con cuota constante 212

Progresión geométrica (P. G.)

- Suma de términos de una P. G. (S_n)..... 37

Ecuaciones cuadráticas

- Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$..... 38
- Resolución con el método de factorización y completando cuadrados 39

Sistemas de ecuaciones lineales

- Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas..... 172
- Métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción y gráfico..... 173

Sistema de inecuaciones y región factible

- Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas..... 134
- Tipos de soluciones en sistemas de inecuaciones 135
- Método de resolución y su representación gráfica..... 136
- Método de optimización: la región factible 137

Función cuadrática

- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición..... 68
- Representación e identificación del dominio y rango de una función cuadrática..... 69
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición, tipos de problemas 105
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: formas de representación 106
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: transformaciones gráficas 107

Función exponencial

- Función exponencial $f(x) = a^x$: representación tabular y gráfica, y propiedades..... 109

Escala

- Escala de reducción y ampliación 40
- Mapas: curvas de nivel y distancias 41

Formas bidimensionales

- Triángulos y cuadriláteros 175
- Triángulos: Líneas y puntos notables 176
- Circunferencia: propiedades 178
- Cuadriláteros inscritos y circunscritos en una circunferencia..... 179

Medidas de formas bidimensionales

- Razones trigonométricas de ángulos agudos y notables..... 111
- Identidades trigonométricas 112
- Ángulos de elevación y de depresión..... 113
- Polígonos irregulares: área y perímetro .. 181
- Sólidos compuestos: área y volumen..... 182

Formas tridimensionales

- Pirámides de base regular: propiedades.. 70
- Tronco de prisma recto y pirámide: propiedades 71
- Cono de revolución: propiedades 73
- Esfera: propiedades..... 74
- Tronco de cono: propiedades..... 75
- Construcción de figuras a partir de proyecciones ortogonales 213

Medidas de formas tridimensionales

- Prismas de base regular: área lateral, total y volumen..... 76
- Cilindro de revolución: área y volumen ... 77
- Sólidos compuestos: área y volumen..... 182

Transformaciones geométricas isométricas

- Simetría axial y central 138
- Traslaciones y rotaciones 139

Transformaciones geométricas

- Homotecia directa..... 141
- Homotecia inversa 142
- Combinaciones de isometrías y homotecias..... 143

Localización y movimiento en el plano y el espacio

- Distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento 43
- Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, ordinaria y general..... 214

Organización y representación de datos

- Tablas de frecuencias para datos agrupados y no agrupados..... 144
- Gráficos estadísticos: histograma y polígono de frecuencias para datos agrupados 145

Medidas estadísticas

- Medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda para datos agrupados 146
- Medidas de tendencia central: análisis de sesgo en las medidas..... 147
- Medidas de dispersión: rango, desviación media y estándar, coeficiente de variación..... 148
- Medidas de localización: cuantiles..... 184
- Medidas de correlación entre dos variables y diagrama de dispersión 186

Eventos probabilísticos

- Probabilidad de sucesos equiprobables: regla de Laplace, propiedades 216
- Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes y no excluyentes: regla de la adición..... 217
- Probabilidad de sucesos independientes y dependientes 218

Conoce tu **libro**

El libro del estudiante **Matemática 4** está compuesto de seis secciones claramente identificadas por los temas, las situaciones y sus colores característicos.

Apertura

Este par de páginas iniciales brinda un panorama de la organización de la unidad.

Número y título de la unidad

Definida a partir de situaciones significativas en diversos contextos

Valores

Los valores que se deben promover en los trabajos con tus compañeros



Competencias

Las competencias y las nociones matemáticas a desarrollar son cuatro:

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localizacion
- Resuelve problemas de gestión de datos e incetidumbre

Conocimientos

La importancia de abordar situaciones relacionadas con los objetivos de desarrollo sostenible

Investigamos

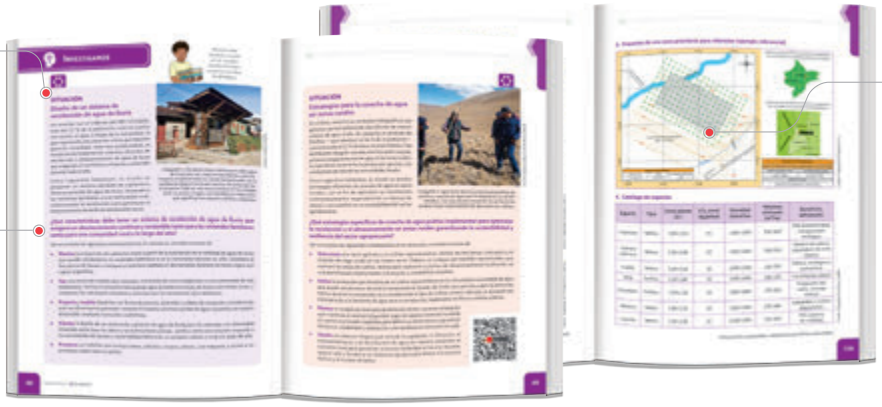
El propósito de esta sección es promover la gestión autónoma del estudiante al abordar una situación problemática y plantear soluciones. Para ello, te organizarás en equipos de trabajo y seleccionarán una de las situaciones.

Situaciones

Asumes un rol profesional, te planteas metas y luego brindarás soluciones.

Orientaciones

En equipo, se apoyarán en las orientaciones para abordar la situación problemática.



Anexos

Emplearán información de apoyo mostrada en tablas e infografías.

Exploramos

El propósito de esta sección es asumir casos desafiantes que involucran activar y consolidar los aprendizajes previos del grado. En ese sentido, se propone lo siguiente:

Actividades numeradas

Actividades de participación individual y organizadas en equipos de trabajo.

Preguntas retadoras

Interrogantes que promueven tomar posiciones, posturas y plantear soluciones.



Fuentes

Fuentes de información real complementarias o contrapuestas.

Conclusiones

Evaluación de las afirmaciones y planteamiento de ejemplos que las validen o refuten.

Desarrollamos

El propósito de esta sección es consolidar el aprendizaje de nociones matemáticas clave.

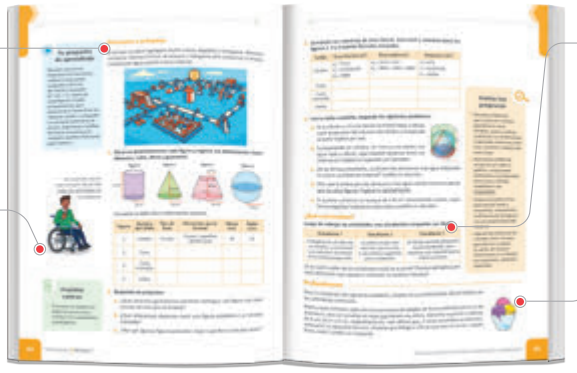
Pensamos y actuamos

Para resolver los problemas, realizas actividades experimentales, intuitivas e inductivas.

Cajas flotantes

Se presentan a partir de esta sección. Estas son:

Tu propósito de aprendizaje | Practica valores | Evalúa tus progresos



¿Qué construimos?

Desarrollas estrategias heurísticas.

Profundizamos

Brindas argumentos para ser evaluados y orientados a consolidar los aprendizajes.

Formalizamos

El propósito de esta sección es que, a partir de las situaciones problemáticas planteadas, inicies la indagación y la comprensión de las nociones matemáticas.

Situaciones problemáticas

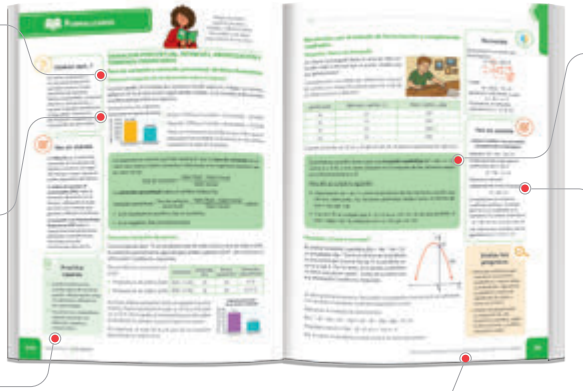
Se plantean problemas que te orientan a comprender las nociones matemáticas.

Resolución

Se plantean explicaciones a partir del problema planteado con el fin de facilitar la comprensión del tema.

Valores

Los valores que se deben promover en los trabajos con tus compañeros.



Competencias

Las competencias que se desarrollan en esta sección se aprecian en el folio.

Desarrollo de conceptos

Son las competencias y las nociones matemáticas a desarrollar.

Cajas complementarias

Se presenta información complementaria orientada a valorar la importancia de la matemática en diversos contextos. Estas son:

Recuerda | Ten en cuenta | ¿Sabías que...?

Actividad lúdica

El propósito de esta sección es que te organices para abordar una situación problemática relacionada con el pensamiento computacional o lúdico.

Situación

Se promueven actividades de competencia o colaborativas.

Reglas

Es importante comprender las reglas del juego.



Desarrollo

Se busca la mejor estrategia y se reflexiona sobre lo desarrollado.

Logros

La importancia de abordar situaciones relacionadas con los objetivos de desarrollo sostenible.

UNIDAD

1

Evaluamos cómo el riego impacta en la producción y mejoramos con alternativas responsables



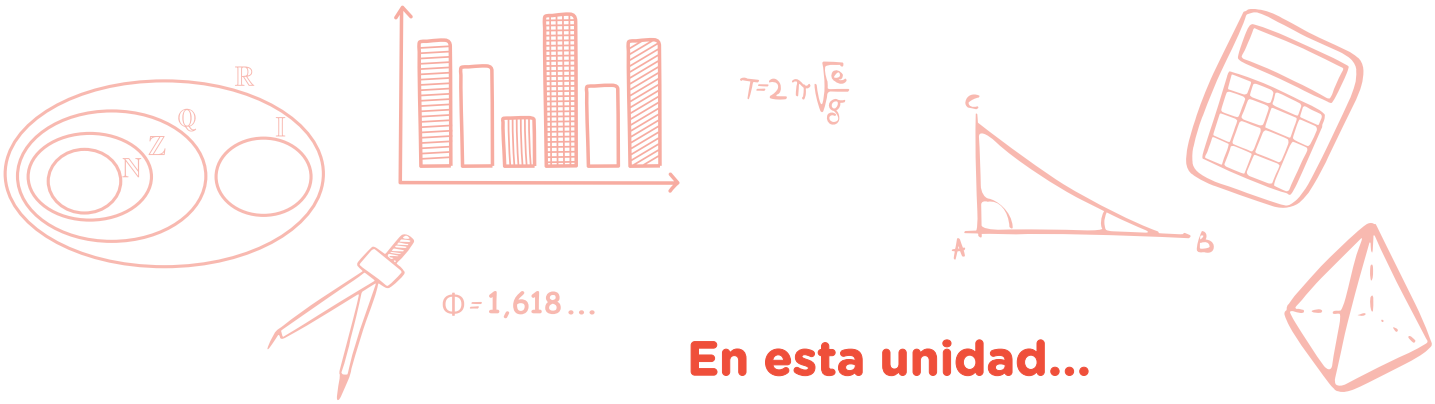
OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

12 PRODUCCIÓN Y CONSUMO RESPONSABLES

Este objetivo se vincula con la promoción de prácticas agrícolas sostenibles que reducen el impacto ambiental, optimizan recursos (como el agua) y mejoran la producción.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Uso racional de recursos en los procesos agropecuarios
- Adopción de tecnologías y prácticas agrícolas más sostenibles
- Reducción del impacto ambiental en la producción rural



En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construyo mis conocimientos

Número racional
- Expresión decimal
- Fracción generatriz

Operaciones con números racionales y notación científica
- Adición y sustracción con números racionales
- Multiplicación y división con números racionales
- Potenciación con números racionales
- Notación científica

Progresión geométrica (P. G.)
- Suma de términos de una P. G. (S_n)

Ecuaciones cuadráticas
- Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$
- Resolución con el método de factorización y completando cuadrados

Escala
- Escala de reducción y ampliación
- Mapas: curvas de nivel y distancias

Localización y movimiento en el plano y el espacio
- Distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento



Fuente: Wikimedia Commons (2022).

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque intercultural
  - Respeto a la identidad cultural
  - Diálogo intercultural

Investigamos



Reconoce cada situación, asume un rol, resuelve y describe tus ideas matemáticas a partir del anexo.

SITUACIÓN

Sostenibilidad hídrica en la producción agropecuaria

Según la Organización de las Naciones Unidas para la Alimentación y la Agricultura (FAO), el 70 % de la huella hídrica mundial proviene de la producción agropecuaria. Esto significa que cada alimento que consumimos requiere una gran cantidad de agua para su cultivo, procesamiento y distribución.

Como ingeniero ambiental responsable de diseñar sistemas sostenibles y la gestión de recursos hídricos, tu misión es evaluar el uso del agua en la producción agropecuaria de tu región y elaborar un informe que analice la huella hídrica regional.



Fotografía 1: El 90 % de la huella hídrica nacional de la producción se asocia con el sector agropecuario, que es el único sector usuario de la denominada agua verde y el mayor del agua azul.

Fuente: Autoridad Nacional del Agua (2015).

¿Cómo puedes elaborar un informe sobre los cultivos de tu región y su impacto hídrico en el tiempo?, ¿cómo se compara con el de otras regiones del país?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Investiga** la huella hídrica de los cultivos producidos en tu región y compárala con la de otras regiones del país; para ello, realiza el análisis sustentado en notaciones científica y exponencial cuando sea necesario e incluye operaciones con números decimales para dar mayor precisión a tu análisis.
- **Analiza** los datos de uso del agua registrados en diferentes años; para ello, identifica patrones o tendencias y propón una expresión matemática que describa ese comportamiento, como por ejemplo, una progresión geométrica para representar su evolución.
- **Estudia** cómo varía la huella hídrica en función del crecimiento del área cultivada; para ello, muestra una expresión que modele dicha relación mediante ecuaciones cuadráticas considerando distintos tipos de cultivos y su demanda de agua.
- **Diseña** gráficos que representen la producción de cultivos y su huella hídrica al utilizar escalas proporcionales; para ello, emplea los datos disponibles y otros recursos, como mapas o representaciones geográficas, para marcar las áreas cultivadas y analizar la relación entre el agua usada y la producción. Asimismo, utiliza conceptos de plano y escala, curvas de nivel, así como el punto medio y la pendiente, para realizar un análisis visual y sugerir prácticas sostenibles.

SITUACIÓN

Evaluación de la eficiencia de un sistema de riego agrícola

Según el Midagri, el sector agrícola en el Perú consume el 80 % del agua disponible, pero solo el 30 % se distribuye de manera eficiente.

Como ingeniero ambiental responsable de sistemas sostenibles y la gestión de recursos hídricos, tu misión es diseñar un sistema de riego eficiente que permita determinar el porcentaje de agua captada que se aprovecha realmente, cuantificar las pérdidas económicas ocasionadas por el uso ineficiente del agua, evaluar el potencial de tierras que podrían irrigarse con el agua desperdiciada y estimar los costos necesarios para mejorar la infraestructura de riego y optimizar el uso del recurso hídrico.



Fuente: Andina (2025).

Fotografía 2: Midagri promueve el uso responsable del agua en el agro para beneficiar a 2,2 millones de pequeños productores de la agricultura.

¿Qué sistema de riego eficiente puedes diseñar para optimizar el uso del agua captada en una comunidad agrícola considerando las características del cultivo representativo de la región y sustentando tu propuesta en la mejora de la gestión del recurso hídrico?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Identifica** los cultivos principales en la región y su huella hídrica, y compáralos con los de otras regiones del país. Con ese fin, considera emplear las notaciones científica y exponencial, lo que incluye operaciones con números decimales que permitan realizar un análisis preciso de rendimiento y consumo hídrico.
- **Analiza** los datos de producción agrícola a lo largo del tiempo identificando patrones o tendencias. Propón una expresión matemática que proyecte la evolución de la producción mediante una progresión geométrica.
- **Diseña** un sistema de riego alternativo para un cultivo representativo de la región estimando la eficiencia y el ahorro en el uso del agua frente al sistema tradicional. La propuesta debe considerar el impacto económico y ambiental del cambio.
- **Elabora** representaciones gráficas que integren datos del sistema de riego acuícola y la producción agropecuaria en la región. Utiliza escalas, mapas o tablas comparativas para analizar el uso del agua, identificar zonas de mayor eficiencia y proponer estrategias de mejora en la gestión del riego sostenible

Anexo A: Sostenibilidad hídrica en la producción agropecuaria

1. Producción de los cultivos en el Perú y los valores de la huella hídrica

Región	Principales cultivos	Huella hídrica (m^3/t)	Área agrícola aproximada (ha)
Amazonas	Café, tara	8000-14 000 (café)	70 000
Áncash	Papa, maíz, cebada	425 (papa)	250 000
Apurímac	Papa, quinua	425 (papa), 6000 (quinua)	140 000
Arequipa	Alcachofa, uva, cebolla	1500-2000 (alcachofa)	120 000
Ayacucho	Papa, quinua, tara	425 (papa), 6000 (quinua)	130 000
Cajamarca	Café, papa, maíz	8000-14 000 (café), 425 (papa)	200 000
Cusco	Café, cacao	8000-14 000 (café), 3000-5000 (cacao)	160 000
Huancavelica	Papa, quinua	425 (papa), 6000 (quinua)	90 000
Huánuco	Papa, maíz, café	425 (papa), 8000-14 000 (café)	110 000
Ica	Uva, algodón, alcachofa, cebolla, tomate	700-1000 (uva), 2000-3000 (algodón), 1500-2000 (alcachofa), 109 (cebolla)	250 000
Junín	Papa, maíz, café	425 (papa), 8000-14 000 (café)	180 000
La Libertad	Caña de azúcar, arándano, cebolla, uva	4300 (caña), 600-900 (arándano), 0,5-1,0 (cebolla), 700-1000 (uva)	280 000
Lambayeque	Arroz, uva	6496 (arroz), 700-1000 (uva)	150 000
Loreto	Café, maíz amarillo	8000-14 000 (café), 0,4-0,6 (maíz)	100 000
Madre de Dios	Cacao	3000-5000	30 000
Moquegua	Olivo, uva	500-1000 (aceituna)	20 000
Pasco	Papa, maíz	425 (papa)	60 000
Piura	Arroz, mango, uva	6496 (arroz), 0,5-1,0 (mango), 700-1000 (uva)	200 000
Puno	Papa, quinua	425 (papa), 6000 (quinua)	120 000
San Martín	Café, maíz amiláceo	8000-14 000 (café), 0,4-0,6 (maíz)	110 000
Tacna	Aceituna, uva	500-1000 (aceituna)	15 000
Tumbes	Arroz, plátano	6496 (arroz)	20 000
Ucayali	Cacao, maíz	3000-5000 (cacao), 0,4-0,6 (maíz)	50 000

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Estimación comparativa de la huella hídrica por cultivo y regiones (2010-2025)

Regiones	Cultivo	Huella hídrica (m^3/t)			
		2010	2015	2020	2025 (estimado)
Amazonas, Cajamarca, Cusco, Huánuco, Junín, Loreto, San Martín	Café	15 000	1500	14 000	13 500
Áncash, Apurímac, Ayacucho, Cajamarca, Huancavelica, Huánuco, Junín, Pasco, Puno	Papa	500	480	460	440
Áncash, Cajamarca, Huánuco, Junín, Loreto, Pasco, San Martín, Ucayali	Maíz	900	880	860	840
Apurímac, Ayacucho, Huancavelica, Puno	Quinua	1200	1150	1100	1050
Arequipa, Ica, La Libertad, Lambayeque, Piura	Uva	1800	1750	1700	1650
Arequipa, Ica, La Libertad	Cebolla	108,8	108,8	108,8	108,8
Cusco, Madre de Dios, Ucayali	Cacao	20 000	19 500	19 000	18 500
Lambayeque, Piura, Tumbes	Arroz	3000	2900	2800	2700
Moquegua, Tacna	Aceituna (olivo)	1200	1150	1100	1050
Arequipa, Ica, La Libertad, Lambayeque, Piura	Café	15 000	14 500	14 000	13 500

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

3. Huella hídrica de los cultivos con mayor consumo de agua en el Perú

Cultivo	Rendimiento (t/ha)	Huella hídrica (L/ha)
Arroz	8,5	9 180 000
Caña de azúcar	130,0	13 130 000
Papa	16,5	5 742 000
Alfalfa	22,5	4 477 500
Café	0,9	9 313 200

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

Anexo B: Evaluación de la eficiencia de un sistema de riego agrícola

1. Consumo de agua de los cultivos principales por región

Región	Cultivo principal	Consumo de agua (huella hídrica, m^3/t)
Amazonas	Café	14 000-15 000
Cajamarca	Papa	440-500
Cusco	Cacao	18 500-20 000
Huánuco	Maíz	840-900
Junín	Maíz	840-900
Loreto	Café	14 000-15 000
San Martín	Café	14 000-15 000
Áncash	Papa	440-500
Apurímac	Quinua	1050-1200
Ayacucho	Quinua	1050-1200
Huancavelica	Quinua	1050-1200
Pasco	Maíz	840-900
Puno	Papa	440-500
Arequipa	Uva	1650-1800
Ica	Uva	1650-1800
La Libertad	Cebolla	2800-3200
Lambayeque	Arroz	2700-3000
Piura	Arroz	2700-3000
Tumbes	Arroz	2700-3000
Moquegua	Aceituna (olivo)	1050-1200
Tacna	Aceituna (olivo)	1050-1200

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

2. Consumo de agua por el método de riego para los principales cultivos en el Perú

Cultivo	Consumo de agua por método de riego (m^3/ha)		
	Inundaciones	Bordes	Surcos
Arroz	20 000	18 000	16 000
Trigo	13 000	12 000	10 000
Maíz amarillo duro	15 000	13 000	11 000
Cebada	12 000	11 000	9500
Algodón	15 000	13 500	11 500
Uva	14 000	12 000	10 000

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Comparación del consumo de agua y eficiencia

Método de riego	Consumo promedio (m^3/ha por temporada)	Eficiencia de aplicación (%)	Ventajas principales
Riego por goteo	3487-4406	85-95	Máxima eficiencia, mínimo desperdicio. Ideal para suelos arenosos y zonas con escasez de agua.
Riego por aspersión	5150	60-75	Distribución uniforme, adecuado para cultivos de cobertura. Puede verse afectado por el viento.
Riego por surcos (tradicional)	6350	50-60	Sencillo de implementar. Tiene una alta pérdida por escurrimiento y evaporación.
Riego por gravedad (inundación)	7000-9000	40-60	Elevado desperdicio de agua, usado en cultivos como el de arroz.
Riego siguiendo curvas de nivel	4200-5000	70-80	Moderada eficiencia. Reduce la escorrentía, mejora la infiltración y evita la erosión. Se adapta bien a pendientes suaves o moderadas.

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

4. Superficie sembrada de principales cultivos transitorios según la campaña agrícola agosto 2023 - abril 2024

Cultivo	Superficie sembrada (ha) agosto 2023 - abril 2024	Consumo de agua por método de riego en miles de millones (m^3/ha)		
		Inundaciones	Bordes	Surcos
Arroz	343 046	6,86	6,17	5,49
Trigo	111 438	1,45	1,34	1,11
Maíz amarillo duro	242 766	3,64	3,16	2,67
Cebada	111 392	1,34	1,23	1,06
Algodón	16 878	0,25	0,23	0,19
Uvas	500 229	7,00	6,00	5,00

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

5. Datos referenciales sobre costos y beneficios del riego eficiente

Método de riego	Costo aproximado (S//ha)	Ahorro estimado de agua (%)	Tiempo de retorno de inversión (años)	Fuente
Riego por goteo	2704-5070	40-60	3-5	BID, Proyecto Riego Perú (2020)
Riego por aspersión	1352-3042	20-40	4-6	FAO, Manual de Riego (2018)
Riego por surcos	338-1044	0-10	N/A	ANA Perú (2019)

Fuente: Adaptado de ANA, Cosude y WWF (2015).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

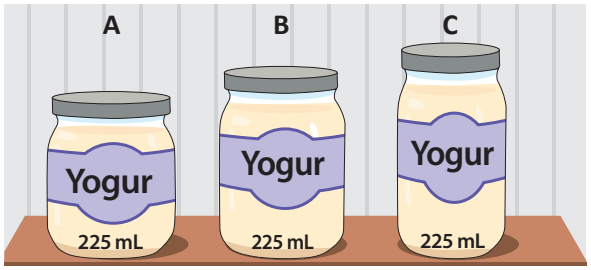
Exploramos



Recuerda experiencias parecidas y analiza cómo las resolviste. Eso te ayudará a enfrentar nuevos desafíos.

1. Elección de envase

Una empresa lanzará al mercado un yogur en envases cilíndricos que deben contener 225 mL.



Evalúa las tres propuestas de envases con las siguientes dimensiones:

Medidas	Envases		
	A	B	C
Altura	5 cm	6 cm	9 cm
Radio interno del envase	4,2 cm	3,5 cm	2,7 cm

a. ¿Cuál o cuáles de los envases podrían contener, aproximadamente, 225 mL de yogur? Justifica tu elección. Considera que 1 mL = 1 cm^3 y se desprecia el grosor del envase.

b. Supón que existen otros dos envases, D y E, con la misma altura, pero el envase D tiene el doble de radio que E. ¿El volumen de D será siempre el doble que el de E? Justifica tu respuesta.

2. Fútbol de gigantes

José, un experto en diseño de videojuegos, desarrolla un juego donde los objetos se muestran a gran escala respecto a la realidad. Observa la siguiente información:

- Diámetro del balón real: 0,22 m
- Diámetro del balón virtual: 20 m
- Altura promedio de un futbolista: 1,75 m
- Longitud oficial de un campo de fútbol: 105 m

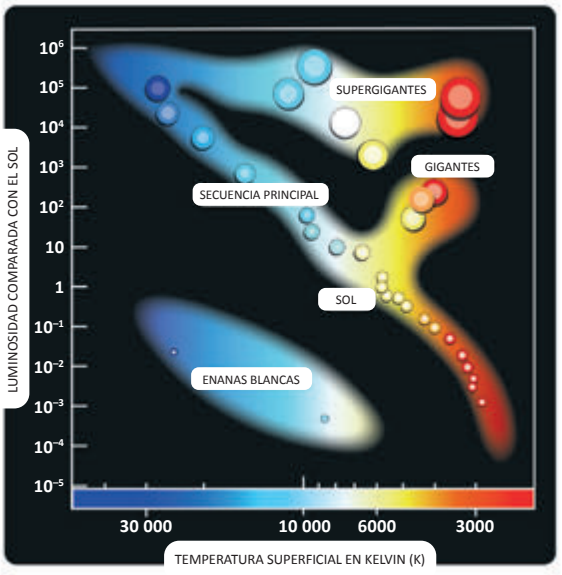
a. Se afirma que existe la misma relación entre las medidas reales y las virtuales. ¿Es correcta esta afirmación con los datos dados? Justifica tu respuesta.

b. Si el balón virtual se reduce en un 25 %, se afirma que todas sus dimensiones también se reducen en 25 %. ¿Es correcto? Justifica con ejemplos o contraejemplos.

c. Encuentra las medidas virtuales del futbolista y del campo aplicando la misma relación que existe entre balón real y virtual.

3. Clasificación de estrellas

Los astrónomos utilizan el diagrama H-R para clasificar estrellas comparando su luminosidad (brillo) y su temperatura. En esta imagen, las estrellas supergigantes se ubican en la parte superior y las estrellas enanas blancas en la zona inferior izquierda.



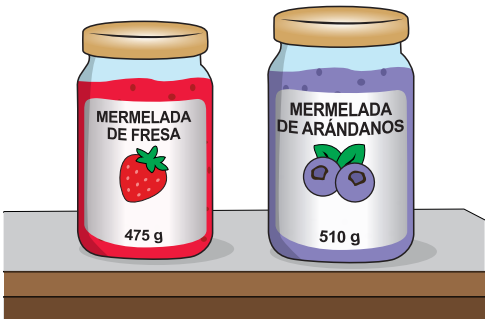
Fuente: *El Mundo* (2009).

a. Supón que quieres comparar la luminosidad y la temperatura de una estrella supergigante con las de una enana blanca. Explica cómo el uso de potencias de base 10 facilita esta comparación y da ejemplos que lo demuestren.

b. ¿Cuál es la diferencia entre la temperatura del Sol (estrella enana amarilla) y la de una estrella enana blanca con luminosidad aproximada de 10^{-2}?

4. Producción de mermelada

Una empresa produce mermeladas de fresa y arándano, y las envasa en frascos de 475 g y 510 g, respectivamente. La empresa utiliza diferentes proporciones de fruta y azúcar en la preparación, y durante el proceso ocurre una merma, que representa la pérdida de peso.



a. Completa la tabla con los datos que faltan.

Descripción	Mermelada de fresa	Mermelada de arándano
Fruta utilizada (kg)	154,2	95,2
Azúcar por tipo de fruta (kg)	95	57
Mermelada final (kg)	199,36	
Merma (kg)		30,44
N.° de frascos	419	

Nota:
Merma = (fruta + azúcar) − mermelada final

b. Si en la mermelada de arándano se usara 95 kg de azúcar como la de fresa, la merma se reduciría y automáticamente su producción final superaría a la de fresa. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica con procedimientos o ejemplos.

c. Analiza cómo cambiaría la merma y el número de frascos si se modificara la proporción fruta-azúcar en cada preparación.

5. Consumo de agua en la confección

El proceso de confección de una prenda requiere agua en etapas como el teñido y el lavado de telas. En las imágenes se muestra el consumo de agua de distintas prendas y su precio de venta.



Fuente: Adaptado de Bonilla y Massin (2021).

Además, se tiene la siguiente información:

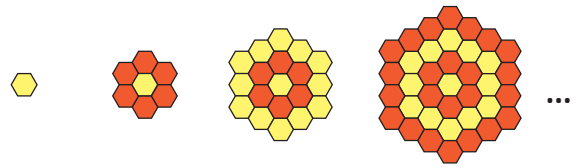


a. Obtén el cociente entre el precio de venta y los litros de agua consumidos por prenda. Determina cuál tiene mayor y menor valor.

b. Analiza los resultados obtenidos y argumenta qué prenda resulta más rentable y cuál menos sostenible considerando simultáneamente el precio de venta y el consumo de agua.

1. Frazadas tejidas a mano

María teje frazadas con piezas hexagonales bicolores, formando panales concéntricos: un hexágono central rodeado de anillos sucesivos, como los que se muestran.



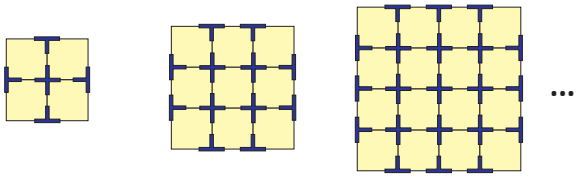
Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3 Diseño 4

a. María necesita tejer tres diseños adicionales para completar una parte de la frazada. ¿Cuántos hexágonos de cada color serán necesarios para los diseños 6 y 7? Además, explica cómo calcularías el número de hexágonos de cada color para el diseño enésimo.

b. Se afirma que el número de hexágonos en cada diseño depende del anterior y que siempre crece sumando la misma cantidad al anterior. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

2. Separadores en la colocación de mayólicas

Un técnico de construcción coloca mayólicas en el piso. Para ello, utiliza separadores en forma de cruz (**+**) y en forma de letra "t" (**T**) para cada modelo, tal como se muestra.



Modelo 1 Modelo 2 Modelo 3

a. El técnico requiere prever la cantidad de separadores de cada forma según los modelos. Para los modelos 6 y 10, ¿cuántos separadores de cada forma se necesitarán?

b. Para optimizar el uso de separadores y reducir gastos, determina una expresión general para el modelo enésimo que permita predecir la cantidad de separadores de cada tipo.

3. Bonificación de trabajadores

Una empresa busca promover la equidad y ofrece dos planes de bonificación mensual, que cambian cada año. La tabla muestra la bonificación que cada trabajador recibe mes a mes bajo cada opción.



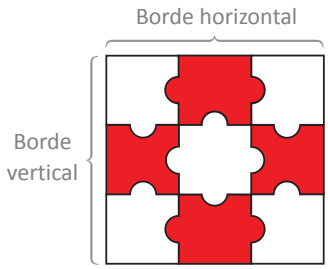
Año	Opción A (S/ al mes)	Opción B (S/ al mes)
1	1000	500
2	1500	1000
3	2000	2000
⋮	⋮	⋮

a. Un trabajador desea ahorrar sus bonificaciones acumuladas durante diez años completos para comprar un bien. ¿Cuál de las dos opciones le conviene más? Justifica con cálculos.

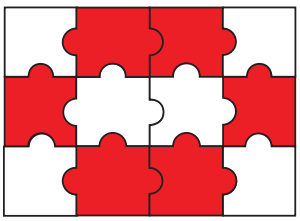
b. Se afirma que las opciones A y B corresponden a una progresión aritmética y a una progresión geométrica, respectivamente. Además, ambas progresiones se intersecan en un punto. ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta con cálculos y representaciones en el plano cartesiano.

4. Pisos con piezas similares a las de un rompecabezas

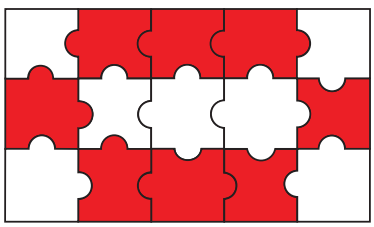
Se muestran modelos de pisos formados por piezas blancas y rojas a modo de rompecabezas.



Modelo 1



Modelo 2



Modelo 3

⋮

Analiza los modelos, luego completa la tabla, y determina el patrón de cambio de las piezas rojas y blancas para el modelo 10.

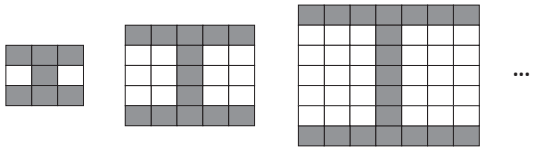
Modelo	N.° de piezas			
	Piezas rojas		Piezas blancas	Total de piezas
	Borde vertical	Borde horizontal	Total	
1	2	2	5	9
2	2	4	6	12
3	2			
⋮				
10				

5. Diseños de pisos con baldosas

Se muestran dos anuncios publicitarios de diseños de pisos con baldosas blancas y grises. Estos modelos buscan aprovechar mejor los materiales en pisos modulares.

¡EXPANDE TUS ESPACIOS CON ESTILO!

Baldosas de crecimiento ordenado



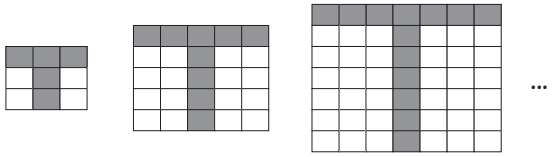
Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3 ...

Características:
- Diseño modular elegante
- Ideal para interiores minimalistas y modernos

¡Transforma tu ambiente con precisión y belleza!

¡DALE VIDA A TUS ESPACIOS!

Baldosas de expansión creativa



Diseño 1 Diseño 2 Diseño 3 ...

Características:
- Diseño dinámico y llamativo
- Perfecto para ambientes vibrantes y contemporáneos

¡Atrévete a innovar con cada baldosa!

Un arquitecto diseñará un piso siguiendo cada uno de los anuncios mostrados:

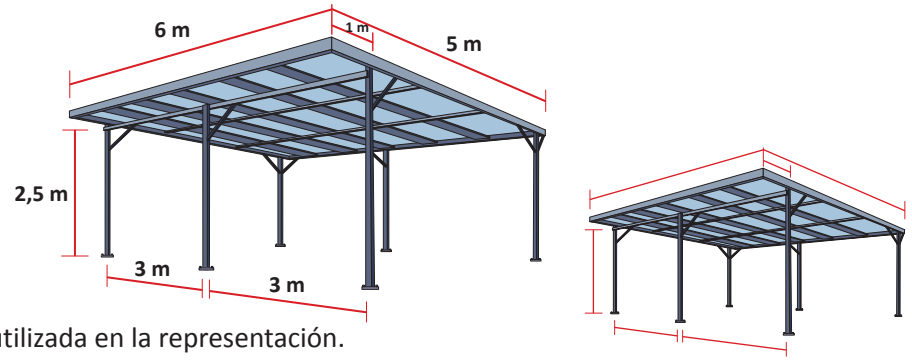
- Con baldosas de crecimiento ordenado
- Con baldosas de expansión creativa

¿Cuáles serían los diseños y los procedimientos que permitan predecir la cantidad de baldosas grises y blancas que deben usarse para un modelo *n* en cada caso?

1. Cobertizo para automóviles

Observa las dimensiones reales de un cobertizo destinado al estacionamiento de dos automóviles. El techo mide 6 m de largo por 5 m de ancho, por lo que su área es de 30 m².

En la representación a escala, el techo ocupa un área de 30 cm².



a. Determina la escala utilizada en la representación.

b. En el segundo cobertizo, completa las medidas aplicando la escala que encontraste. Incluye el largo, el ancho, el alto y las distancias parciales señaladas.

c. Demuestra que todas las dimensiones representadas del cobertizo guardan la misma escala, verificando el largo, el ancho, el alto y las distancias parciales mediante cálculos proporcionales.

2. Una ruta turística en Huánuco

La imagen muestra el plano del centro de Huánuco. Se sabe que la Plaza de Armas mide 100 m por lado.



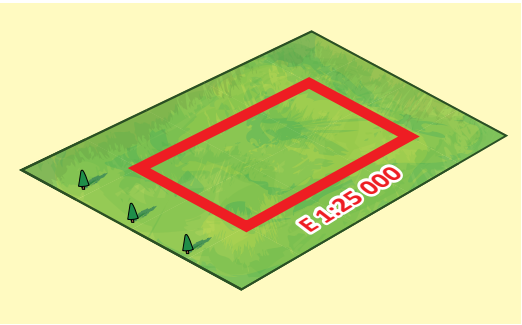
Fuente: Adaptado de DtodoHuánuco (2019).

a. Elige un trayecto turístico en el plano, mídelo y calcula la distancia real aproximada del recorrido.

b. Se afirma que, el lado de la Plaza de Armas mide 100 m en la realidad y aparece como 1 cm en el plano, la escala es 1:10 000. ¿Es correcta esta afirmación? Fundamenta tu respuesta analizando posibles errores de medición o de aplicación de la escala.

3. Área real de un terreno

En un plano a escala 1:25 000, se muestra en color rojo un terreno rectangular. El terreno tiene 6 cm de largo y 3 cm de ancho en el plano.



a. Para reconocer el área del terreno, se realizaron los siguientes pasos:

Paso 1: Largo real = 6 cm × 25 000 = 150 000 cm

Paso 2: Ancho real = 3 cm × 25 000 = 75 000 cm

Paso 3: Área real = 150 000 × 75 000 = 11 250 000 000 cm^2

Paso 4: Como el resultado está en centímetros cuadrados, se convierte a metros así:

Área = 11 250 000 000 ÷ 25 000 = 450 000 m^2

Paso 5: Por lo tanto, el área es de 450 000 m^2.

El procedimiento mostrado es incorrecto. Identifica el error y plantea el correcto.

b. Generaliza una regla para calcular el área real de un terreno a partir de su representación en un plano a escala, demostrando cómo las longitudes se relacionan con las áreas.

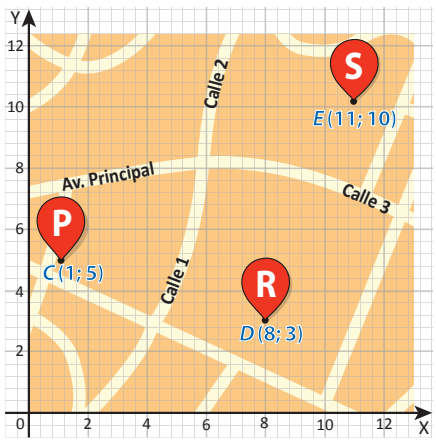
4. Ubicación de los restaurantes

En una ciudad existen tres restaurantes ya ubicados, identificados como P, R y S. Se desea construir un nuevo restaurante Q, que esté lo más cerca posible a la av. Principal y a la calle 2. En el plano cartesiano se representan los restaurantes con sus coordenadas correspondientes.

Restaurantes en el mapa



Restaurantes en el plano cartesiano



a. Con la ayuda del plano cartesiano, propón la mejor ubicación posible para el restaurante y justifica tu elección aplicando propiedades geométricas como la mediatriz, el punto medio y la pendiente.

b. Se afirma que si una recta es perpendicular al segmento que une dos restaurantes, con eso basta para decir que es su mediatriz, aunque no pase por el punto medio. ¿Es correcta dicha afirmación? Justifica tu respuesta con propiedades geométricas.

Desarrollamos



Aplica lo trabajado al resolver los siguientes problemas justificando cada paso.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve situaciones de producción que involucran la progresión geométrica expresando el término enésimo y la suma acumulada de términos. Emplea estrategias y procedimientos para hallar cualquier término de la sucesión y la suma de términos. Justifica la relación entre el término enésimo y la suma acumulada evaluando la validez para sustentar proyecciones de crecimiento.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Promueve hábitos de consumo responsable para el cuidado del ambiente.
- Valora las costumbres y tradiciones de tus compañeros mostrando interés por conocer sus orígenes.

Pensamos y actuamos

Una fábrica produce botellas siguiendo dos líneas de producción diferentes (línea X y línea Y), cada una con un ritmo de producción distinto:

- Línea X: Cada minuto, cada máquina produce el doble de botellas nuevas de las que produjo en el minuto anterior.
- Línea Y: Cada minuto, cada máquina produce el triple de botellas nuevas de las que produjo en el minuto anterior.

Ambas líneas empiezan con una botella en la hora cero.

Para la línea X

1. Completa la siguiente secuencia:



Minuto 0 | Minuto 1 | Minuto 2 | Minuto 3 | Minuto 4

2. Completa la tabla. Puedes dibujar botellas en tu cuaderno para visualizar cómo crece la producción.

Tiempo (min)	N.° de botellas
0	1
1	2
2	4
3	
4	
5	
6	64
⋮	
n	

3. Responde lo siguiente:

a. ¿Cómo obtuviste el número de botellas en el quinto minuto?

b. ¿Cuántas botellas habrá en el minuto 10?, ¿y en el minuto 16?, ¿y en cualquier minuto *n*?

c. ¿Cuántas botellas se producen en total hasta el octavo minuto?

Para la línea Y

Para obtener el número de botellas y su suma acumulada hasta el minuto *n*, realizamos lo siguiente:

Tiempo (min)	N.° de botellas	Suma acumulada hasta ese minuto
0	1	1
1	3	1 + 3 = 4
2	9	1 + 3 + 9 = 13
3	27	1 + 3 + 9 + 27 = 40
4	81	1 + 3 + 9 + 27 + 81 = 121
⋮	⋮	⋮

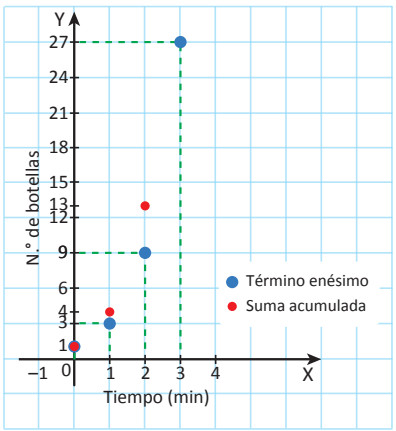
4. **A partir de la tabla, se proponen tres posibles modelos para calcular la suma acumulada de botellas hasta el minuto *n*:**

   Modelo A: $S_n = \frac{3^n - 1}{2}$ **Modelo B:** $S_n = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$ **Modelo C:** $S_n = 3^n$

   Verifica cada modelo utilizando valores de la tabla y explica cuál o cuáles son correctos. Justifica con argumentos matemáticos.

5. **A partir del gráfico, ¿qué conclusiones puedes extraer sobre la relación entre el término enésimo de la sucesión y la suma acumulada hasta ese término? Justifica con un ejemplo.**

Relación entre el término enésimo y la suma acumulada



¿Qué construimos?

En un aula, dos estudiantes al analizar lo desarrollado en las actividades anteriores expresan lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2
Conociendo el término enésimo de una progresión geométrica, se puede calcular la suma acumulada hasta ese punto.	Dos sucesiones geométricas con la misma razón no necesariamente tienen la misma suma acumulada de términos; dependen de su primer término y número de términos.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

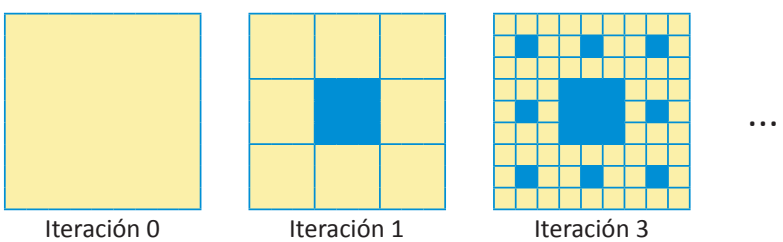
Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran la progresión geométrica e identifica la razón y el primer término.
- Expresa la progresión geométrica usando tablas de valores y gráficos, y distingue el término enésimo de la suma acumulada de términos.
- Emplea procedimientos de progresión geométrica para hallar cualquier término de la sucesión o la suma total en un tiempo dado.
- Justifica las proyecciones de crecimiento, evalúa y sustenta la relación entre el término enésimo y la suma acumulada empleando ejemplos.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

En cada iteración, el cuadrado se divide en una cuadrícula de 3 × 3, y el recuadro central de cada subdivisión se borda de azul. Con cada nueva iteración, el patrón se repite en los cuadrados no bordados de la iteración anterior.



Iteración 0 Iteración 1 Iteración 3 ...

a. Calcula la fracción del área total que queda bordada (A_n) para las iteraciones 4 y 5. Luego, formula una regla general que permita determinar A_n para cualquier número finito de iteraciones.

b. Si las iteraciones se prolongan hasta el infinito, toda la alfombra quedará completamente azul. ¿Esta afirmación es verdadera o falsa? Justifica tu respuesta con cálculos o representaciones gráficas.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve situaciones problemáticas del contexto con ecuaciones cuadráticas, y expresa la relación entre discriminante y raíces. Emplea estrategias para hallar el discriminante, las soluciones y la intersección (corta, toca, no interseca) con el eje X. Justifica la relación (discriminante, raíz, intersección) y sustenta la interpretación de soluciones en el contexto.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

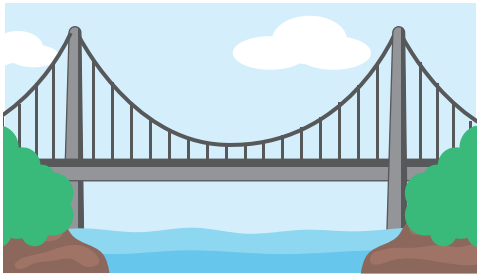


Practica valores

- Participa en campañas escolares de limpieza y reciclaje.
- Escucha con respeto las experiencias y saberes culturales que tus compañeros comparten en clase.

Pensamos y actuamos

Un ingeniero diseña puentes con una estructura parabólica, donde la curva principal del puente sigue la expresión $y = ax^2 + bx + c$. Además de definir la forma del arco, el ingeniero necesita determinar los puntos en los que la curva interseca la plataforma del puente.



Explora cómo se comporta la ecuación cuadrática con coeficientes *a*, *b* y *c* que representa la forma de cada puente.

1. **Obtén el discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) de cada ecuación cuadrática. Luego, según el valor obtenido, determina si la ecuación tiene dos raíces reales, una raíz real doble o ninguna raíz real. Completa la tabla con tus resultados.**

Ecuación	*a*	*b*	*c*	Discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$)	Tipo de raíz
$-x^2 + 7x - 10 = 0$					
$x^2 - 6x + 9 = 0$	1	−6	9	$\Delta = 0$	Una raíz real
$x^2 - 4x + 7 = 0$					
$-x^2 + 8x - 16 = 0$					

2. **Observa las ecuaciones cuadráticas y completa la tabla.**

Ecuación	Discriminante (Δ)	Número de raíces reales	¿Corta al eje X?	La parábola se abre hacia…
$-x^2 + 7x - 10 = 0$			Sí (dos puntos)	
$x^2 - 6x + 9 = 0$				
$x^2 - 4x + 7 = 0$				Arriba
$-x^2 + 8x - 16 = 0$				

a. ¿Qué relación existe entre el valor del discriminante y el número de raíces de la ecuación?

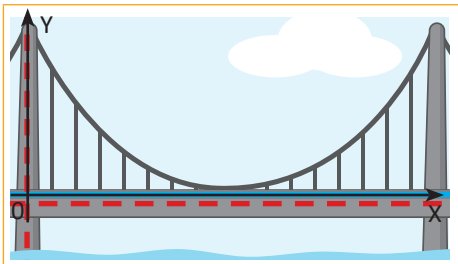
b. Explica cómo el valor del discriminante determina si la parábola corta al eje X en dos, uno o ningún punto.

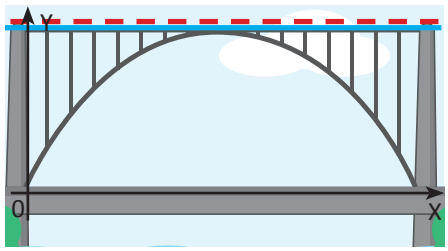
c. ¿De qué manera el signo de *a* determina la orientación de la parábola?

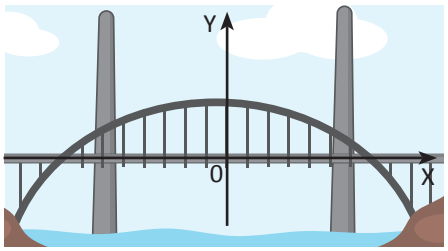
d. ¿Por qué algunas parábolas no intersecan al eje X si todas provienen de ecuaciones cuadráticas?

Reconoce la relación de cada puente con su ecuación.

3. Con la información de las tablas anteriores, escribe las ecuaciones cuadráticas que corresponden a la representación de cada puente según corte o toque a la plataforma.









¿Qué construimos?

En el aula, luego de analizar lo desarrollado en las actividades anteriores, dos estudiantes comparten sus conclusiones.

Estudiante 1	Estudiante 2
Si el discriminante es mayor que cero, la parábola interseca al eje X en dos puntos, lo que significa que hay dos soluciones diferentes y reales.	Si el discriminante es cero, la parábola nunca toca el eje X, porque no hay raíces.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

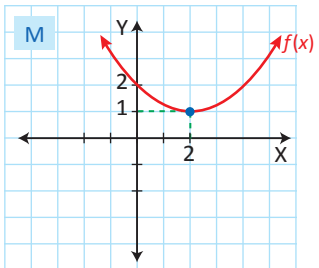
- Resuelve situaciones del contexto con ecuaciones cuadráticas, y establece la relación entre coeficientes y las características de la parábola.
- Expresa la ecuación, representa la parábola, y comunica la relación del discriminante y las intersecciones de la gráfica con el eje X.
- Emplea procedimiento para obtener el discriminante, y hallar el tipo y el número de raíces (dos, una, ninguna), y si corta, toca o no el eje X.
- Justifica el impacto del discriminante en las raíces. Argumenta la validez de soluciones con ejemplos y sustenta la interpretación de los cortes.

Profundizamos

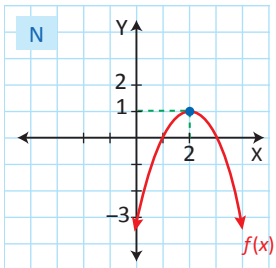
Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

Relaciona cada ecuación cuadrática con su gráfica correspondiente (M, N o P), interpretando la naturaleza de sus soluciones a partir del valor del discriminante.

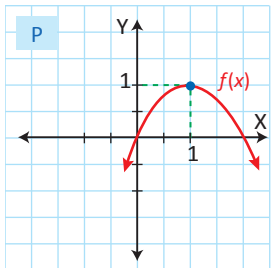
a. $f(x) = -x^2 + 4x - 3$



b. $f(x) = 2x - x^2$



c. $f(x) = 0{,}25x^2 - x + 2$

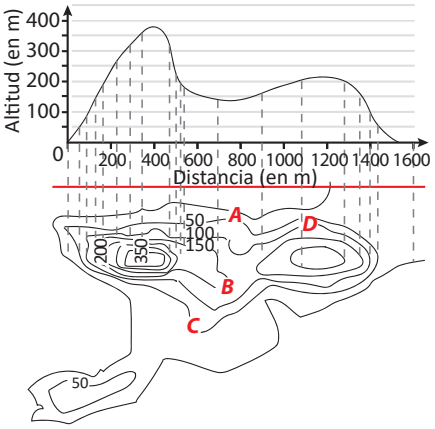


Tu propósito de aprendizaje

Modela y representa situaciones del contexto que involucran relieve con curvas de nivel, y expresa altura y pendiente. Emplea estrategias gráficas para hallar altitud, pendiente y viabilidad de ruta. Justifica la relación entre curvas e inclinación, y sustenta la ruta óptima.

Pensamos y actuamos

Un equipo de rescate debe planificar el trayecto óptimo en una zona montañosa usando un mapa topográfico con curvas de nivel. Para ello, deben reconocer las áreas de pendientes pronunciadas (curvas muy próximas) y las de pendientes suaves (curvas más separadas), lo que les permitirá elegir la ruta más segura y eficiente.



1. Observa las curvas de nivel y el perfil topográfico. Luego, describe la relación entre ellos y registra tus observaciones en la tabla proporcionada.

Punto	Altura aproximada (m)	Zona en que se encuentra (plana, subida o cima)	Descripción de la pendiente y las curvas
A	50	Zona plana	Pendiente suave y curvas separadas
B			
C			
D			

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

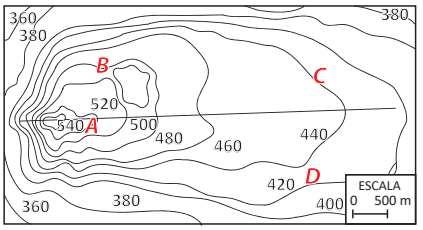


a. Identifica las curvas más cerradas o más separadas.

b. ¿Qué representa cada línea en la imagen?, ¿cómo varía la altitud al alejarse del centro del cerro?

c. ¿Qué puntos están a mayor altura?, ¿cómo lo reconociste visualmente?

2. Analiza el mapa topográfico con curvas de nivel. Cada línea representa un valor fijo de altura (cota de altitud). Al respecto, completa la tabla.



Punto	Altura aproximada (m)	¿Hay ascenso o descenso según la altitud?	¿Pendiente suave o fuerte según las curvas?
A			
B			
C			
D			

a. ¿Qué representa la distancia entre las curvas de nivel?

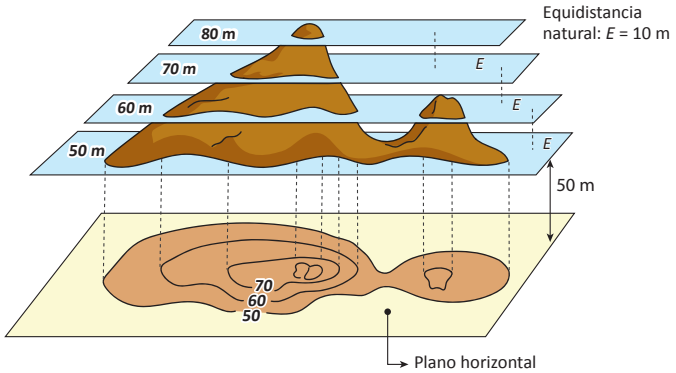
b. ¿Cómo varía la pendiente al cambiar la separación entre curvas?

c. ¿Qué zona representa una mayor dificultad para caminar?

Practica valores

- Organiza junto a tus compañeros actividades de ahorro de agua y energía.
- Aprecia las manifestaciones artísticas y musicales de diferentes regiones durante las actividades en clase.

3. **Revisa cómo se representan en un plano las formas del terreno (relieve).**
El equipo de rescate revisa la imagen mostrada.



a. ¿Qué relación existe entre la forma del terreno en 3D y la forma de las curvas en el plano?

b. ¿Qué ocurre con las curvas de nivel a medida que aumenta la altura?

c. Se afirma: "Cuando las curvas de nivel están más juntas, el terreno es plano y fácil de caminar". ¿Es correcto?, ¿por qué? Usa evidencias del gráfico y justifica tu respuesta.

¿Qué construimos?

En un aula, después de analizar las actividades anteriores, tres estudiantes comparten sus conclusiones.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Las curvas de nivel más juntas indican un terreno con pendiente pronunciada.	Las curvas de nivel separadas representan zonas con menor inclinación.	Todas las curvas de nivel tienen la misma altura y muestran el mismo tipo de pendiente.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

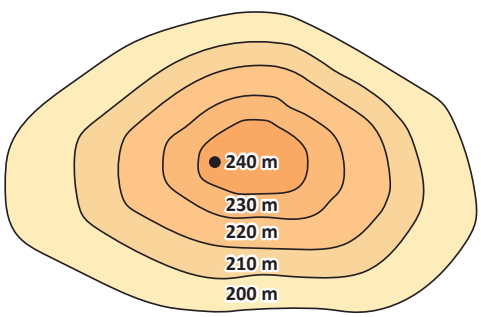
Evalúa tus progresos

- Modela situaciones del contexto con relieve y curvas de nivel, y establece equivalencia entre separación y pendiente.
- Expresa altitudes en mapas y comunica altitud constante por curva y zonas suaves.
- Emplea la observación de curvas y halla el tipo de pendiente y altitudes intermedias.
- Justifica con ejemplos que la proximidad de curvas es una subida fuerte y sustenta la elección de la ruta óptima.

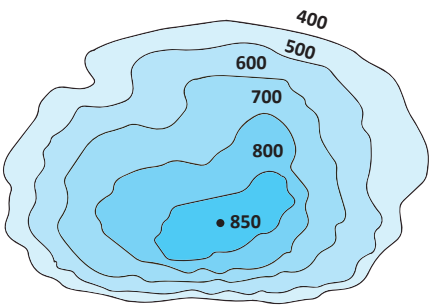
Profundizamos

Para la resolución de los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Un grupo de escaladores debe llegar al punto más alto de la zona. Observa las curvas de nivel y determina por cuál ruta podrían subir con menor esfuerzo. Justifica tu elección.**



2. **Un ingeniero ambiental quiere ubicar un reservorio donde no haya mucha pendiente. Elige una zona adecuada observando las curvas de nivel (en metros) y explica tu decisión. Considera que un reservorio requiere estabilidad del terreno.**



Formalizamos

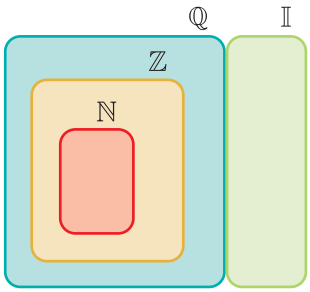


Observa situaciones, muestra resoluciones con sentido, explica ideas matemáticas y profundiza lo aprendido.

Ten en cuenta

La unión de los números racionales ($\mathbb{Q}$) e irracionales ($\mathbb{I}$) forman el conjunto de los números reales ($\mathbb{R}$).

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$$



Recuerda

Existen números que tienen infinitos decimales no periódicos. Por ejemplo:

- $\sqrt{2} \approx 1{,}4142...$
- $\sqrt{3} \approx 1{,}7320...$
- $\pi \approx 3{,}1415...$
- $e \approx 2{,}7182...$

Estos números pertenecen al conjunto de los números irracionales.

Practica valores

- Cuida las plantas del aula y del huerto escolar, regándolas y fomentando la participación colectiva en su mantenimiento.
- Dialoga con tus compañeros sobre sus costumbres, escuchando con apertura y sin emitir juicios.

NÚMERO RACIONAL

Expresión decimal

Situación: Nivel de batería

La tabla muestra el nivel de batería de los celulares de varios estudiantes en fracciones y decimales. ¿Qué necesitas realizar para comparar los niveles de batería si están escritos en diferentes representaciones numéricas?

Estudiante	Nivel (fracción)	Nivel (decimal)
Pedro	$\frac{3}{4}$	0,75
Diego	$\frac{5}{8}$	0,625
Karla	$\frac{2}{5}$	0,40
Omar	$\frac{5}{6}$	0,833...

Un estudiante afirma: "Como $\frac{5}{6}$ tiene más cifras decimales que $\frac{3}{4}$, entonces Omar tiene más batería que Pedro".

¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Comparamos las fracciones y sus decimales.

- $\frac{5}{6} = 0{,}833...$
- $\frac{3}{4} = 0{,}75$

Tenemos que $\frac{5}{6}$ tiene más cifras decimales, lo que importa no es la cantidad de cifras, sino el valor del número.

Por lo tanto, Omar tiene más batería que Pedro, pero no porque su fracción tenga más cifras decimales, sino porque 0,833... es mayor que 0,75.

La experiencia anterior permite reconocer que la **expresión decimal de un número racional** es el resultado de dividir dos números enteros, el numerador entre el denominador, siendo este último distinto de cero. Las expresiones decimales se clasifican en decimales exactos, periódicos puros y periódicos mixtos.

Ejemplos: $\frac{9}{2} = 4{,}5$; $\frac{10}{3} = 3{,}\widehat{3}$ y $\frac{25}{6} = 4{,}1\widehat{6}$

Situación: ¿Más cifras implica periodicidad?

Un estudiante afirma: "Si un número decimal tiene más de dos cifras decimales, entonces es periódico". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Explica tu respuesta con ejemplos y argumentos matemáticos.

La afirmación es falsa, pues tener más de dos cifras en su parte decimal no significa que sea periódico. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: El número 0,333... $\left(\text{equivalente a } \frac{1}{3}\right)$ tiene un patrón repetitivo: el dígito tres, que se repite de manera infinita. Por lo tanto, 0,333... es un decimal periódico puro.

Ejemplo 2: El número 0,142857142857... $\left(\text{equivalente a } \frac{1}{7}\right)$ tiene como patrón repetitivo el bloque 142857, que se repite sin terminar. Por lo tanto, 0,142857142857... es un decimal periódico puro.

Fracción generatriz

Situación: Preparación de concreto

Un ingeniero civil necesita preparar concreto con una proporción 1:2:2 (cemento:arena:piedra) y dispone de 0,52 m³ de arena para la mezcla. ¿Cuánto cemento y cuánta piedra debe usar para mantener la proporción correcta de la mezcla?

Para optimizar la mezcla, convertimos 0,52 a su fracción generatriz.

$$0{,}52 = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}$$

Ahora, aplicamos la proporción 1:2:2 para calcular cemento y piedra.

- Cemento (1 parte): $\frac{13}{50}$ m³; $\frac{\text{Cemento}}{\text{arena}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{Cemento} = \frac{1}{2} \times \frac{13}{25}$
- Arena (2 partes): $\frac{13}{25}$ m³
- Piedra (2 partes): $\frac{13}{25}$ m³

El uso de fracción generatriz permite trabajar con valores exactos durante los cálculos, reduciendo los errores que podrían surgir por aproximaciones decimales.

El análisis anterior nos muestra lo siguiente:

Fracción generatriz a partir de un número decimal exacto. Escribimos como numerador el número sin la coma decimal y como denominador un 1 seguido de tantos ceros como cifras decimales se tenga. Luego, simplificamos si es posible. Si un decimal tiene *k* cifras decimales, la fracción generatriz es

$$0{,}abc\ldots x_{k\ \text{cifras}} = \frac{abc\ldots x}{100\ldots 0_{k\ \text{ceros}}} = \frac{abc\ldots x}{10^k}$$

Ejemplo: $0{,}58 = \frac{58}{100} = \frac{29}{50}$

Fracción generatriz a partir de un número decimal periódico

a. **Periódico puro.** Un número decimal periódico puro es aquel donde todas las cifras de su parte decimal se repiten indefinidamente, formando un patrón que se repite a lo largo de toda la secuencia decimal. Si la parte entera es 0, se expresa así:

$$0{,}\overset{\frown}{abc\ldots x}_{k\ \text{cifras}} = \frac{abc\ldots x}{99\ldots 9_{k\ \text{veces nueve}}}$$

donde *abc…x* es el periodo (cifras que se repiten).

El denominador contiene tantos nueves como cifras tenga el periodo.

Ejemplos:

$0{,}\hat{3} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y $0{,}\overset{\frown}{12} = \frac{12}{99} = \frac{4}{33}$

Si hay parte entera, se separa y suma el valor fraccionario; por ejemplo,

$2{,}\hat{5} = 2 + \frac{5}{9} = \frac{23}{9}$.

Ten en cuenta

Ejemplos de fracciones decimales:

$\frac{12}{10}; \frac{7}{10^2}; \frac{21}{10^3}; \frac{9}{10^4}$

Ejemplos de fracciones ordinarias:

$\frac{14}{11}; \frac{19}{29}; \frac{7}{16}; \frac{24}{35}$

Recuerda

La fracción generatriz de un número decimal es la fracción que representa ese decimal.

Ejemplos:

- $0{,}875 = \frac{7}{8}$
- $0{,}363636\ldots = \frac{4}{11}$
- $0{,}3181818\ldots = \frac{7}{22}$

Recuerda

Al efectuar $0{,}\hat{3} - 0{,}\hat{8} + 0{,}9\hat{6}$ tienes lo siguiente:

$$= \frac{3}{9} - \frac{8}{9} + \frac{96-9}{90}$$
$$= \frac{30}{90} - \frac{80}{90} + \frac{87}{90}$$
$$= \frac{37}{90} = 0{,}4111\ldots$$

¿Sabías que…?

Estas fracciones son equivalentes a números decimales exactos.

Ejemplos:

- $\frac{7}{10} = 0{,}7$
- $\frac{25}{100} = 0{,}25$
- $\frac{381}{1000} = 0{,}381$

Ten en cuenta

Ejemplos de fracción generatriz de decimales periódicos mixtos:

- $0{,}21313\ldots = 0{,}2\widehat{13}$

  $= \frac{213-2}{990} = \frac{211}{990}$

- $2{,}13444\ldots = 2{,}13\widehat{4}$

  $2 + 0{,}13\widehat{4} = 2 + \frac{134-13}{900}$

  $\frac{1800+121}{900} = \frac{1921}{900}$

b. Periódico mixto. Un número decimal periódico mixto es aquel donde una parte de la cifra decimal no se repite (no periódica), seguida de otra parte que se repite indefinidamente formando un patrón. Se expresa así:

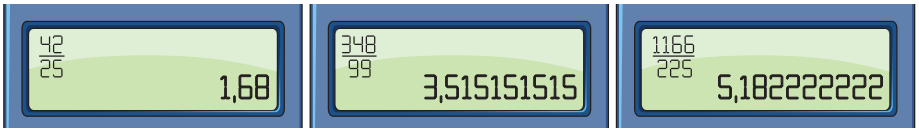
$$0,\underbrace{abc\ldots h}_{m\text{ cifras}}\underbrace{\overbrace{pqr\ldots z}}_{n\text{ cifras}} = \frac{abc\ldots z - abc\ldots h}{\underbrace{999\ldots 9}_{n\text{ cifras}}\underbrace{000\ldots 0}_{m\text{ cifras}}}$$

- En el numerador, se escriben todas las cifras decimales (parte no periódica + periódica) y se restan las cifras de la parte no periódica.
- El denominador se forma con tantos nueves según el número de cifras del periodo y tantos ceros según el número de cifras de la parte no periódica.

Ejemplo: $0{,}1\widehat{6} = \frac{16-1}{90} = \frac{15}{90} = \frac{1}{6}$

Situación: Analizando decimales

Tres estudiantes observan los resultados en la calculadora y realizan las siguientes afirmaciones:



Estudiante	Afirmación
Gabriela	Como 1,68 tiene dos cifras decimales, su fracción generatriz es $\frac{42}{100}$, ya que $1{,}68 = \frac{42}{100}$.
Luis	Como $\frac{348}{99} = 3{,}515151\ldots$, es un decimal exacto.
María	Su fracción generatriz es correcta, pero el número 5,182222... es periódico puro, porque tiene infinitas cifras dos.

¿Quién o quiénes cometen errores en sus afirmaciones?, ¿por qué?

De las afirmaciones, tenemos lo siguiente:

- Gabriela se equivoca, porque $\frac{42}{100} = 0{,}42$; no 1,68. Por lo tanto, la fracción correcta es $\frac{168}{100} = \frac{42}{25}$.
- Luis también se equivoca, ya que $\frac{348}{99} = 3{,}515151\ldots$ es un decimal periódico puro.
- María acierta parcialmente. La fracción $\frac{1166}{225}$ es correcta; pero el número 5,182222... es periódico mixto, no puro, debido a que tiene una parte no repetitiva (5,18).

Del análisiis, concluimos que los tres estudiantes cometieron errores.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas (ejemplo: batería de celulares) que involucran números racionales, identifica patrones decimales, clasifícalos (exactos, puros, mixtos) y establece su relación con la fracción.
- Representa decimales como fracción generatriz y comunica la notación de cifras repetidas.
- Emplea procedimientos para hallar la fracción generatriz (exactos, puros, mixtos) con restas y denominadores.
- Justifica con ejemplos diferencias entre decimales, argumenta la validez de la fracción y sustenta las afirmaciones sobre los tipos de fracciones.

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES Y NOTACIÓN CIENTÍFICA

Adición y sustracción con números racionales

Situación: El reto diario de Juan

Juan caminó 1,25 km en la mañana y en la tarde 0,25 km más. Si su meta diaria era caminar 2 km, ¿cuánto le faltó recorrer?

Lo que caminó en la tarde: 0,25 km equivale a $\frac{1}{4}$ km.

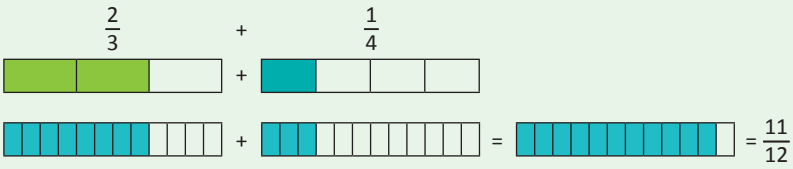
Total recorrido = 1,25 km + 0,25 km = 1,5 km $\left(\text{equivalente a } \frac{3}{2} \text{ km o } 1500 \text{ m}\right)$

Como la meta es 2 km = 2000 m, le falta recorrer 2000 – 1500 = 500 m.

De acuerdo con lo analizado, para la **adición o sustracción de fracciones**, si tienen el mismo denominador, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador. Si tienen denominadores distintos, se encuentra el mínimo común múltiplo (m. c. m.), luego se convierten las fracciones a equivalentes, se opera con los numeradores y, finalmente, se simplifica.

Ejemplo: $\frac{2}{3} + \frac{1}{4} = \frac{8}{12} + \frac{3}{12} = \frac{11}{12}$

La adición empleando diagrama de tiras.



Para **la adición o sustracción de números decimales**, es necesario alinear las cifras según la coma decimal.

- En la suma, se deben respetar los valores posicionales de cada cifra.
- En la resta, si es necesario, se completan con ceros las cifras faltantes y se opera de manera similar a los números enteros ubicando la coma en el lugar correspondiente.

Propiedad. Para todo a, b, c, d, e y $f \in \mathbb{Z}$ y b, d y $f \neq 0$, se cumple lo siguiente:

Propiedad	Adición
Clausura	La suma de dos racionales es racional: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$.
Conmutativa	$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$
Asociativa	$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$
Elemento neutro	$\frac{a}{b} + 0 = 0 + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
Inverso aditivo	Todo $\frac{a}{b}$ tiene un inverso aditivo $-\frac{a}{b}$ tal que $\frac{a}{b} + \left(-\frac{a}{b}\right) = 0$.

¿Sabías que...?

Las operaciones con números racionales permiten medir y optimizar el uso del agua en la agricultura sostenible, transformando ideas en acciones que reducen el impacto ambiental.

Recuerda

Aproximación por redondeo

Se considera el decimal hasta el orden indicado y se analiza la siguiente cifra:

- Si es igual o mayor que 5, la cifra previa se incrementa en 1.

  Ejemplo:

  Al redondear 2,36 al décimo, resulta 2,4.
- Si es menor que 5, la cifra previa se mantiene igual.

  Ejemplo:

  Al redondear 7,364 al centésimo, resulta 7,36.

Recuerda

Adición de decimales:

12,35 + 3,175 + 352,7

$$\begin{array}{r} 12,35 \quad + \\ 3,175 \\ \hline 352,7 \\ \hline 368,225 \end{array}$$

Sustracción de decimales:

14,8 – 9,326

Ceros agregados

$$\begin{array}{r} 14,800 - \\ 9,326 \\ \hline 5,474 \end{array}$$

Recuerda

Para multiplicar fracciones puedes proceder así:

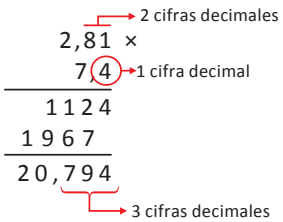
- $\frac{5}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{5 \times 1}{7 \times 2} = \frac{5}{14}$
- $\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{2 \times 3 \times 4}{3 \times 4 \times 5} = \frac{2}{5}$

Ten en cuenta

Para **multiplicar números decimales**, multiplícalos como si fueran enteros, **sin considerar las comas decimales**.

Luego, en el producto, **la coma decimal se desplaza desde la derecha** tantas cifras decimales como sumen los dos factores juntos.

Por ejemplo, al multiplicar 2,81 × 7,4 se obtiene



Para **dividir números decimales**, se multiplica al dividendo y al divisor por una misma potencia de 10, de manera que se eliminen las cifras decimales en ambos números. Finalmente, se dividen los números obtenidos.

Por ejemplo, al dividir

4,5 ÷ 0,15

$$4{,}5 \,\big|\, 0{,}15$$

Al multiplicar por 100 tenemos

$$450 \,\big|\, 15$$
$$45 \quad\; 30$$
$$-\,-\,0$$
$$0$$
$$-$$

Multiplicación y división con números racionales

Situación: Reparto de azúcar

Carmen tiene un saco de 67 kg de azúcar. Desea llenar bolsas que contenga $\frac{5}{4}$ de kilogramo cada una. ¿Cuántas bolsas que contengan $\frac{5}{4}$ kg de azúcar podrá llenar?



Para hallar la cantidad de bolsas, dividimos la cantidad total entre el peso de cada bolsa. Dividir entre una fracción es multiplicar por su inversa.

$$67 \div \frac{5}{4} = 67 \cdot \frac{4}{5} = \frac{268}{5} = 53{,}6 \text{ bolsas.}$$

Por lo tanto, Carmen podrá llenar 53 bolsas completas; el resto no alcanza para otra.

La experiencia anterior permite reconocer que en la **multiplicación de fracciones,** se multiplican los numeradores entre sí y los denominadores entre sí de ambas fracciones.

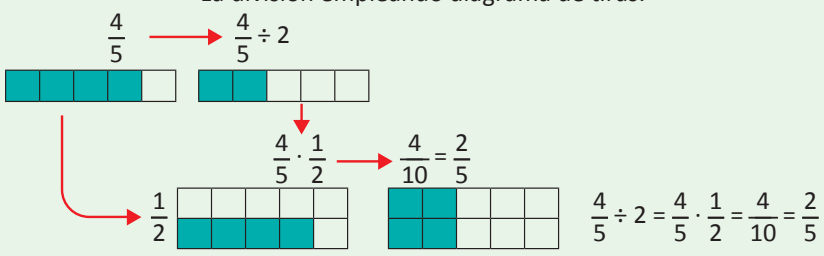
$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$

En la **división de fracciones**, se multiplica la fracción dividendo por el inverso de la fracción divisor.

$\frac{m}{n} \div \frac{p}{q} = \frac{m}{n} \cdot \frac{q}{p} = \frac{mq}{np}$, donde $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$, con $n, p, q \neq 0$.

Ejemplo:

La división empleando diagrama de tiras.



Propiedades. Para todo a, b, c, d, e y $f \in \mathbb{Z}$ y b, d y $f \neq 0$, se cumple lo siguiente:

Propiedad	Multiplicación
Clausura	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}$ (si $b, d \neq 0$)
Conmutativa	$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{c}{d} \times \frac{a}{b}$
Asociativa	$\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right) \times \frac{e}{f} = \frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} \times \frac{e}{f}\right)$
Elemento neutro	$\frac{a}{b} \times 1 = \frac{a}{b}$
Inverso multiplicativo	$\frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$, $a \neq 0$, $b \neq 0$
Distributiva (respecto de la suma)	$\frac{a}{b} \times \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} \times \frac{c}{d} + \frac{a}{b} \times \frac{e}{f}$

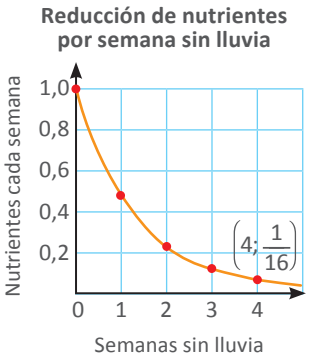
Potenciación con números racionales

Situación: Suelo fértil

Cada semana sin lluvia, el suelo pierde la mitad de sus nutrientes. ¿Qué fracción de los nutrientes quedará después de cuatro semanas sin lluvia?

Analicemos la siguiente tabla:

Semana	Nutrientes al inicio de cada semana	Explicación	Potencias
0	1	Se inicia con el 100 %.	$\left(\frac{1}{2}\right)^0$
1	$\frac{1}{2}$	Pierde la mitad.	$\left(\frac{1}{2}\right)^1$
2	$\frac{1}{4}$	Mitad de $\frac{1}{2}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3	$\frac{1}{8}$	Mitad de $\frac{1}{4}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
4	$\frac{1}{16}$	Mitad de $\frac{1}{8}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$



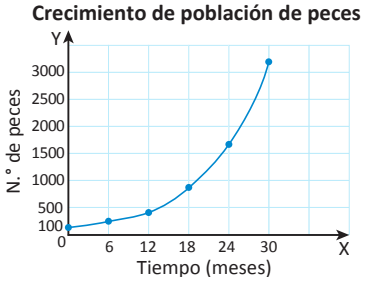
Por lo tanto, después de cuatro semanas, la fracción de nutrientes será $\frac{1}{16}$.

El análisis previo nos muestra que la **potenciación** consiste en multiplicar una misma base por sí misma tantas veces como indica el exponente.

Dado un número racional $\frac{a}{b}$ (donde $a, b \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$) y un exponente $n \in \mathbb{N}$, la potenciación se define así: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} \times \ldots \times \frac{a}{b}}_{n \text{ veces}} = \frac{a^n}{b^n}$; $(n \geq 1)$

Situación: Actividad en piscigranja

La imagen muestra el crecimiento de una población de peces. María afirma: "Si el crecimiento continúa al mismo ritmo, en 30 meses habrá exactamente 3200 peces". ¿Es correcto? Justifica tu respuesta.



La población se duplica cada seis meses.

Partiendo de 100 peces, en cinco duplicaciones habrá 3200. La afirmación es correcta para este valor inicial, pero en crecimiento exponencial discreto no se puede predecir con exactitud para periodos intermedios. En la tabla:

Meses	0	6	12	18	24	30
Duplicación	0	1	2	3	4	5
Total de peces	100	200	400	800	1600	3200

Recuerda

Propiedades de la potenciación

Sean $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

- $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$
- $\left(\left(\frac{a}{b}\right)^m\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \times n}$
- $\left(\frac{a}{b} \times \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \times \left(\frac{c}{d}\right)^m$
- $\left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m \div \left(\frac{c}{d}\right)^m$
- $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Aplicación de las propiedades de potenciación

- $\left(\frac{3}{4}\right)^1 = \frac{3}{4}$
- $\left(\frac{5}{7}\right)^0 = 1$
- $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^5$
- $\left(\frac{3}{5}\right)^4 \div \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{5}\right)^2$
- $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^3\right)^2 = \left(\frac{2}{5}\right)^6$
- $\left(\frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^2$
- $\left(\frac{6}{7} \div \frac{2}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{7}\right)^3 \div \left(\frac{2}{5}\right)^3$
- $\left(\frac{4}{9}\right)^{-2} = \left(\frac{9}{4}\right)^2$

Ten en cuenta

Multiplicación y división. Para multiplicar o dividir números expresados en notación científica, se desarrolla por separado con la mantisa y la potencia de 10.

$$(a \times 10^n)(b \times 10^m) = a \times b \times 10^{n+m}$$

$$\frac{a \times 10^n}{b \times 10^m} = \frac{a}{b} \times 10^{n-m},\ b \neq 0$$

Ejemplos:

- $(1{,}6 \times 10^5)(2{,}3 \times 10^{-2}) = 3{,}68 \times 10^3$
- $(4{,}9 \times 10^{-3}) \div (1{,}4 \times 10^{-6}) = 3{,}5 \times 10^3$

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas (ejemplo: planetas) que involucran relaciones de distancias, repartos con fracciones, decimales y notación científica.
- Expresa números en notación científica y número racional, y representa operaciones (adición) con diagramas.
- Emplea procedimientos para operar números racionales, y aplica reglas de notación científica (mantisas, exponentes).
- Justifica propiedades operativas, evalúa comparaciones en notación científica y sustenta conclusiones.

Notación científica

Situación: Midiendo lo inmenso

De acuerdo con la imagen, ¿cómo se puede representar la distancia en metros de la Tierra al Sol usando notación científica y notación exponencial?



Para representar la distancia de la Tierra al Sol, empleamos notación científica: $150\,000\,000\,000 = 1{,}5 \times 10^{11}$ m, y notación exponencial: $150\,000\,000\,000 = 15 \times 10^{10}$ m.

De lo observado en la situación previa, concluimos que la **notación científica** es una representación matemática compuesta por un número llamado mantisa y una potencia de base 10, donde a es un número real diferente de cero, tal que $1 \leq |a| < 10$, $n \in \mathbb{Z}$.

$a \times 10^n$

- a: Mantisa, $1 \leq |a| < 10$ y $a \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$
- 10^n: Potencia de base 10 con exponente entero

Ejemplo:

Números grandes	Números pequeños
$145\,000\,000 = 1{,}45 \times 10^8$ Al mover la coma a la izquierda, el exponente de la base 10 es positivo.	$0{,}000\,000\,00108 = 1{,}08 \times 10^{-9}$ Al mover la coma a la derecha, el exponente de la base 10 es negativo.

Adición y sustracción. Para la adición o sustracción de dos números en notación científica, primero nos aseguramos de que ambos tengan la misma potencia de 10. Si no coinciden, ajustamos uno de los números para que las potencias sean iguales. Luego, sumamos o restamos las mantisas y conservamos la potencia de 10. Finalmente, es necesario normalizar el resultado si el valor de $|a|$ queda fuera de $1 \leq |a| < 10$.

$$a_1 \times 10^n \pm a_2 \times 10^n = (a_1 \pm a_2) \times 10^n$$

Al realizar la adición: $4 \times 10^8 + 3 \times 10^8 = 7 \times 10^8$

Al realizar la sustracción: $8{,}1 \times 10^6 - 4{,}2 \times 10^6 = 3{,}9 \times 10^6$

Situación: Distancias universales

De la información se afirma: "Urano está más lejos del Sol que Neptuno, porque 287 es mayor que 45". ¿Es correcta la afirmación?

Planetas	Distancia al Sol
Urano	287×10^7 km
Neptuno	45×10^8 km
Tierra	$14{,}9 \times 10^7$ km

Expresamos en notación científica y comparamos:

Urano: $287 \times 10^7 = 2{,}87 \times 10^9$

Neptuno: $45 \times 10^8 = 4{,}5 \times 10^9$

Como $4{,}5 > 2{,}8$; Neptuno está más lejos del Sol.

Por lo tanto, la afirmación no es correcta, ya que se compararon las cantidades sin unificar potencias.

PROGRESIÓN GEOMÉTRICA (P. G.)

Suma de términos de una P. G. (S_n)

Situación: Gotas de suero

Cada minuto, una máquina libera la mitad de suero que liberó el minuto anterior. Si en el primer minuto se liberan 80 mL, ¿cuánto suero se habrá acumulado en total al cabo de 6 min?

La primera dosis es de 80 mL y la razón es $r = \frac{1}{2}$. Como el volumen disminuye a la mitad cada minuto, se forma una sucesión decreciente.

N.° de minuto	1	2	3	4	5	6
Suero liberado (mL)	80	40	20	10	5	2,5

Se tiene que el suero liberado es $S = 80 + 40 + 20 + 10 + 5 + 2{,}5 = 157{,}5$ mL.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que la **suma de términos** de una progresión geométrica se obtiene mediante $S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right)$, con $r \neq 1$ y $n \in \mathbb{N}$. Su demostración es la siguiente:

Sea la P. G.	$a_1, a_1r, a_1r^2, a_1r^3, a_1r^4, \ldots, a_1r^{n-1}$
Se escribe la suma.	$S_n = a_1 + a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + \ldots + a_1r^{n-1}$
Se multiplica por *r*.	$r \cdot S_n = a_1r + a_1r^2 + a_1r^3 + a_1r^4 + a_1r^5 + \ldots + a_1r^n$
Se restan ambas ecuaciones.	$S_n - S_nr = a_1 - a_1r^n$
Se factoriza y despeja.	$S_n = a_1\left(\frac{1-r^n}{1-r}\right),\ r \neq 1$

Ejemplo:

En la P. G., 3; 6; 12; 24; 48; ...; $a_1 = 3$; $r = 2$ y $n = 12$.

Entonces $S_n = 3 \cdot \left(\frac{1-2^{12}}{1-2}\right) = 12\,285$.

Situación: ¿Toda suma infinita es posible?

Se afirma que toda P. G. infinita tiene una suma finita. ¿Es esto siempre cierto? Justifica tu respuesta con ejemplos y procedimientos.

La afirmación es falsa. Solo cuando $|r| < 1$, una progresión geométrica infinita tiene suma finita. En otros casos, la suma no existe o diverge. Observa la tabla.

Caso	Ejemplo	Comportamiento	¿Tiene suma finita?
$0 < r < 1$	$a_1 = 100$; $r = 0{,}5$	Los términos decrecen y se acercan a 0.	Sí, $S = \frac{a_1}{1-r} = 200$
$r > 1$	$a_1 = 2$; $r = 2$	Los términos crecen indefinidamente.	No, S es divergente
$r < -1$	$a_1 = 1$; $r = -2$	Los términos oscilan (alternantes divergentes).	No, no tiene límite definido (diverge).
$-1 < r < 0$	$a_1 = 5$; $r = -0{,}5$	Los términos alternan y se acercan a 0.	Sí, $S = \frac{a_1}{1-r} = \frac{10}{3}$

Recuerda

La fórmula general de una P. G. es la siguiente:

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

donde

- a_1: primer término
- r: razón geométrica
- n: lugar que ocupa el término
- a_n: enésimo término

Recuerda

La suma de una P. G. infinita es posible solo si la razón cumple

$$-1 < r < 1$$

Cuando $0 < r < 1$, y n es lo suficientemente grande, entonces, $r^n \to 0$ (tiende a cero).

Así, la fórmula de la suma finita se convierte en

$$S = \frac{a_1}{1-r}$$

Esto ocurre cuando al aumentar mucho n, los términos se vuelven cada vez más pequeños hasta ser prácticamente cero.

Ten en cuenta

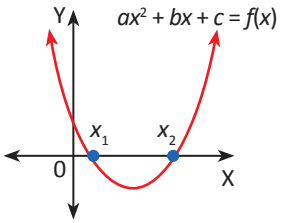
$|r| < 1 \Leftrightarrow -1 < r < 1$

Practica valores

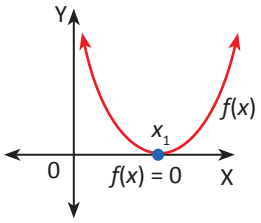
- Propone ideas en clase para proteger a los animales y ecosistemas cercanos a la escuela.
- Promueve el aprendizaje entre pares y aprende de los saberes tradicionales de sus compañeros.

Ten en cuenta

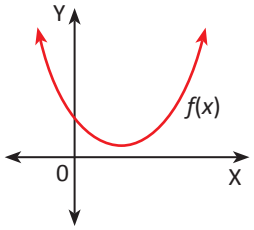
El número de soluciones reales de una ecuación cuadrática ($ax^2 + bx + c = 0$) se determina a partir del análisis del discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$).
Si $\Delta > 0$, tiene dos raíces reales diferentes. Geométricamente son las intersecciones de la parábola con el eje X.



Si $\Delta = 0$, tiene dos raíces que coinciden y representa un solo corte con el eje X.



Si $\Delta < 0$, no tiene raíces reales y la parábola no corta el eje X.



TIC

ECUACIONES CUADRÁTICAS

Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Situación: Ingresos de un espectáculo

Una empresa vende entradas por S/10 y coloca 100 unidades. Por cada sol que sube al precio, vende cinco entradas menos. ¿Cuál debe ser el aumento en el precio para recaudar exactamente S/1120?



Para explorar la variación de precio y la cantidad de entradas vendidas, completamos la siguiente tabla:

Aumento (S/) (x)	Precio (S/) ($10 + x$)	Entradas vendidas (u) ($100 - 5x$)	Ingreso total (S/) $(10 + x)(100 - 5x)$
0	10	100	1000
1	11	$100 - 5(1) = 95$	1045
2	12	$100 - 5(2) = 90$	1080
3	13	$100 - 5(3) = 85$	1105
4	14	$100 - 5(4) = 80$	1120 ✓
5	15	$100 - 5(5) = 75$	1125
6	16	$100 - 5(6) = 70$	1120 ✓
7	17	$100 - 5(7) = 65$	1105

De la tabla, observamos que en el 4.º o en el 6.º aumento es posible lograr el ingreso de S/1120. Por tanto, el precio ideal puede ser S/14 o S/16.

De acuerdo con lo analizado, una **ecuación cuadrática** tiene la forma general: $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.

El número de soluciones reales lo determina el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.

Situación: El reto de las raíces imposibles

Un estudiante afirma: "Si una ecuación cuadrática no tiene raíces reales, entonces no tiene solución". ¿Es correcto? Justifica tu respuesta.

El discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$ indica el tipo de soluciones de una ecuación cuadrática. Si $\Delta < 0$, no hay soluciones reales, pero sí hay dos soluciones complejas conjugadas en el conjunto de los números complejos ($\mathbb{C}$). Por ejemplo, para $x^2 + 4x + 5 = 0$, tenemos que $\Delta = 4^2 - 4(1)(5) = 16 - 20 = -4 < 0$.

Al emplear la fórmula general: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$,

tenemos que $x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$

Por tanto, se reconoce que la ecuación (en $\mathbb{R}$) no tiene soluciones reales, ya que no existe la raíz cuadrada de un número negativo. Tiene dos soluciones en $\mathbb{C}$.

Resolución con el método de factorización y completando cuadrados

Situación: Marco de fotografía

Un marco rectangular tiene un área de 168 cm². Su alto mide 2 cm más que su ancho. ¿Cuáles son sus dimensiones?



Completamos una tabla con diferentes valores de ancho y su respectiva altura para ver cuál da un área cercana a 168 cm².

Ancho (cm)	Alto (cm) = ancho + 2	Área = ancho × alto
10	12	120
11	13	143
12	14	168 ✓
13	15	195

Cuando el ancho es 12 cm y el alto es 14 cm, el área es exactamente 168 cm².

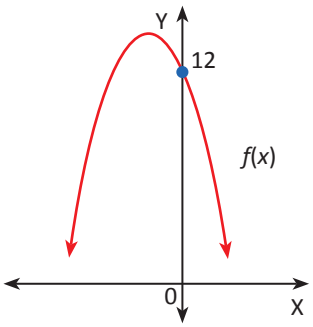
El problema resuelto ilustra que una **ecuación cuadrática** $ax^2 + bx + c = 0$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, tiene solución en el conjunto de los números reales si su discriminante $\Delta \geq 0$.

Para ello se cumple lo siguiente:

- Expresamos $ax^2 + bx + c$ como el producto de dos factores usando una técnica adecuada. Los factores obtenidos deben tener la forma de $(mx + n)$ y $(px + q)$.
- $\forall\, a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \cdot b = 0 \Leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$. En ese sentido, si $(mx + n)(px + q) = 0$, entonces $mx + n = 0$ o $px + q = 0$.

Situación: ¿Cruza o no cruza?

Al analizar la función cuadrática $f(x) = -4x^2 - 8x + 12$, un estudiante dijo: "Como el vértice de la parábola se encuentra por encima del eje X, la parábola no corta al eje X. Por lo tanto, la ecuación cuadrática no tiene soluciones reales". ¿Estás de acuerdo con esa afirmación? Justifica tu respuesta.



La afirmación es incorrecta. Para saber si la parábola cruza el eje X, es suficiente con resolver la ecuación cuadrática igualando a cero.

Aplicamos el método de factorización.

$f(x) = -4x^2 - 8x + 12 = -4(x^2 + 2x - 3) = -4(x + 3)(x - 1) = 0$

Al igualar a cero $(x + 3)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = -3$ o $x = 1$.

Por lo tanto, la parábola sí cruza el eje X en esos dos puntos.

Recuerda

Resolvemos la ecuación por factorización.

$x^2 + 5x - 24 = 0$

$x \cdot 8 = 8x$

$x \cdot -3 = -3x$

$5x$

Luego

$(x + 8)(x - 3) = 0$

Igualamos cada factor a cero.

$x = -8 \vee x = 3$

Finalmente, el conjunto solución es C. S. = {–8; 3}.

Ten en cuenta

¿Cómo resolver una ecuación completando cuadrados?

Ejemplo: $2x^2 + 8x - 10 = 0$

Dividimos entre 2 para que el coeficiente de x^2 sea 1.

$x^2 + 4x - 5 = 0$

Pasamos el término independiente al otro miembro.

$x^2 + 4x = 5$

Completamos el trinomio cuadrado perfecto: la mitad de 4 es 2, su cuadrado es 4. Sumamos 4 a ambos miembros.

$x^2 + 4x + 4 = 5 + 4 \Rightarrow (x + 2)^2 = 9$

Los valores que cumplen con la igualdad son $x = 1$ o $x = -5$

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran ecuaciones cuadráticas, traduce datos a coeficientes, representa la parábola y explica el significado de raíces y cortes en el eje X.
- Emplea estrategias para la resolución de una ecuación cuadrática, obtén el discriminante, y justifica soluciones reales.

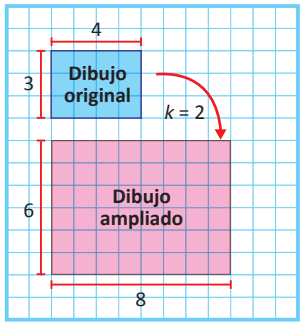
¿Sabías que...?

Las escalas lineales permiten elaborar mapas precisos (1 cm = 10 m) para planificar el uso eficiente del terreno y del riego, fortaleciendo decisiones y prácticas sostenibles en la gestión responsable de los recursos.

Recuerda

Una **escala de ampliación** incrementa proporcionalmente el tamaño de una figura manteniendo su forma original. Esto se logra multiplicando sus medidas de la figura por un factor de escala k, tal que $k > 1$.

Por ejemplo, en la imagen, el factor es $k = 2$; por tanto, duplica las dimensiones de la figura.



Practica valores

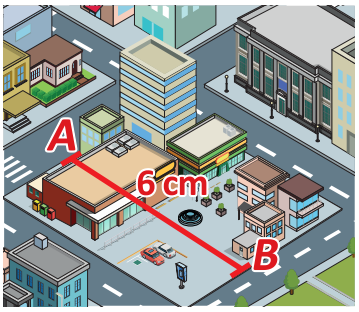
- Participa en el cuidado de jardines o huertos escolares.
- Promueve el intercambio de experiencias culturales durante ferias y exposiciones institucionales.

ESCALA

Escala de reducción y ampliación

Situación: Midiendo la realidad a escala

En un plano, cuya escala es 1:4000, la distancia que existe entre la calle *A* y la calle *B* es de 6 cm. ¿Cuál es la distancia real entre estas calles?



La distancia real entre las dos calles la podemos determinar de la siguiente forma:

Sea x la distancia real (en cm); la escala como razón es:

$$\frac{\text{medida en el plano}}{\text{medida real}} = \frac{1}{4000}$$

Obtenemos $\frac{6}{x} = \frac{1}{4000}$

$6(4000) = x \Rightarrow x = 24\,000$ cm $= 240$ m.

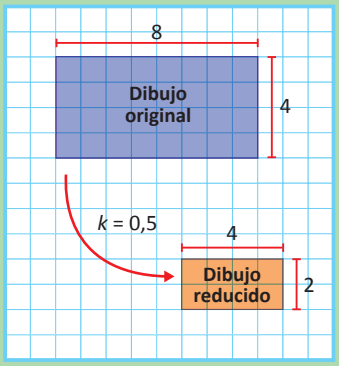
Por lo tanto, la distancia entre las calles es de 24 000 cm = 240 m.

Nota: $\frac{1}{4000}$ significa que 1 cm en el mapa es igual 4000 cm en la realidad (40 m).

De acuerdo con lo analizado, una **escala de reducción** disminuye proporcionalmente el tamaño de una figura sin cambiar su forma multiplicando cada medida por un factor k, donde $0 < k < 1$.

Este factor k representa la relación entre cada medida de la figura reducida y la correspondiente de la figura original.

Por ejemplo, en la imagen, el factor es $k = \frac{\text{lado reducido}}{\text{lado original}} = 0{,}5$; las dimensiones se reducen a la mitad.



Equivalencias: $k = 0{,}5 \Leftrightarrow 1{:}2$

$k = 2 \Leftrightarrow 2{:}1$

Situación: *Zoom* microscópico: ¿multiplicar o dividir?

Se afirma que, para determinar el tamaño real de un objeto en una escala de ampliación, basta con multiplicar la medida de la imagen por el factor de escala. ¿Esta afirmación es correcta? Justifica tu respuesta utilizando ejemplos o contraejemplos.

En una escala de ampliación, no debemos multiplicar la medida de la imagen para obtener el tamaño real, sino **dividir entre el factor de escala**, ya que la imagen es más grande que el objeto.

Por ejemplo, si una bacteria mide 3,8 cm en una imagen a escala 20 000:1, su tamaño real es $\frac{3{,}8}{20\,000} = 0{,}00019$ cm.

Multiplicar en lugar de dividir daría un resultado absurdo (760 m), incompatible con el tamaño real de una bacteria.

Mapas: curvas de nivel y distancias

Situación: Interpretación de curvas de nivel

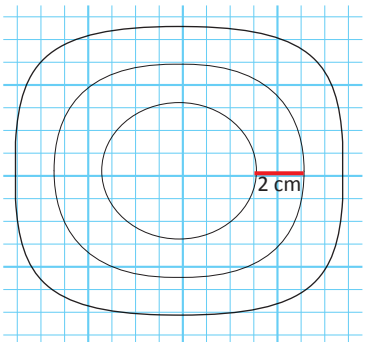
En un mapa a escala 1:25 000, dos curvas de nivel están separadas por 2 cm. ¿Qué distancia real hay entre esas curvas?

Una escala 1:25 000 indica que 1 cm en el mapa equivale a 25 000 cm en la realidad. Si la distancia en el mapa es de 2 cm, la distancia real es

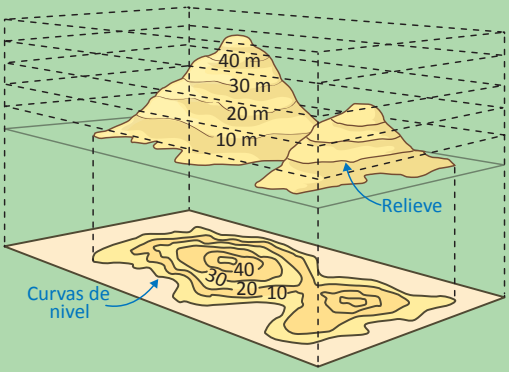
$$2 \times 25\,000 = 50\,000 \text{ cm} = 500 \text{ m}$$

Por lo tanto, la distancia real horizontal entre las curvas de nivel es de 500 m. Este valor permite planificar rutas, estudios geográficos o proyectos de construcción en el área.

Curvas de nivel



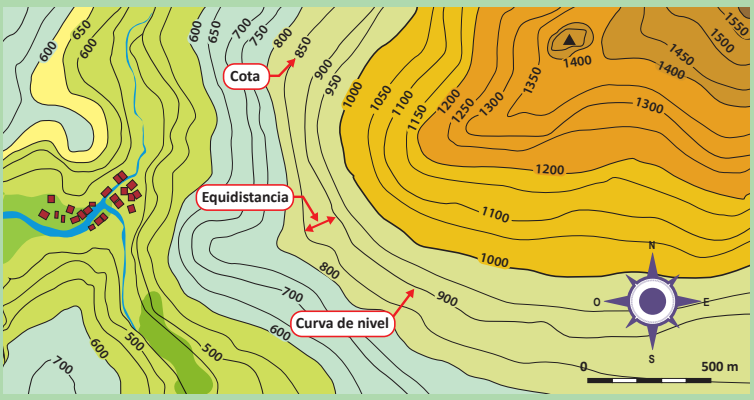
La experiencia anterior permite reconocer que las **curvas de nivel** son líneas en un mapa topográfico que unen puntos del terreno que tienen la misma altitud sobre el nivel del mar. Su principal finalidad es representar el relieve del terreno en dos dimensiones.



Al observar un conjunto de curvas de nivel, se cumple lo siguiente:

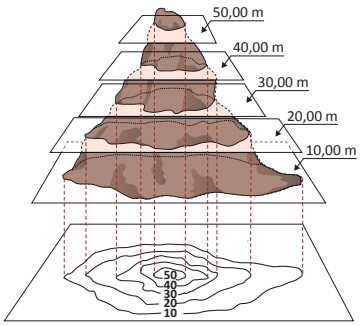
- Si las líneas están muy juntas, indica que el terreno es empinado.
- Si están separadas, el terreno es más plano o suave.
- Cada curva tiene un valor numérico que representa la altitud en metros o pies (cotas).
- La equidistancia es la diferencia de altitud constante entre dos curvas de nivel sucesivas.

En la imagen se muestran algunos elementos de curva de nivel.



¿Sabías que...?

La sección vertical de un relieve es una representación del terreno a lo largo de una línea específica, lo cual permite entender su forma tridimensional. Es esencial en cartografía y estudios del entorno natural.



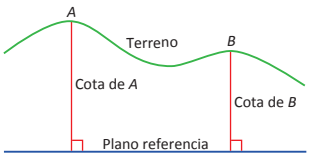
Esta se dibuja para representar intervalos de altura regulares que son equidistantes entre sí sobre un plano de referencia.

Ten en cuenta

Un mapa topográfico es una representación detallada y escalada de la superficie terrestre que incluye características naturales, como montañas, ríos y valles.

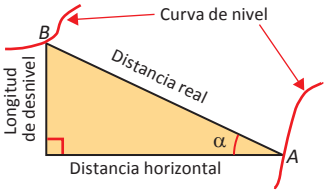
¿Sabías que...?

La cota es la altura de un punto respecto a un plano de referencia horizontal, normalmente el nivel del mar. En mapas topográficos, las curvas de nivel unen puntos que comparten la misma cota.



Recuerda

Distancia real. Es la separación entre dos puntos sobre el terreno considerando desniveles. Se calcula mediante el teorema de Pitágoras.



Distancia horizontal. Es la separación de dos puntos proyectados sobre un plano horizontal (mapa). Representa la medida "vista desde arriba" del terreno.

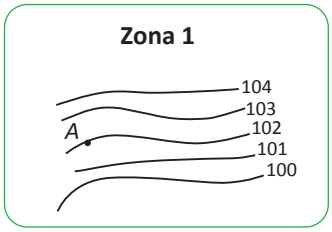
Longitud de desnivel (distancia vertical). Es la diferencia de altitud entre dos puntos del terreno. Se obtiene restando las cotas (altura en cada punto).

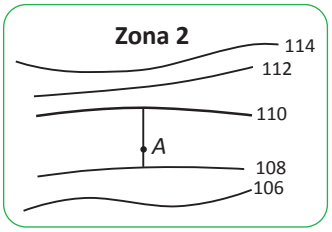
Pendiente. Se obtiene dividiendo la longitud del desnivel entre la distancia horizontal; es decir

m = pendiente $= \dfrac{\text{Longitud del desnivel}}{\text{Distancia horizontal}}$

Situación: Altura y distancia en curvas de nivel

Mariela y Juan analizan curvas de nivel en un mapa a escala 1:5000.





En la Zona 1, el punto *A* se encuentra sobre una curva de nivel con cota 102 m. En la Zona 2, el punto *A* está ubicado entre las curvas de nivel de 108 m y 110 m.

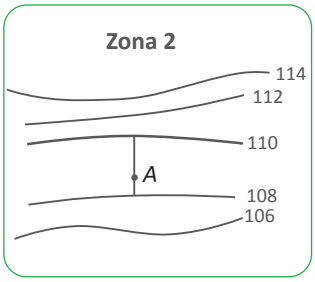
Luego, cada uno menciona lo siguiente:

- Mariela: "Como el punto *A* está sobre la curva de nivel 102, su cota es 102".
- Juan: "Como el punto *A* está entre las curvas 108 y 110, su cota debe ser 109, porque está entre esos dos valores, y la pendiente del terreno parece elevada".

¿Ambas afirmaciones son correctas? Justifica tu respuesta.

La afirmación de Mariela es correcta: si el punto está sobre una curva de nivel, su cota es igual al valor de esa curva (por ejemplo, 102 m).

La afirmación de Juan es incorrecta: aunque el punto esté entre las curvas 108 y 110, no se puede asumir que su cota sea 109, ya que podría no estar a la misma distancia de ambas curvas.

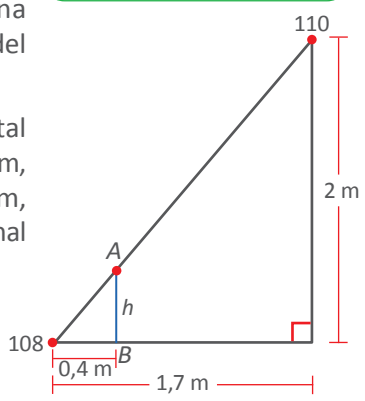


En ese caso, para hallar la cota, usamos una interpolación lineal considerando la distancia del punto respecto a las curvas.

Por ejemplo, si en el mapa la distancia horizontal entre las curvas de nivel 108 m y 110 m es de 1,7 cm, y el punto *A* se ubica a 0,4 cm de la curva 108 m, entonces su cota se calcula de manera proporcional mediante interpolación lineal.

$$\frac{h}{0{,}4} = \frac{2}{1{,}7} \Rightarrow 0{,}4 \times \frac{2}{1{,}7} \approx 0{,}47$$

$\Rightarrow$ Cota de A = 108 + 0,47 = 108,47 m



Para calcular la pendiente, convertimos la distancia horizontal del mapa a metros usando la escala 1:5000, que significa que cada centímetro equivale 50 m.

- Distancia horizontal = 1,7 cm × 50 = 85 m
- Longitud de desnivel = 2 m

Por tanto, la pendiente es la siguiente:

$$m = \frac{\text{Longitud del desnivel}}{\text{Distancia horizontal}} = \frac{2\text{ m}}{85\text{ m}} = 0{,}024$$

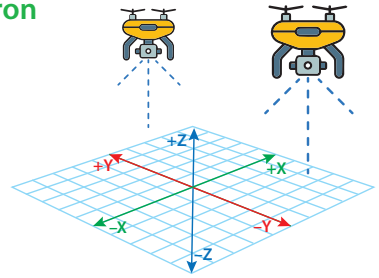
Este valor indica que, por cada metro horizontal que avanzamos sobre el terreno, la altura aumenta aproximadamente 0,024 m (2,4 cm). Entonces, es una pendiente muy suave y cercana a cero, por lo que la suposición de Juan de que "la pendiente parece elevada" es incorrecta.

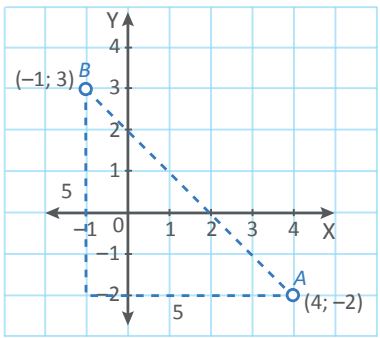
LOCALIZACIÓN Y MOVIMIENTO EN EL PLANO Y EL ESPACIO

Distancia entre dos puntos y punto medio de un segmento

Situación: Distancia recorrida por un dron

Dos drones terrestres se mueven en trayectorias diferentes. Uno se encuentra en el punto $A(4; -2)$ y el otro en el punto $B(-1; 3)$. ¿Cuál es la distancia que los separa en el plano cartesiano bidimensional?





Para calcular la distancia entre los dos drones, usamos el teorema de Pitágoras.

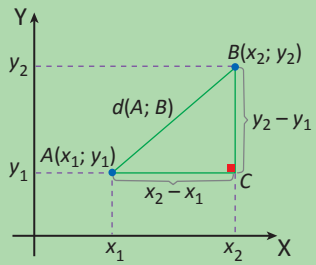
$d = \sqrt{[4 - (-1)]^2 + (-2 - 3)^2}$

$d = \sqrt{(5)^2 + (-5)^2}$

$d = \sqrt{50} = \sqrt{2(25)} = 5\sqrt{2}$

Por lo tanto, la distancia que separa a los dos drones es de $5\sqrt{2}$ unidades.

El análisis previo nos muestra que la **distancia entre los puntos** A y B del plano cartesiano se calcula usando el teorema de Pitágoras y las coordenadas de esos puntos.



Si $A(x_1; y_1)$ y $B(x_2; y_2)$, entonces la distancia entre ellos es $d(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, $d(A; B) \geq 0$.

La hipotenusa del triángulo rectángulo formado, es la distancia entre los puntos.

Situación: Optimización del riego en un campo agrícola

Un estudiante necesita calcular la distancia entre el punto $A(5; 12)$ y el punto $B(-3; 4)$. Su procedimiento es el siguiente:

$$d = \sqrt{(5 - 3)^2 + (-12 - 4)^2} = \sqrt{2^2 + (-16)^2} = \sqrt{4 + 256} = \sqrt{260} \approx 16{,}12 \text{ km}$$

¿El desarrollo presentado contiene algún error?

Para calcular la distancia entre dos puntos, restamos sus coordenadas, elevamos al cuadrado y extraemos la raíz cuadrada.

El error está en restar la coordenada X, ya que interpretó –3 como +3. Por tanto, la resta correcta es 5–(–3) = 8 y no 5 – 3 = 2. Así como tomar –12 en lugar de 12.

El cálculo correcto da una distancia aproximada de 11,31 km, no 16,12 km como en el intento inicial.

Recuerda

La distancia de $A = (3; 2)$ y $B = (7; 5)$ se calcula así:

$d = \sqrt{(7 - 3)^2 + (5 - 2)^2}$

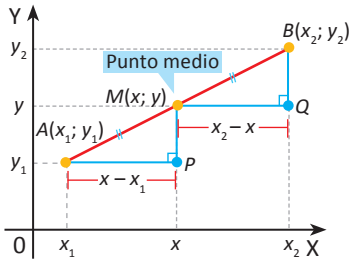
$d = \sqrt{16 + 9} = 5$

El **punto medio de un segmento** es el que está a igual distancia de los extremos de un segmento y lo divide en dos partes iguales.

Si $A = (x_1; y_1)$ y $B = (x_2; y_2)$, entonces su punto medio es

$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}; \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$.

Gráficamente



Evalúa tus progresos

- Establece las relaciones (distancias) en plano o mapa, usa fórmula y escala, y fija la relación escala-distancia real.
- Expresa la altitud o pendiente (curvas de nivel), representa la distancia y comunica las distancias equivalentes (escala).
- Emplea procedimientos para hallar la distancia (longitudes), usa la escala (distancia real) y aplica la interpolación.
- Justifica las rutas considerando las pendientes, argumenta su validez y evalúa los factores que influyen en la escala.

Actividad lúdica



¡Explora jugando! Usa las reglas del juego, elabora tus estrategias y da sentido matemático a tus acciones.

Caza de ceros: notación científica con dados y moneda

1. Situación

Los científicos han descubierto un tesoro matemático protegido por un enigma: la notación científica. Al usar dados y una moneda, los estudiantes deben formar números en notación científica para desbloquear el conocimiento perdido. ¡Prepárate para la caza de ceros!



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Participantes: Juego individual o en equipos de 2 a 4 estudiantes

b. Materiales por equipo:

- 4 dados normales (6 caras)
- 1 moneda (cara/sello)
- Hoja de registro o tabla
- Lápiz o lapicero
- Calculadora (opcional)

c. Formación del número:

- Lanzar los dados
  - Dados *A* y *B*: forman el número significativo (dos cifras distintas de cero).
  - Su suma indica cuántos ceros colocar entre el punto y el primer dígito si el número es menor que 1, o cuántos ceros agregar al final si el número es mayor que 1.
- Lanzar la moneda
  - Sale sello: Considerar exponente negativo, insertar tantos ceros decimales como indica la suma de los dados $C + D$.
  - Sale cara: Considerar exponente positivo, agregar la suma de los dados $C + D$ como ceros a la derecha del número significativo.
- Expresar el número en notación científica
  - Ajustar a la forma $a \times 10^n$, donde $1 \leq a < 10$.

Tu propósito de aprendizaje

Establece relaciones entre números muy grandes o muy pequeños, utiliza la notación científica, y expresa correctamente el número significativo y el exponente. Emplea estrategias y procedimientos para hallar el valor del exponente, ya sea positivo o negativo, a partir de la suma de los valores de los dados, justifica la aplicación de las reglas de la notación científica y sustenta la conversión del número decimal.

Practica valores

- Participa en jornadas ecológicas junto a docentes y estudiantes para mantener limpia la institución.
- Fomenta la empatía y el respeto mutuo en conversaciones sobre la identidad cultural.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: Lancen los dados y la moneda para expresar un número menor que 1.

Ejemplo: $A = 5$; $B = 2$; $C = 3$; $D = 2$. Sale sello.

Resultado: $0{,}0000052 = 5{,}2 \times 10^{-6}$

Desafío 2: Lancen los dados y la moneda para expresar un número mayor que 1.

Ejemplo: $A = 4$; $B = 2$; $C = 3$; $D = 4$. Sale cara.

Resultado: $420\,000\,000 = 4{,}2 \times 10^{8}$

Desafío 3: Lancen los dados y la moneda para expresar un número que sea múltiplo de 5 o mayor que 10^6. ¿Qué valor tendrá el exponente?

Ejemplo: $A = 5$; $B = 5$; $C = 6$; $D = 1$. Sale sello.

Resultado: $0{,}000000055 = 5{,}5 \times 10^{-8}$. Por tanto, es múltiplo de 5.

Ejemplo: $A = 4$; $B = 2$; $C = 3$; $D = 4$. Sale cara.

Resultado: $420\,000\,000 = 4{,}2 \times 10^{8}$. Por tanto, es mayor que 10^6.

Condiciones adicionales opcionales (retos extra)

- El número significativo debe tener la suma de sus cifras mayor que 10.
- El exponente debe ser exactamente ±3; ±6; etc.
- El número debe tener al menos dos ceros en su escritura (antes o después del punto).
- Convertir el número a forma exponencial de base distinta a 10 (por ejemplo, 2^n) si es posible.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. Revisa los números que generaste con tu equipo durante la actividad y regístralos en la tabla de notación científica.

b. Identifica cuáles números eran menores que 1 y cuáles mayores que 1, y verifica que los exponentes sean correctos según el resultado de la moneda.

c. Analiza cada número formado y su notación científica. ¿El número significativo y el exponente fueron aplicados correctamente?

d. Reflexiona sobre los retos adicionales. ¿Lograste formar números con la suma de cifras mayor que 10, con al menos dos ceros o con exponentes específicos?

e. ¿Qué combinación de dados y elección de moneda permitió obtener los números más grandes o más pequeños?

f. Comparte con tu equipo los aciertos y los errores, y discutan cómo mejorar la aplicación de la notación científica en situaciones similares.

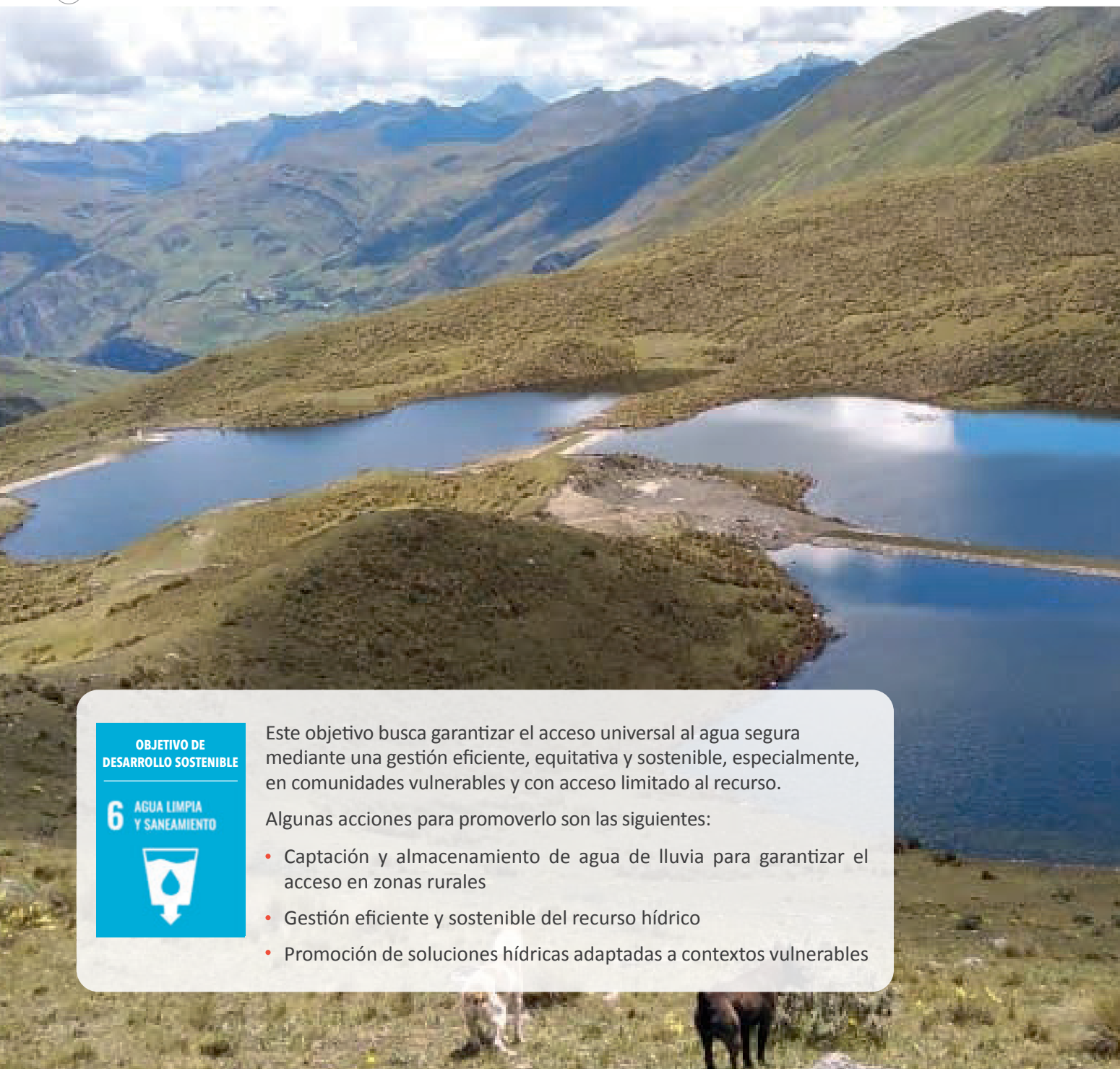
Evalúa tus progresos

- Representa números grandes o pequeños mediante relaciones expresadas en forma exponencial, e identifica el número significativo y la magnitud del exponente positivo o negativo a partir de los valores obtenidos.
- Representa y expresa los números en notación científica $a \times 10^n$, y determina el número significativo y el signo del exponente.
- Emplea procedimientos y estrategias para convertir entre forma decimal o notación científica identificando el valor y el signo del exponente.
- Justifica la aplicación de las reglas de la notación científica, y argumenta con ejemplos por qué un número generado debe tener un exponente positivo o negativo según la posición del punto decimal.

UNIDAD

2

Diseñamos soluciones para recolectar agua de lluvia y aprovecharla en zonas rurales



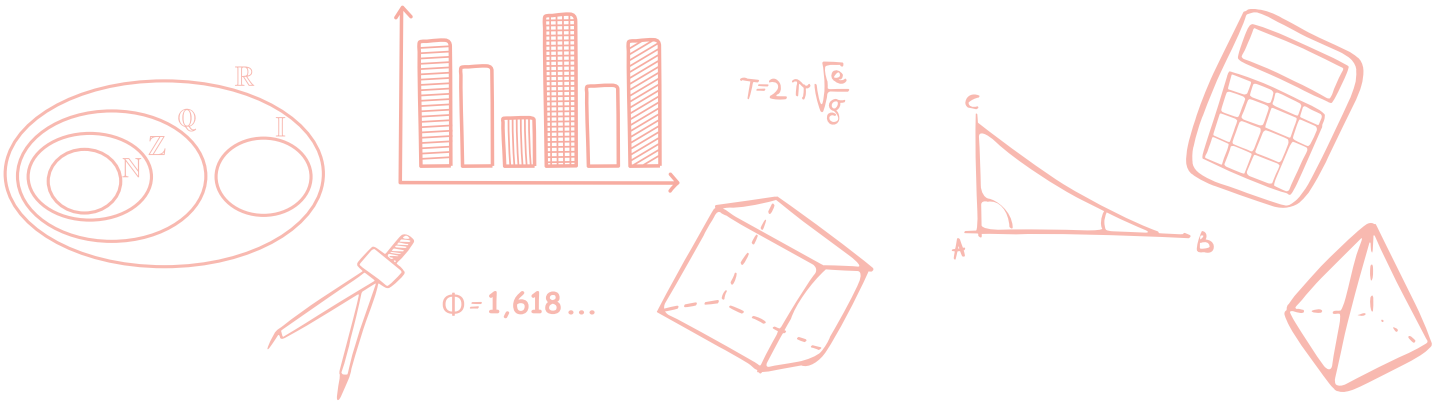
OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

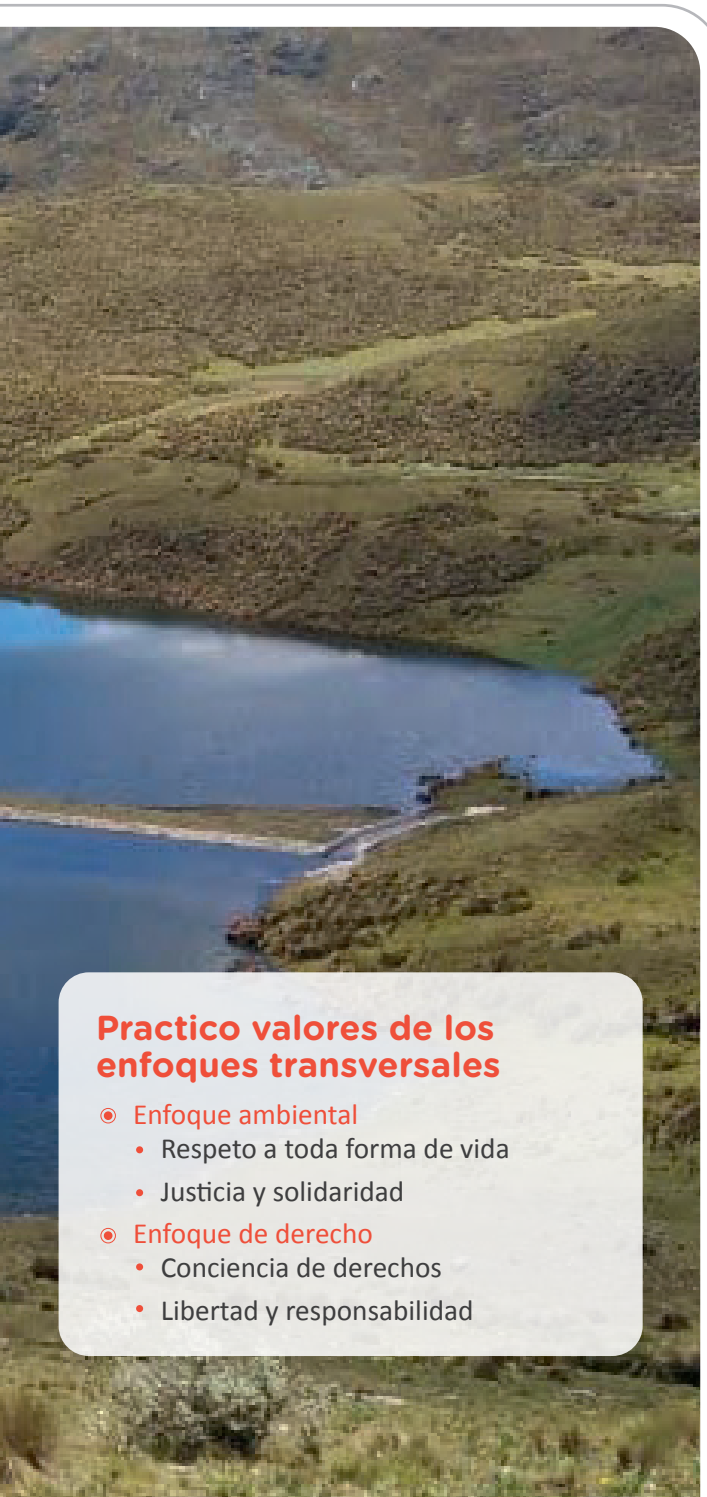
6 AGUA LIMPIA Y SANEAMIENTO

Este objetivo busca garantizar el acceso universal al agua segura mediante una gestión eficiente, equitativa y sostenible, especialmente, en comunidades vulnerables y con acceso limitado al recurso.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Captación y almacenamiento de agua de lluvia para garantizar el acceso en zonas rurales
- Gestión eficiente y sostenible del recurso hídrico
- Promoción de soluciones hídricas adaptadas a contextos vulnerables





Fuente: Agro Perú (2023).

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque de derecho
  - Conciencia de derechos
  - Libertad y responsabilidad

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construyo mis conocimientos

Magnitudes derivadas

- Velocidad y aceleración

Función cuadrática

- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición
- Representación e identificación del dominio y rango de una función cuadrática

Formas tridimensionales

- Pirámides de base regular: propiedades
- Tronco de prisma recto y pirámide: propiedades
- Cono de revolución: propiedades
- Esfera: propiedades
- Tronco de cono: propiedades

Medidas de formas tridimensionales

- Prismas de base regular: área lateral, total y volumen
- Cilindro de revolución: área y volumen

Investigamos



Observa cada situación, asume un rol, resuelve usando el anexo y comunica tus ideas matemáticas.

SITUACIÓN

Diseño de un sistema de recolección de agua de lluvia

De acuerdo con el informe del INEI (12/2023), más del 21 % de la población rural no cuenta con acceso al agua a través de la red pública, lo que representa una situación crítica que requiere atención inmediata. Ante esta problemática, es fundamental implementar sistemas eficientes de recolección y almacenamiento de agua de lluvia que aseguren un suministro constante y sostenible durante todo el año.

Como ingeniero hidráulico, tu misión es proponer un sistema eficiente de captación y almacenamiento de agua de lluvia, destinado a las viviendas familiares o a la comunidad rural, maximizando la recolección para garantizar el abastecimiento durante las temporadas secas.



Fuente: Andina (2025).

Fotografía 1: Peruanos crean sistema que capta agua de lluvia para ser usada en lavanderías y duchas. Proyecto implementado en Loreto fue premiado con la medalla de plata en Feria de Inventos de Corea del Sur. El proyecto CASA no solo busca innovar en tecnologías para un acceso al agua, sino también en redescubrir qué siginifican los espacios públicos colectivos.

¿Qué características debe tener un sistema de recolección de agua de lluvia que asegure un abastecimiento continuo y sostenible tanto para las viviendas familiares como para una comunidad rural a lo largo del año?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Plantea** la proyección de captación anual a partir de la estimación de la cantidad de agua de lluvia que puede recolectarse en viviendas familiares o en la comunidad durante un año. Considera la frecuencia de lluvias y compara el volumen captado en dos tamaños distintos de techo según una región específica.
- **Fija** una escala de medida (por ejemplo, una familia de cinco integrantes o una comunidad de 500 habitantes). Estima el consumo mensual de agua durante los meses de lluvia y los meses secos, y establece los volúmenes máximos y mínimos que se necesitarían para abastecer.
- **Proyecta** y **modela** depósitos con forma de prismas, pirámides o sólidos de revolución, considerando que sus dimensiones permitan contener el máximo volumen posible de agua requerida y el espacio disponible mediante funciones cuadráticas.
- **Plantea** el diseño de un sistema de captación de agua de lluvia para las viviendas o la comunidad tomando como base los datos y las estimaciones previas. Justifica cómo esta solución responde a las necesidades de acceso y sostenibilidad hídrica en un contexto urbano o rural a lo largo del año.
- **Presenta** un informe que incluya datos, cálculos, croquis, planos, una maqueta a escala o un prototipo elaborado en cartón.

SITUACIÓN

Estrategias para la cosecha de agua en zonas rurales

En el Perú, existen tres vertientes hidrográficas que generan aproximadamente dos billones de metros cúbicos de agua al año. No obstante, la vertiente del Pacífico —que abastece al 66 % de la población— concentra solo el 2,2 % de estos recursos hídricos. Esta distribución desigual, sumada a las frecuentes sequías, provoca una grave escasez de agua en las zonas rurales, lo cual afecta seriamente la producción agrícola y las condiciones de vida de las comunidades locales.

Como ingeniero hidráulico, tu misión es diseñar estrategias eficientes de cosecha de agua en zonas rurales, con el fin de optimizar su recolección y almacenamiento, especialmente en épocas de sequía, y así contribuir en la sostenibilidad del sector agropecuario.



Fuente: Agencia Agraria de Noticias (2023).

Fotografía 2: Agro Rural ejecuta acciones preventivas de siembra y cosecha de agua para la adaptación al cambio climático. Con esta técnica ancestral, los productores tendrán mayor disponibilidad de agua para sus cultivos.

¿Qué estrategias específicas de cosecha de agua podrías implementar para optimizar la recolección y el almacenamiento en zonas rurales garantizando la sostenibilidad y resiliencia del sector agropecuario?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Selecciona** una zona agrícola y un cultivo representativo. Define las hectáreas cultivadas y el método de riego usado en los meses secos. Elabora un croquis con medidas aproximadas que muestre las áreas de cultivo, techos para captación y puntos de almacenamiento facilitando así una planificación hídrica frente a la escasez y variabilidad climática.
- **Estima** la producción por hectárea de un cultivo representativo en tu comunidad y la cantidad de agua que puede recolectarse durante la temporada de lluvias, de modo que permita cubrir la demanda hídrica durante la temporada seca considerando el tipo de cultivo, el área cultivada, la duración del ciclo agrícola y la demanda de agua para su producción, expresados en litros o metros cúbicos.
- **Plantea** un modelo de reservorio de forma de cilindro o prisma rectangular que maximice el volumen disponible según el espacio existente teniendo en cuenta una función cuadrática para definir sus dimensiones y garantizar eficiencia, estabilidad y adaptación a las condiciones del entorno rural.
- **Diseña** un sistema integral que articule la captación, la filtración, el almacenamiento y la distribución de agua de manera adaptada al contexto rural para garantizar el acceso sostenible al recurso durante todo el año y fortalecer la resiliencia agropecuaria frente a la escasez hídrica y al cambio climático.

Anexo A: Diseño de un sistema de recolección de agua de lluvia

1. Precipitación anual promedio (mm/año) por región (2022-2024)

Región	Precipitación 2022 (mm)	Precipitación 2023 (mm)	Precipitación 2024 (mm)
Amazonas	2200-2400	2400-2600	2500
Áncash	480-500	500-520	500
Apurímac	650-700	700-720	700
Arequipa	180-200	200-220	210
Ayacucho	750-800	800-830	820
Cajamarca	950-1000	1000-1100	1050
Callao	8-10	10-12	10
Cusco	1050-1100	1100-1200	1150
Huancavelica	750-800	800-850	800
Huánuco	1100-1200	1200-1250	1200
Ica	12-15	15-18	15
Junín	1100-1200	1200-1250	1200
La Libertad	380-400	400-420	400
Lambayeque	230-250	250-300	270
Loreto	2600-2800	2800-3000	2900
Madre de Dios	2700-2900	2900-3100	3000
Moquegua	90-100	100-120	110
Pasco	1200-1300	1300-1350	1300
Piura	270-300	300-400	350
Puno	850-900	900-950	900
San Martín	2200-2400	2400-2600	2500
Tacna	25-30	30-35	30
Tumbes	320-350	350-450	400
Ucayali	2400-2600	2600-2900	2700

Fuente: Adaptado de Senamhi (2023).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Consumo mensual de agua en diferentes escalas poblacionales (2020-2023)

Región	Consumo diario (L/p/día)	Consumo mensual de 1 persona (m^3)	Familia de 5 personas (m^3/mes)	Comunidad de 500 personas (m^3/mes)
Amazonas	55	1,65	8,25	825
Apurímac	60	1,80	9,00	900
Arequipa	100	3,00	15,00	1500
Ayacucho	65	1,95	9,75	975
Cajamarca	80	2,40	12,00	1200
Cusco	70	2,10	10,50	1050
Huancavelica	60	1,80	9,00	900
Huánuco	60	1,80	9,00	900
Ica	95	2,85	14,25	1425
Junín	75	2,25	11,25	1125
La Libertad	105	3,15	15,75	1575
Lambayeque	110	3,30	16,50	1650
Lima metropolitana y Callao	140	4,20	21,00	2100
Loreto	50	1,50	7,50	750
Madre de Dios	50	1,50	7,50	750
Moquegua	85	2,55	12,75	1275
Pasco	60	1,80	9,00	900
Piura	110	3,30	16,50	1650
Puno	65	1,95	9,75	975
San Martín	55	1,65	8,25	825
Tacna	90	2,70	13,50	1350
Tumbes	85	2,55	12,75	1275
Ucayali	50	1,50	7,50	750

Fuente: Adaptado de INEI (2022).

Anexo B: Estrategias para la cosecha de agua en zonas rurales

1. Consumo de agua por región, cultivo y método de riego (m^3/ha/año)

Región	Cultivo 1	Método 1	Consumo 1 (m^3/ha/año)	Cultivo 2	Método 2	Consumo 2 (m^3/ha/año)	Cultivo 3	Método 3	Consumo 3 (m^3/ha/año)
Amazonas	Arroz	Gravedad/ surco	13 000-15 000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000
Áncash	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Alfalfa	Gravedad/ surco	10 000-12 000
Apurímac	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
Arequipa	Arroz	Inundación	15 000-22 000	Papa	Gravedad/ surco	7000-9000	Maíz	Gravedad/ surco	8000-10 000
Ayacucho	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
Cajamarca	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Arveja	Gravedad/ surco	6000-7000
Cusco	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
Huancavelica	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
Huánuco	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000
Ica	Uva	Goteo	6000-8000	Espárrago	Goteo	8000-9000	Maíz	Gravedad/ surco	8000-10 000
Junín	Papa	Gravedad/ surco	7500-8500	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
La Libertad	Caña de azúcar	Gravedad	12 000-15 000	Arroz	Inundación	15 000-20 000	Espárrago	Goteo	8000-9000
Lambayeque	Arroz	Inundación	17 000-22 000	Maíz	Gravedad/ surco	8000-10 000	Caña de azúcar	Gravedad	12 000-15 000
Lima	Maíz amarillo	Gravedad	10 000-13 000	Papa	Gravedad	8000-9000	Espárrago	Goteo	8000-9000
Loreto	Arroz	Gravedad/ surco	13 000-15 000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000
Madre de Dios	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000	Cacao	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000
Moquegua	Olivo	Goteo	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000
Pasco	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Quinua	Gravedad/ surco	5000-6000
Piura	Mango	Goteo	8000-10 000	Arroz	Inundación	15 000-20 000	Limón	Goteo	7000-8000
Puno	Papa	Lluvia + riego	4000-5000	Quinua	Lluvia + riego	3000-4000	Cebada	Lluvia + riego	3000-4000

Información propuesta y adaptada para fines educativos

San Martín	Arroz	Inundación	14 000-17 000	Maíz amarillo	Lluvia + riego	6000-7000	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000
Tacna	Olivo	Goteo	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000	Papa	Gravedad/ surco	7000-8000
Tumbes	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000	Mango	Goteo	8000-10 000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000
Ucayali	Plátano	Gravedad/ surco	8000-10 000	Cacao	Gravedad/ surco	7000-8000	Maíz	Gravedad/ surco	7000-8000

Fuente: Adaptado de Midagri (2017).

6. Precipitación anual promedio (mm/año) por región (2022-2024)

Región	Precipitación 2022 (mm)	Precipitación 2023 (mm)	Precipitación 2024 (mm)
Amazonas	2200-2400	2400-2600	2500
Áncash	480-500	500-520	500
Apurímac	650-700	700-720	700
Arequipa	180-200	200-220	210
Ayacucho	750-800	800-830	820
Cajamarca	950-1000	1000-1100	1050
Cusco	1050-1100	1100-1200	1150
Huancavelica	750-800	800-850	800
Huánuco	1100-1200	1200-1250	1200
Ica	12-15	15-18	15
Junín	1100-1200	1200-1250	1200
La Libertad	380-400	400-420	400
Lambayeque	230-250	250-300	270
Loreto	2600-2800	2800-3000	2900
Madre de Dios	2700-2900	2900-3100	3000
Moquegua	90-100	100-120	110
Pasco	1200-1300	1300-1350	1300
Piura	270-300	300-400	350
Puno	850-900	900-950	900
San Martín	2200-2400	2400-2600	2500
Tacna	25-30	30-35	30
Tumbes	320-350	350-450	400
Ucayali	2400-2600	2600-2900	2700
Callao	8-10	10-12	10

Fuente: Adaptado de Senamhi (2024).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

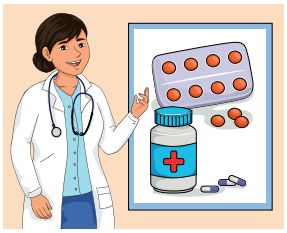
Exploramos



Comienza este nuevo aprendizaje mostrando lo que sabes. Enfrenta cada desafío con confianza y dedicación.

1. Costo de un tratamiento

La tabla resume los costos de un tratamiento inicial de seis meses.



Concepto	Valor
Costo por caja de medicamento	S/100
Cajas por mes	3
Descuento (sobre el costo total)	15 %
Impuesto (sobre el precio con descuento)	10 %

a. Un paciente afirma lo siguiente: "Pagar tres meses adicionales eleva el costo total a más del doble que el tratamiento inicial de seis meses". ¿Es correcto lo que dice? Evalúa esta afirmación y justifica tu respuesta mostrando tus procedimientos.

b. Otro paciente afirma: "Si el impuesto se reduce un 5 % y el descuento aumenta 5 %, el pago del tratamiento no se afecta". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

2. Confección de pantalones

Satoshi confecciona pantalones en su taller durante el día. Además, el tiempo de trabajo está relacionado con la cantidad de pantalones producidos, y estos con el costo total de producción.



a. Completa la siguiente tabla:

Descipción	Tiempo de producción (horas)			
	1	3	6	7
Cantidad de pantalones	3			21
Cantidad total de tela utilizada (m)	2,4		14,4	
Costo total de producción (S/)	90		540	

b. Si el tiempo es proporcional a la cantidad de pantalones y estos al costo total, ¿puede afirmarse que el tiempo es proporcional al costo total de producción? Justifica tu respuesta con los datos de la tabla.

3. Preparando un platillo para cuatro personas

En un restaurante, se desea preparar un platillo para cuatro personas. La siguiente tabla presenta los ingredientes necesarios junto con sus respectivas cantidades, presentaciones disponibles en el mercado y precios unitarios de estas presentaciones:

1 L = 1000 mL

Ingrediente	Cantidad (4 personas)	Presentación comercial	Precio unitario por presentación
Carne	1,5 kg	Paquete de 2 kg	S/30
Cebolla	500 g	Bolsa de 1 kg	S/5
Aceite	200 mL	Botella de 500 mL	S/20
Leche evaporada	0,75 L	Botella de 1 L	S/12

a. Si el restaurante debe atender a 18 personas, calcula cuánto de cada ingrediente debe comprar considerando las presentaciones comerciales indicadas.

b. Si el restaurante cuenta con un presupuesto de S/150 y no dispone de ingredientes previos, entonces debe trabajar considerando las presentaciones comerciales completa de cada ingrediente. ¿Cuántos platillos podrá preparar considerando presentaciones de más? Justifica tu respuesta con cálculos y argumentos.

4. Administración de medicamentos

En un centro veterinario de la localidad, se administra un medicamento a carneros vía intramuscular. Se cuenta con la siguiente composición del vial:

Composición del vial:

50 mL de compuesto químico

Dosis y frecuencia:

La dosis es de 0,5 mL por kilogramo (kg) de peso corporal, administrada cada seis horas durante cinco días.



Vial

Además, cada vial se compra por unidad entera y tiene un costo de S/80, y hay dos carneros de 60 kg y 80 kg que requieren tratamiento.

a. En la veterinaria se necesita saber cuánto más cuesta el tratamiento de un carnero respecto del otro. Plantea el procedimiento y su respuesta.

b. Se afirma: "Si tenemos tres carneros de 40 kg, 50 kg y 65 kg y como la dosis es 0,5 mL por kilo, entonces basta con sumar los pesos (155 kg), multiplicarlos por 0,5 mL y así obtenemos el volumen total de medicamento necesario para los cinco días". ¿Es correcto este razonamiento? Fundamenta tu respuesta empleando procedimientos.

5. Relaciones proporcionales

De las magnitudes A, B y C, se sabe que C^3 es proporcional a A y también a B, pero no a ambas a la vez.

A continuación se solicita determinar el valor de A cuando $B = 36$, sabiendo que cuando $A = 40$, entonces $B = 30$ y $C = 20$.

Para conocer el valor de A, se realizó el siguiente procedimiento:

Como A y B son directamente proporcionales, planteamos lo siguiente:

A	40	x
B	30	36

$$\frac{40}{30} = \frac{A}{B}$$

$$\frac{40}{30} = \frac{x}{36}$$

$$x = \frac{40 \cdot 36}{30} = \frac{1440}{30}$$

$$x = 48$$

a. Como se ha omitido en la solución a C^3, ¿es correcto el procedimiento? Justifica tu respuesta identificando si hay un error y explica por qué.

b. Se afirma que la relación entre A y B siempre se puede resolver con una regla de tres directa. ¿Es correcto ello? Fundamenta tu respuesta.

6. Mezclar y construir

Un ingeniero civil construye, sobre un área de 90 m², el primer piso de una vivienda. Y cuenta con la siguiente información:

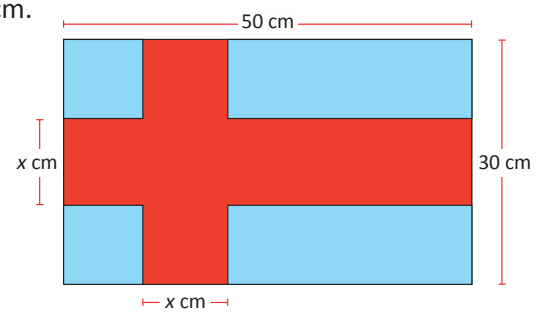
Tipo de estructura	Volumen aprox. (m^3)	Tipo de mezcla
Cimentación	5	1:2
Columnas y vigas	6	1:3
Losa	8	1:4
Contrapiso	4	1:5
Muros	3	1:6

	Materiales por m^3		
Tipo de mezcla	Cemento (kg)	Arena (m^3)	Agua (L)
1:2	610	0,97	250
1:3	454	1,10	250
1:4	364	1,16	240
1:5	303	1,20	240
1:6	261	1,20	235

Considerando un 5 % adicional por desperdicio, ¿cuántas bolsas de cemento de 42,5 kg se requieren para construir todos los tipos de estructura presentados en la tabla?

1. Confección de una bandera

Se muestra el diseño de una bandera que tiene fondo celeste y una cruz roja formada por una franja horizontal y una vertical; ambas de ancho x cm.



a. ¿Cuál es la expresión que permite reconocer la cantidad de tela roja que se usará para la confección de la bandera?

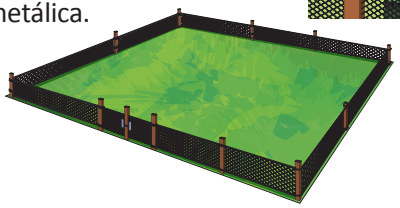
b. Si para la confección de la bandera se reconoce que se usaron 800 cm² de tela celeste visible, ¿cuál es la medida de x?

c. Se afirma que toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ siempre tendrá dos soluciones que resuelven el problema como, por ejemplo, en la situación de la confección de la bandera. ¿Es correcto lo que se dice? Justifica tu respuesta empleando ejemplos o contraejemplos.

2. Optimización del cercado de un terreno



Un técnico agrícola desea cercar un terreno rectangular para el cultivo empleando 120 m de malla metálica.



a. Considerando los 120 m de malla metálica disponibles para cercar el terreno, establece el largo y el ancho posibles, y calcula el área correspondiente completando la tabla.

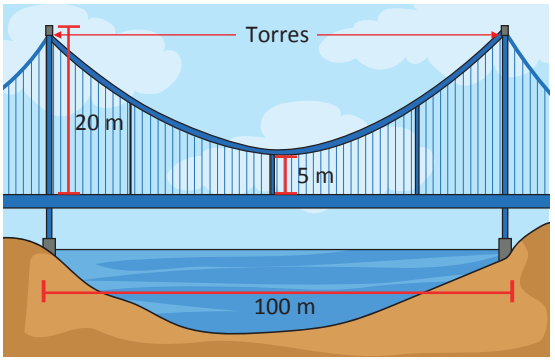
Largo (L)	Ancho (A)	Área = $L \times A$

b. Se necesita que el área del terreno sea exactamente de 756 m². ¿Cuáles podrían ser las dimensiones del terreno sabiendo que el perímetro no puede cambiar? Explica tu procedimiento.

3. Modelado del cable en un puente

Una empresa constructora envía a una ingeniera a analizar el diseño de un puente colgante con torres y un cable de soporte que tiene forma de parábola.



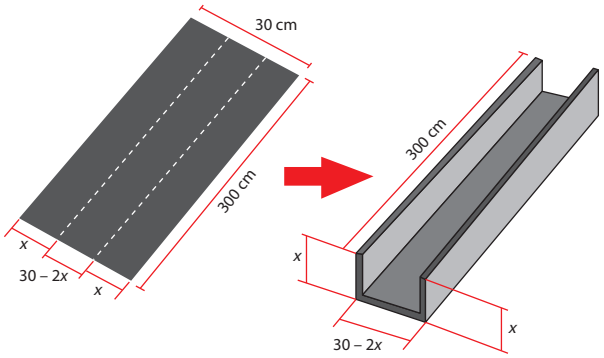


a. Si la distancia entre torres se amplía a 150 m, manteniendo la altura del cable en el centro del puente y la misma altura de 20 m en las torres, determina la nueva función cuadrática que representa la forma del cable parabólico.

b. Si el vértice de la parábola está en el punto (0; 0) que corresponde al centro del puente, y el cable alcanza una altura de 20 m en el punto (75; 20), escribe la ecuación de la parábola que modela el diseño del cable.

4. Diseño de canaletas

Se dobla una lámina de metal delgada (espesor despreciable) de 300 cm × 30 cm para formar una canaleta con sección transversal en forma de U, tal como se muestra.



a. Según la información brindada, completa la tabla con las medidas de la canaleta mostrada y su volumen.

Largo (cm)	Altura (cm)	Ancho (cm)	Volumen (cm^3)
300	2	26	
	4	22	26 400
	5		30 000
		16	
	10		30 000
	x		

b. ¿Cómo puedes determinar, a partir de esta función del volumen $V(x)$, el valor de x que lo maximiza? Describe el procedimiento que sigues, justifica matemáticamente y explica por qué este valor optimiza el diseño de la canaleta.

5. Soluciones que no solucionan

Al resolver la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$, un estudiante realiza el siguiente procedimiento:

Factoriza aplicando el aspa simple.

$6x^2 - x - 2 = 0$

$6x$ $\quad -2 = -2x$ +

x $\quad 1 = \dfrac{x}{-x}$

Obtiene $(6x - 2)(x + 1) = 0$.

Aplica el producto nulo.

$6x - 2 = 0 \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{3}$

$x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = -1$

Por lo tanto, determina que el conjunto solución es

$$\text{C. S.} = \left\{-1; \frac{1}{3}\right\}$$

a. ¿Estás de acuerdo con el procedimiento mostrado? Si no lo estás, identifica el error, explica su causa y plantea el procedimiento correcto para resolver la ecuación.

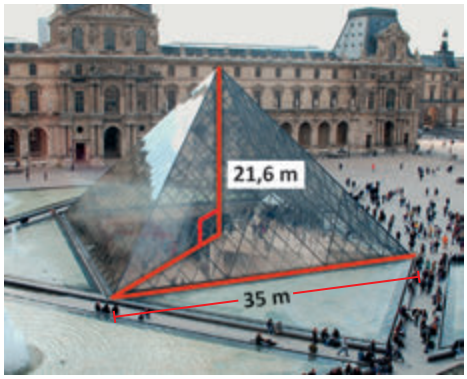
b. Propón al menos dos ecuaciones con estructura similar a la ecuación $6x^2 - x - 2 = 0$. Observa los coeficientes del trinomio y los de los binomios al factorizar. ¿Qué relaciones encuentras entre ellos? Formula una regla general y justifica tu respuesta.

c. Si en lugar de factorizar se aplica la fórmula general para resolver $6x^2 - x - 2 = 0$, ¿qué soluciones obtendrías?, ¿coincide con las halladas al factorizar?

d. Si se obtiene $(2x - 2)(3x + 1) = 0$, ¿qué error se cometió al distribuir los términos del aspa simple?

1. La pirámide del Louvre

Observa la pirámide del Museo del Louvre que está hecha de vidrio y metal, de base cuadrada de lado 35 m y altura 21,6 m.



Fuente: Museolouvre.info (s. f.).

a. Se desea construir una réplica cuya altura sea la mitad de la original reduciendo en la misma proporción todas sus dimensiones. ¿En cuánto disminuiría la cantidad de vidrio con respecto a lo requerido en la pirámide original? Justifica tu respuesta con propiedades de semejanza y cálculos.

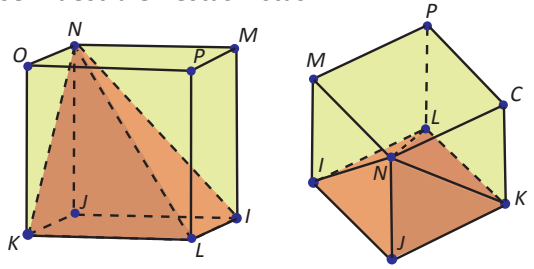
b. Se afirma que si se construyera un prisma con base cuadrada de las mismas dimensiones que la base de la pirámide, y cuya altura sea igual a la de esta, el volumen del prisma sería tres veces el volumen de la pirámide. ¿Es correcta esta afirmación? Fundamenta tu respuesta utilizando ejemplos.

2. Tallado de madera

Un artesano trabaja con un tronco de madera en forma de prisma recto de base cuadrada de 1200 cm^3.



a. El artesano desea tallar una pirámide, cuya base es congruente con la base del prisma y cuya altura es igual a la altura del prisma, como se muestra en estas vistas:



¿Cuánto será el volumen de la pirámide resultante? Justifica cada proceso realizado.

b. Se afirma que, si una pirámide se talla dentro del mismo prisma y conserva la misma base y altura, su volumen no cambia, aunque el vértice esté en distinta posición dentro del prisma. ¿Es correcta la afirmación? Justifica con ejemplos o representaciones.

3. Tanque de almacenamiento de agua

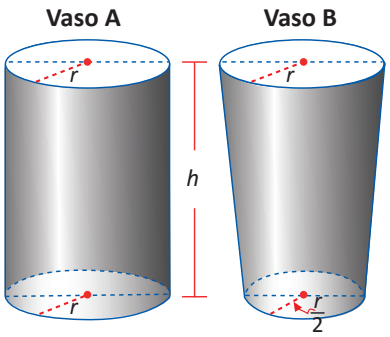
La imagen muestra un tanque cilíndrico con tapa de almacenamiento de agua con capacidad de 200 000 L (1 m^3 = 1000 L). El material para la base cuesta S/110 por m^2 y el destinado a la superficie lateral tiene un valor de S/160 por m^2.

a. Se necesita diseñar un tanque que cumpla con esta capacidad. ¿Cuánto de cada material se necesitará y cuál será el costo? Explica tu respuesta empleando procedimientos y cálculos.

b. ¿Qué pasa con el presupuesto si se construye un tanque que tenga la misma capacidad, pero con una altura 20 % menor?, ¿es una buena idea? Compara los costos del tanque original y del nuevo, y fundamenta tu respuesta.



4. Comparando recipientes



En el gráfico aparecen dos vasos de la misma altura *h*.

- Vaso A: Tiene la forma de un cilindro circular recto de diámetro 2*r*.
- Vaso B: Tiene la forma de un tronco de cono circular recto de diámetro superior 2*r* y diámetro inferior *r*.

Luego se llena el vaso A hasta el borde con agua y se vierte en el vaso B.

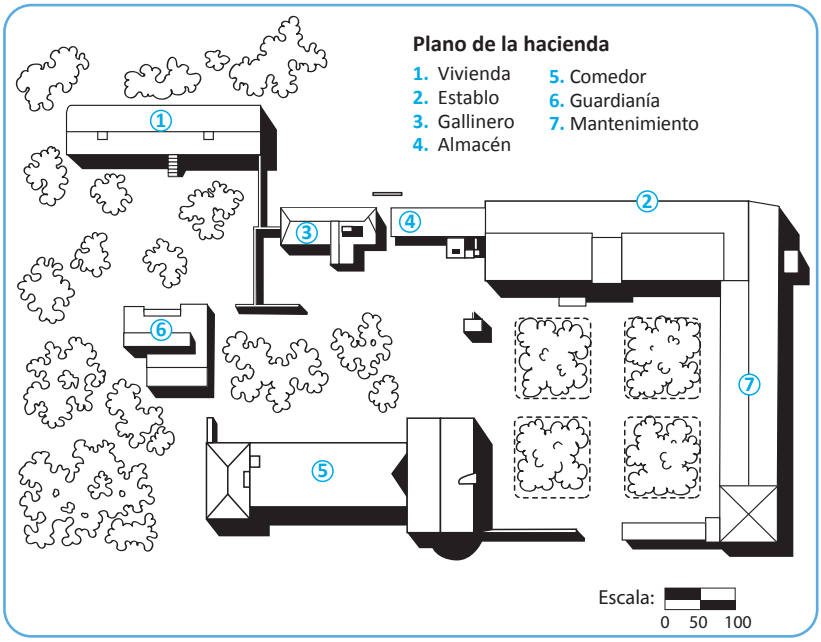
a. ¿Qué porcentaje del agua del vaso A no cabe en el vaso B; es decir, el porcentaje que se derrama? Explica tu procedimiento.

b. Se afirma que, para dos cilindros con el mismo radio, la razón de sus volúmenes no siempre es igual a la razón de sus alturas. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos y contraejemplos.

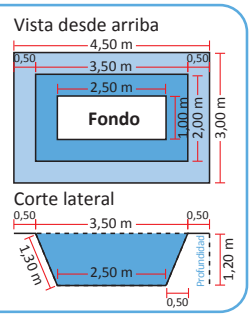
5. Construyendo reservorios

Una hacienda proyecta construir un reservorio. Para ello, se cuenta con la siguiente información:

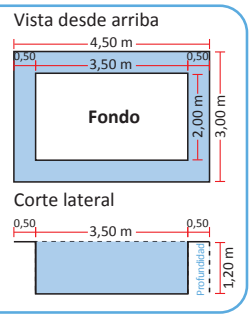
Plano de distribución



Diseño de reservorio 1



Diseño de reservorio 2



a. Usa la escala del plano para calcular el área real que ocupa cada reservorio en la vista en planta y su volumen excavado según la profundidad. Compara cuál diseño necesita más espacio y excavación.

b. Según el plano y considerando el uso del agua por vivienda, establo y cultivos, determina en qué zona sería más estratégica la ubicación del reservorio. Justifica tu elección.

Desarrollamos



Aplica lo trabajado al resolver los siguientes problemas justificando cada paso.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas sobre situaciones de ganancia y represéntalas en una función cuadrática. Expresa la función mediante tablas, su forma algebraica y la gráfica (parábola); emplea procedimientos para hallar el ingreso máximo (vértice), y argumenta la relación entre la cantidad de productos y la ganancia.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Comparte tus conocimientos sobre el cuidado ambiental con tus compañeros.
- Participa en la creación de normas de convivencia escolar que aseguren el respeto y cumplimiento de los derechos de todos.

Pensamos y actuamos

Jorge confecciona polos personalizados para venderlos en ferias locales.

El precio de venta es de S/30 por polo si produce 10 polos, y disminuye en S/1 por cada polo adicional, debido a la competencia.

Por motivos de capacidad, no puede producir más de 35 polos ni menos de 10.



1. Completa la tabla calculando el ingreso total.

Cantidad de polos (x)	Precio por unidad $p(x) = 30 - (x - 10)$		Ingreso total $I(x) = x \times p(x)$	
10	$30 - (10 - 10)$	30	10×30	300
15	$30 - (15 - 10)$	25	15×25	375
20	$30 - (20 - 10)$	20	20×20	400
25				
30				
35				

2. Determina el modelo que representa el ingreso total.

3. ¿En qué cantidad de polos el ingreso total parece alcanzar su valor máximo?

4. Ubica los puntos $(x; I(x))$ en un plano cartesiano y describe la forma.

5. Completa la tabla calculando el ingreso total para cada modelo $I_1(x)$, $I_2(x)$ y $I_3(x)$, usando los mismos valores de x de la tabla anterior. Luego, compara los resultados con los ingresos obtenidos mediante $I(x)$ y observa cómo varía el ingreso en cada caso.

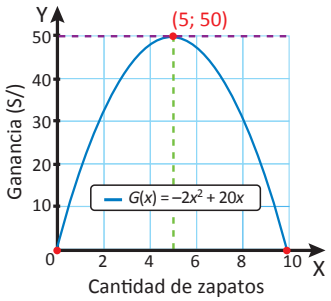
x	$I(x)$ (Ingreso total)	$I_1(x) = -2x^2 + 20x$	$I_2(x) = -x^2 + 38x$	$I_3(x) = -4x^2 + 32x$
10	300	0	280	–80
15	375	–150	345	–420
20	400			
25				
30				
35				

6. **¿Cuál modelo coincide más con $I(x)$? ¿En qué puntos se aleja cada modelo? Si hay diferencias, ¿cómo las explicarías?**

7. **Justifica por qué el modelo seleccionado describe con mayor precisión el comportamiento del ingreso total en función de la cantidad de polos.**

Analiza el siguiente gráfico que representa la ganancia por la venta de zapatos.

8. **Responde lo siguiente:**



   a. Observa la gráfica de $G(x)$. ¿Entre qué valores de x la ganancia aumenta, y a partir de qué punto comienza a disminuir? Explica qué representa ese cambio en la situación.

   b. Analiza el vértice de la parábola. ¿Qué significado tiene este punto en el contexto del problema de producción y ganancia?

   c. Identifica el eje de simetría de la parábola y verifica si la ganancia es igual para valores de x que estén a la misma distancia a la izquierda y a la derecha de dicho eje. ¿Qué concluyes?

   d. Observa que la ganancia disminuye cuando x es mayor que 5. ¿Por qué podría ocurrir esto en una situación real? ¿Crees que el modelo sigue siendo válido si se fabrican más zapatos?

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, tres estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
En una función cuadrática, la ganancia siempre aumenta conforme producimos más unidades hasta un punto máximo.	En cualquier función cuadrática, el dominio y el rango siempre son todos los números reales.	Toda función cuadrática tiene como rango todos los números reales, porque su gráfica se extiende infinitamente.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

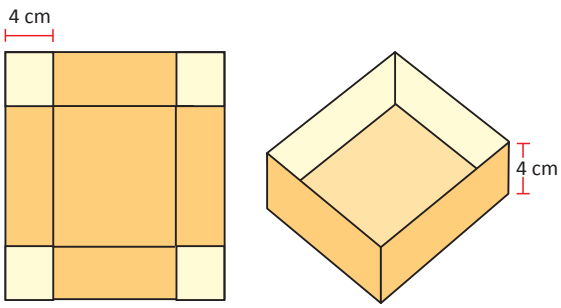
Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran producción de prendas de vestir mediante la función cuadrática $I(x) = 40x - x^2$.
- Representa la función cuadrática, completa la tabla de valores del ingreso total, y ubica los puntos en el plano cartesiano.
- Emplea procedimientos, halla el ingreso máximo (vértice de la parábola) y analiza el comportamiento de la gráfica (cuándo crece y decrece).
- Justifica la validez y elección de la función cuadrática, interpreta el significado del vértice (máxima ganancia) y explica por qué la ganancia disminuye.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

Una fábrica elabora una caja abierta de 484 cm^3 a partir de una plancha cuadrada recortando cuadrados en las esquinas y doblando las solapas, como se muestra.



a. Analiza cómo varía el volumen de la caja al cambiar el tamaño del recorte, y formula una expresión que relacione dicho volumen con las dimensiones originales del cartón.

b. Evalúa si toda función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + c$ siempre corta al eje X en dos puntos y al eje Y en $(0; c)$. ¿Es correcto? Justifica.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran prismas y pirámides truncadas a partir de sus dimensiones y desarrollos planos, estableciendo la relación entre el área de la base, el área total y el volumen. Emplea estrategias y procedimientos para determinar el área y el volumen de estas figuras e identifica la proporción entre el volumen de una pirámide y el de su tronco. Argumenta y justifica cuál figura resulta más eficiente en relación con el volumen y el costo del material (área), y sustenta comparaciones válidas para optimizar el diseño de empaques.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

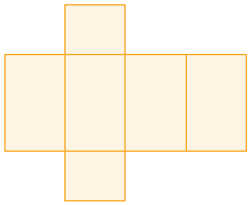
- Valora los saberes ancestrales sobre el cuidado de la naturaleza, e incorpóralos en los proyectos y las actividades del aula.
- Colabora en actividades que promuevan la paz, la convivencia y el respeto mutuo entre tus compañeros.

Pensamos y actuamos

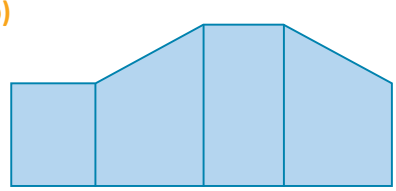
En una fábrica de empaques, necesitan diseñar envases con diferentes formas para optimizar el espacio de almacenamiento y reducir el costo del material. Analiza los siguientes desarrollos geométricos y determina cuáles serían más eficientes en volumen y material.

Desarrollo de formas geométricas en el plano

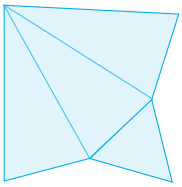
a)



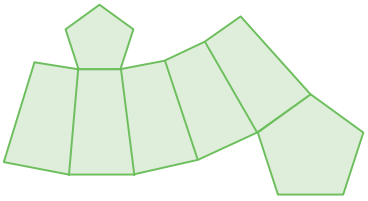
b)



c)



d)



1. **Observa las formas de prismas, pirámides y sus versiones truncadas, y arma prototipos en cartulina o en el simulador. Registra tus medidas estimadas en un borrador antes de calcular con exactitud.**
2. **Observa detenidamente cada figura y registra sus dimensiones clave: largo, ancho, altura, aristas y caras.**

Figura 1

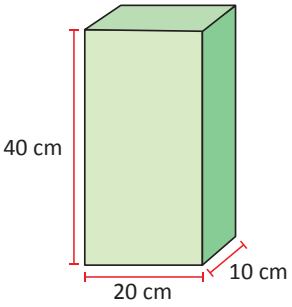


Figura 2

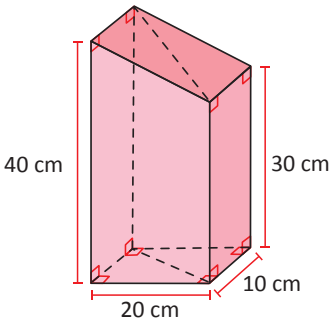


Figura 3

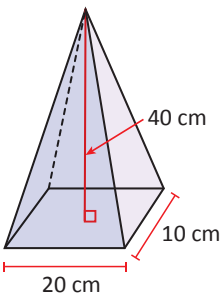
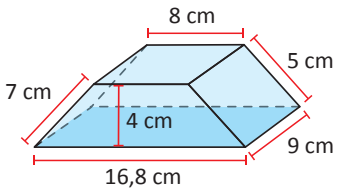


Figura 4



3. Completa la siguiente tabla con las medidas del área de la base, el área total y el volumen de cada una de las figuras que se muestra a continuación.

Figura	Forma geométrica	Dimensiones	Área de base (cm^2)	Área total (cm^2)	Volumen (cm^3)
1	Prisma rectangular				
2	Prisma truncado	Base: 20 cm × 10 cm Alturas laterales: 40 cm y 30 cm	200 cm^2		
3	Pirámide cuadrangular				
4	Pirámide truncada				

a. Observa los valores de los volúmenes de la pirámide y del prisma. ¿En qué proporción se relacionan los volúmenes del prisma y de la pirámide?

b. Usando los datos de la tabla (base y altura), compara un prisma truncado y una pirámide truncada con las mismas dimensiones. ¿Se mantiene la misma relación de volúmenes que en las figuras completas? Explica por qué ocurre esta proporción.

c. Elige una figura de la tabla y aumenta o disminuye el área de su base manteniendo la altura. Calcula el nuevo volumen y analiza cómo cambia. Compara si este aumento de volumen también incrementa proporcionalmente el material necesario para construir la figura.

d. A partir de los valores de área total y volumen calculados en la tabla, analiza qué figura requiere menos material para construirla manteniendo el mismo volumen. Justifica tu respuesta usando proporciones y relaciones entre área y volumen.

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, tres estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
La pirámide es más económica, porque usa menos material, aunque su volumen sea menor.	Si el volumen es lo importante, los prismas siempre serán la mejor opción.	Depende de qué prioricemos: más volumen o menos costo de material.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Modela figuras tridimensionales, como prismas y pirámides, a partir de sus dimensiones clave (largo, ancho y altura) y de sus desarrollos planos.
- Establece la relación entre el área como medida del material y el volumen como medida de la capacidad.
- Expresa y representa las figuras y sus desarrollos planos, y establece la relación entre el área de la base, el área total y el volumen.
- Emplea procedimientos para obtener el área total y el volumen de prismas y pirámides truncadas, y para comparar la eficiencia del material en relación con la capacidad.
- Argumenta con ejemplos qué figura resulta más eficiente (menor costo y mayor volumen), y sustenta el diseño óptimo de empaques.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas con cuerpos geométricos como cilindros, conos y esferas, expresando y representando sus desarrollos planos para establecer la relación entre el área de la base, el área total y el volumen. Emplea procedimientos para calcular áreas y volúmenes, identifica la proporción entre cono y cilindro y compara su eficiencia en el uso del material. Justifica la figura más adecuada según volumen, costo y diseño, optimizando el uso de recursos y la capacidad de los objetos.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

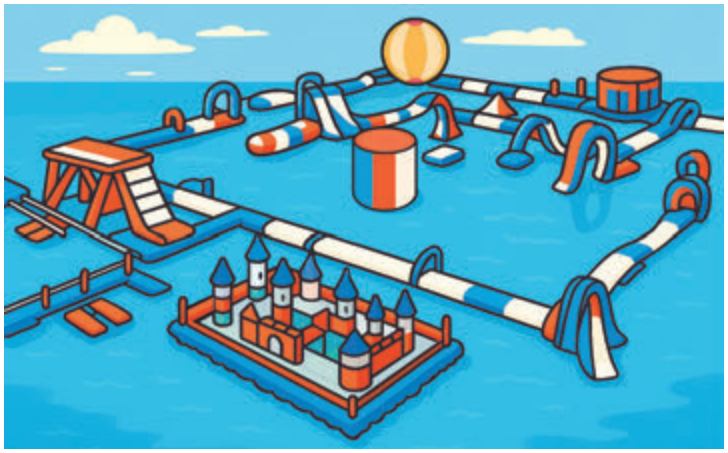


Practica valores

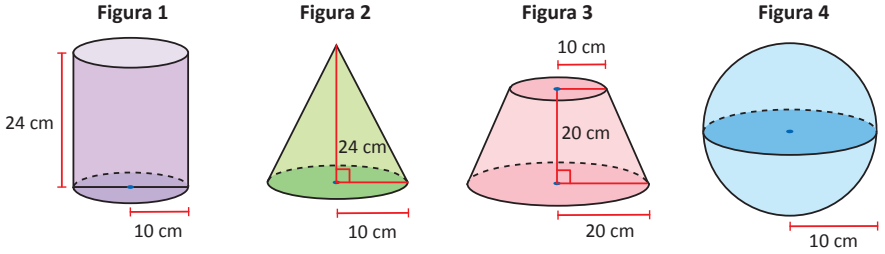
- Promueve el respeto por todos los seres vivos y enseña a tus compañeros a protegerlos.
- Colabora responsablemente en el cumplimiento de acuerdos grupales y apoya al equipo hasta concluir las tareas.

Pensamos y actuamos

El parque acuático Aguapark diseña nuevos depósitos y toboganes. Necesita comparar distintas formas de tanques y toboganes para almacenar la misma cantidad de agua usando menos material.



1. Observa detenidamente cada figura y registra sus dimensiones clave: diámetro, radio, altura y generatriz.



Completa la tabla con la información anterior.

Figura	Nombre del sólido	Tipo de base	Elementos que lo forman	Altura (cm)	Radio (cm)
1	Cilindro	Círculo	2 bases, superficie lateral curva	24	10
2	Cono				
3	Cono truncado				
4	Esfera				

2. Responde las preguntas.

a. ¿Qué atributos geométricos permiten distinguir una figura con base circular de otra que no la tiene?

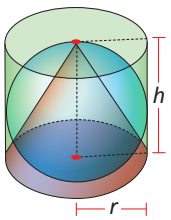
b. ¿Qué diferencias observas entre una figura completa y su versión truncada?

c. ¿Por qué algunas figuras presentan mayor superficie curva que otras?

3. Completa las columnas de área lateral, área total y volumen para las figuras 2, 3 y 4 usando fórmulas conocidas.

Sólido	Área lateral (cm^2)	Área total (cm^2)	Volumen (cm^3)
Cilindro	$A_L = 2\pi rh$ $A_L = 2\pi(10)(24)$ $A_L = 480\pi$	$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$ $A_T = 480\pi + 200\pi = 680\pi$	$V = \pi r^2 h$ $V = \pi(10)^2(24)$ $V = 2400\pi$
Cono			
Cono truncado			
Esfera			

4. Con la tabla completa, responde los siguientes problemas:



a. Si el cilindro y el cono tienen la misma base y altura, ¿qué proporción del volumen del cilindro corresponde al cono? Explica por qué.

b. Comparando un cilindro, un cono y una esfera con igual radio y altura, ¿qué relación observas entre sus volúmenes? Explica tu respuesta con ejemplos.

c. De las formas estudiadas, ¿cuál permite almacenar más agua utilizando la menor cantidad de material? Justifica tu elección.

d. ¿Por qué la esfera permite almacenar más agua usando menos material que las otras figuras? Explica tu razonamiento.

e. Si quieres construir un tanque de 170 m^3 minimizando costos, ¿qué forma elegirías? Calcula el costo total y justifica tu decisión.

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, tres estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Si duplicamos el radio de un cilindro, su área total y su volumen aumentan en la misma proporción.	La esfera ocupa más volumen que el cono, y con menos superficie para contenerlo.	El cilindro permite almacenar mucho contenido, pero requiere más material que la esfera o el cono.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran cuerpos geométricos como cilindros, conos y esferas, analizando sus dimensiones y aplicando relaciones entre área, volumen y proporción entre estas.
- Representa sólidos de revolución en tablas y gráficos, comparando volúmenes y la proporción entre cono y cilindro mediante el uso propiedades.
- Emplea procedimientos para calcular áreas y volúmenes, comparando la eficiencia de las figuras y el uso proporcional del material.
- Argumenta relaciones de volumen entre cuerpos geométricos y evalúa la validez de duplicar dimensiones en el diseño para optimizar material y capacidad.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.



María y José compran, cada uno, tres porciones de helado de forma esférica (con 6 cm de diámetro), que son servidos en vasos que tienen una altura, diámetro superior e inferior de 6 cm, 8 cm y 6 cm, respectivamente. Iván afirma que, si estas porciones se derriten, rebasarían la capacidad del vaso, mientras que Milagros afirma que esto no es así. ¿Quién tiene razón? Justifica tu respuesta.

FORMALIZAMOS



Descubre procedimientos en los ejemplos, dialoga y organiza tus ideas para dar sentido a las ideas matemáticas en tus desafíos.

MAGNITUDES DERIVADAS

Velocidad y aceleración

Situación: Sube... y vuelve

Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad de 24 m/s. ¿Cuánto tiempo tarda en alcanzar su altura máxima?, ¿qué altura alcanza? ¿Con qué velocidad vuelve al punto de partida? (Aceleración de la gravedad, $g = 9{,}8$ m/s^2)

Observamos en la tabla cómo varían la velocidad, la altura y el sentido del movimiento durante el recorrido de la pelota.

Tiempo (s)	Velocidad (m/s)	Altura (m)	Aceleración (m/s^2)	Sentido del movimiento
0	24	0	–9,8	↑
1	14,2	19,1	–9,8	↑
2	4,4	28,4	–9,8	↑
2,45	0	29,4	–9,8	↕ Cambio de sentido
3	–5,4	27,9	–9,8	↓
4	–15,2	17,6	–9,8	↓
4,9	–24	0	–9,8	↓

La pelota alcanza su altura máxima de 29,4 m en 2,45 s y completa su recorrido total en 4,9 s, regresando al piso con 24 m/s. La gravedad actúa en todo momento con igual intensidad.

La experiencia anterior permite reconocer lo siguiente:

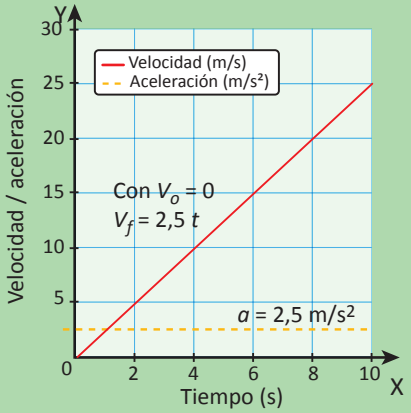
Velocidad (*v*). Es la magnitud vectorial que indica la variación del desplazamiento por cada unidad de tiempo. Se mide en m/s o km/h.

Aceleración (*a*). Es la variación de la velocidad en el tiempo. Se mide en m/s^2. Cuando la variación se analiza con más precisión, se usa $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$.

Dependiendo del valor de la aceleración distinguimos dos tipos de movimiento:

- En el movimiento rectilíneo uniforme (M.R.U.), la aceleración es nula y la velocidad es constante.
- En el movimiento rectilíneo uniformemente variado (M.R.U.V.), la aceleración es constante y la velocidad varía linealmente con el tiempo.

Velocidad y aceleración vs. tiempo (M.R.U.V)



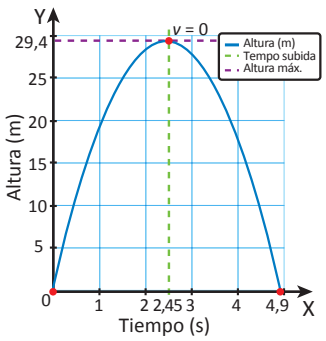
¿Sabías que...?

Las magnitudes derivadas, como el volumen y el caudal (litros/segundo), permiten medir el agua de lluvia captada y gestionarla eficientemente, favoreciendo decisiones científicas y ciudadanas orientadas a la sostenibilidad.

Ten en cuenta

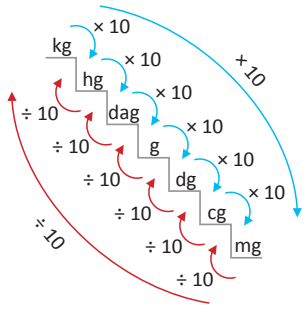
En un lanzamiento vertical, el tiempo de subida y el de bajada son iguales cuando la aceleración es constante.

Movimiento vertical de una pelota (sube y vuelve)



Recuerda

1 kilogramo equivale a 1000 g (1 kg <> 1000 g). Para la conversión de unidades de masa:



En ese sentido, la **aceleración** es la tasa de cambio instantánea del vector velocidad respecto al tiempo. Significa que la aceleración es la medida de cómo cambia la velocidad en un intervalo de tiempo.

De la gráfica precedente, la aceleración (línea punteada) permanece constante, mientras que la velocidad (línea roja) aumenta en forma lineal, lo que indica un movimiento acelerado desde el reposo.

Situación: Aceleración negativa, ¿retorno garantizado?

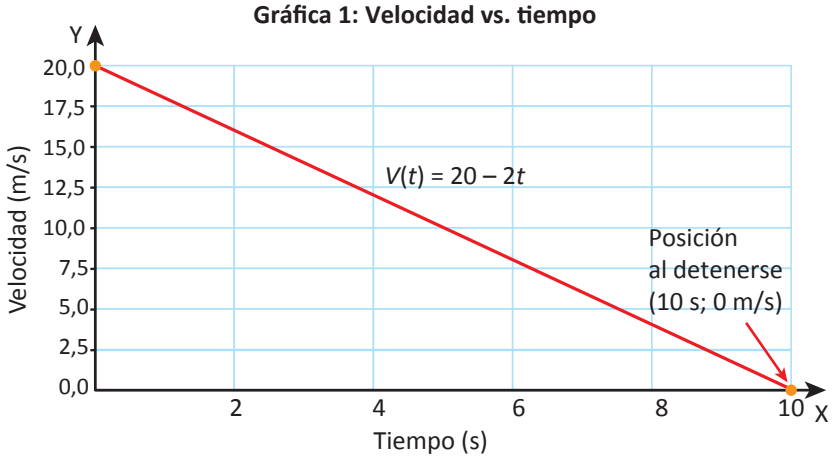


Un estudiante afirma lo siguiente: "Si un objeto tiene aceleración negativa, necesariamente regresa al punto de partida". ¿Estás de acuerdo? Explica tu respuesta.

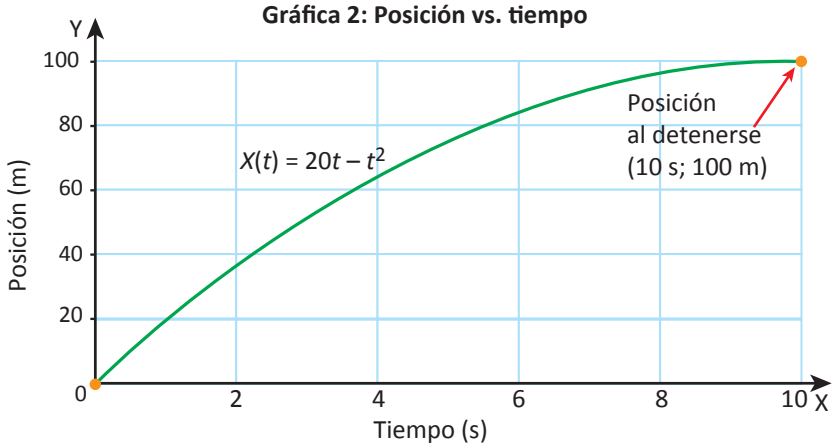
Un objeto con aceleración negativa puede detenerse, pero eso no implica que regrese al punto de partida. En la gráfica 1, la velocidad disminuye hasta llegar a cero, pero el objeto solo se detiene, no regresa.

Por lo tanto, aceleración negativa no implica retorno. El signo negativo indica que la aceleración tiene sentido opuesto al eje positivo elegido. La rapidez disminuye cuando la aceleración y la velocidad tienen sentidos opuestos.

Gráfica 1: Velocidad vs. tiempo

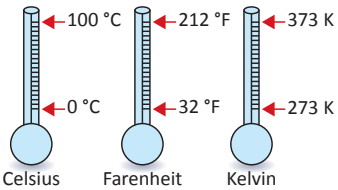


Gráfica 2: Posición vs. tiempo



¿Sabías que...?

La temperatura es una magnitud física. Para medirla se utilizan distintas escalas: Celsius (°C), Fahrenheit (°F) y Kelvin (K), que se usan en la vida cotidiana, la meteorología, la medicina, y otros.



$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9} = \frac{K - 273}{5}$$

Por ejemplo, convierte 20 °C a °F.

$$\frac{°C}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

$$\frac{20}{5} = \frac{°F - 32}{9}$$

$°F = 4(9) + 32 = 68$

Recuerda

Posición: $y(t) = V_0 \cdot t + \frac{1}{2} a \cdot t^2$

Velocidad: $v(t) = V_0 + a \cdot t$

donde

- t: tiempo
- a: aceleración
- V_0: velocidad inicial

Evalúa tus progresos

- Representa los datos en gráficos de velocidad-tiempo y posición-tiempo expresando el sentido del movimiento según el signo de la velocidad.
- Determina la altura máxima y el instante de velocidad nula.
- Argumenta el significado de la aceleración negativa y su interpretación en el punto más alto.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición

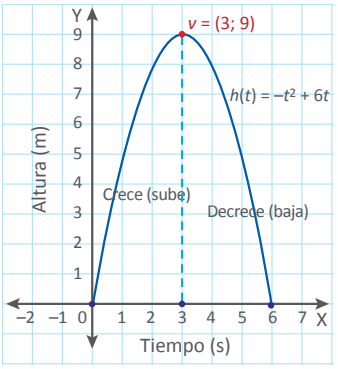
Situación: El salto del delfín

En un acuario, un delfín realiza un salto, cuya altura (h) en función del tiempo (t) se modela con $h(t) = -t^2 + 6t$, con $0 \le t \le 6$. ¿Durante qué intervalos la altura del delfín aumenta o disminuye? ¿Qué relación hay entre estos y la forma de la parábola?

Observemos qué ocurre con la altura del delfín al dar distintos valores a t.

t	$h(t)$	Comportamiento
0	0	A punto de salir del agua
1	5	Sube
2	8	Sube
3	9	Altura máxima (vértice)
4	8	Baja
5	5	Baja
6	0	Toca la superficie del agua en la caída

Altura del delfín en función del tiempo



De la tabla y gráfico observamos que, $h(t)$ crece en $[0; 3]$ y $h(t)$ decrece en $]3; 6]$. Como $a = -1 < 0$, la parábola se abre hacia abajo y el vértice representa el máximo de la función. El eje de simetría $t = 3$, divide a la función en una parte creciente y decreciente.

De lo observado en la situación anterior, concluimos que la **función cuadrática** es una función polinómica de segundo grado que se expresa como $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde x es la variable independiente y $f(x)$ es la variable dependiente. Los coeficientes $a, b, c \in \mathbb{R}$, y $a \neq 0$. Su gráfica es una parábola, cuyo punto máximo o mínimo es el vértice, que se obtiene así:

$V = (h; k)$, donde la coordenada $h = \dfrac{-b}{2a}$ y $k = f(h)$.

Situación: Costo de producción

Una empresa modela su costo de producción de calcetines con la función $C(x) = x^2 - 8x + 20$, donde x es el número de docenas producidas.

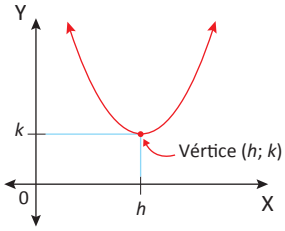
Un estudiante afirma que, como la parábola tiene un mínimo, aplica la fórmula del vértice y halla que $x = -4$. Luego, evalúa $C(4) = 4$ y concluye que el costo mínimo es S/4. ¿Es correcto? ¿Qué errores encuentras y cómo los corregirías?

Procedimiento del estudiante	Procedimiento corregido
Aplica: $h = -\dfrac{8}{2(1)} = -4$	Aplica: $h = -\dfrac{-8}{2(1)} = 4$
Evalúa: $C(4) = 4^2 - 8(4) + 20 = 4$	Evalúa: $C(4) = 16 - 32 + 20 = 4$
Concluye que el mínimo se alcanza en $x = -4$.	Concluye que el mínimo se alcanza al producir cuatro docenas.
No advierte que $x = -4$ no tiene sentido en el contexto.	Interpreta correctamente el contexto de producción positiva.

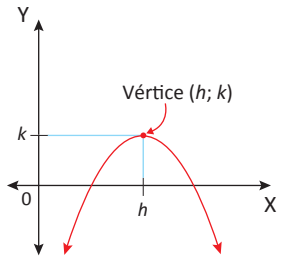
¿Sabías que...?

En $f(x) = ax^2 + bx + c$

- Si $a > 0$, la parábola abre hacia arriba (tiene un mínimo).



- Si $a < 0$, la parábola abre hacia abajo (tiene un máximo).



Recuerda

Una función cuadrática como esta:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

también se puede expresar en su forma canónica, es decir, $f(x) = a(x - h)^2 + k$, donde h y k son las coordenadas del vértice de la parábola.

Practica valores

- Participa en campañas escolares de limpieza y reciclaje.
- Participa en las actividades del aula y respeta las normas acordadas por tu equipo de trabajo.

Representación e identificación del dominio y rango de una función cuadrática

Situación: Cultivo óptimo



El rendimiento de un cultivo en función de la cantidad de fertilizante está dado por $R(x) = -x^2 + 10x$, donde x es la cantidad de fertilizante (kg). ¿Qué cantidades de fertilizante se pueden usar para que el rendimiento tenga sentido? ¿Cuál es el rendimiento máximo que puede obtenerse?

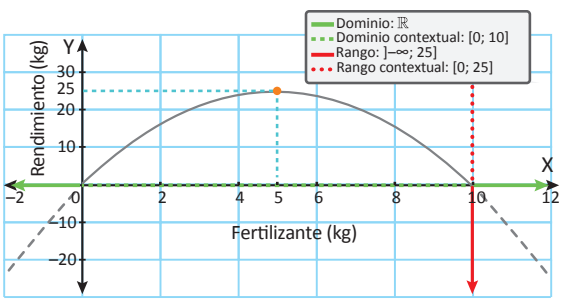
Veamos qué pasa con el rendimiento del cultivo cuando usamos distintas cantidades de fertilizante.

Fertilizante (kg) x	Rendimiento (kg)	¿Tiene sentido?
–2	$-(-2)^2 + 10(-2) = -4 - 20 = -24$	✗ No. Cantidad negativa y rendimiento negativo.
0	0	✓ Sí. Inicio sin fertilizante.
2	$-4 + 20 = 16$	✓ Sí
4	$-16 + 40 = 24$	✓ Sí
5	$-25 + 50 = 25$	✓ Sí. Máximo rendimiento.
6	$-36 + 60 = 24$	✓ Sí
10	$-100 + 100 = 0$	✓ Sí. Fin del intervalo.
12	$-144 + 120 = -24$	✗ No. Exceso de fertilizante, rendimiento negativo.

De la tabla, concluimos que, entre 0 kg y 10 kg, el rendimiento tiene sentido en el contexto del cultivo.

La gráfica muestra el comportamiento del rendimiento del cultivo en función de la cantidad de fertilizante.

Fertilizante vs. rendimiento



Asimismo, permite comparar la expresión matemática con el modelo del contexto real. El dominio en el contexto está entre [0; 10], siendo $x = 5$ kg la máxima cantidad de fertilizante. El rango en el contexto es [0; 25] y el máximo rendimiento es $f(x) = 25$ kg.

De acuerdo con lo analizado, sea la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dominio de la función. Son todos los números reales.

$\text{Dom}(f) = \mathbb{R}$ o $\text{Dom}(f) =]-\infty; +\infty[$

Rango de la función. Dependiendo del valor del coeficiente a (concavidad):

- Si $a > 0$: $\text{Ran}(f) = [k; +\infty[$
- Si $a < 0$: $\text{Ran}(f) =]-\infty; k]$

Donde k es el valor de la función evaluado en el vértice $h = -\frac{b}{2a}$.

Ten en cuenta

En la situación planteada, la forma algebraica para hallar el dominio y el rango es la siguiente:

$-x^2 + 10x \geq 0$

$\Rightarrow x(10 - x) \geq 0$

$\Rightarrow x \geq 0 \quad \vee \quad 10 \geq x$

$\Rightarrow x \in [0; 10]$

Entonces

- Dominio: de 0 a 10 kg
- Rango: de 0 a 25 kg

Como la masa no puede ser negativa, x (fertilizante en kg) ≥ 0. Con 0 kg o 10 kg, el rendimiento es nulo; con más de 10 kg el rendimiento es negativo.

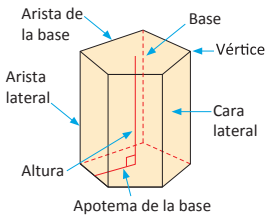
TIC

Evalúa tus progresos

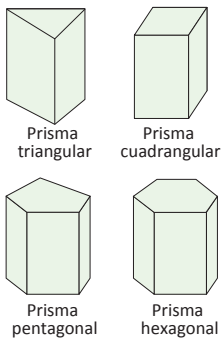
- Establece relaciones entre variables y coeficientes en funciones cuadráticas, representa gráficamente la situación y determina el vértice como punto óptimo.
- Emplea estrategias y fórmulas para hallar raíces y valores óptimos, argumenta dominio, rango y tipo de vértice según el contexto para sustentar decisiones.

Recuerda

El **prisma recto** es un sólido geométrico limitado por dos regiones poligonales paralelas y congruentes, denominadas bases, y otras regiones que son rectangulares, denominadas caras laterales.

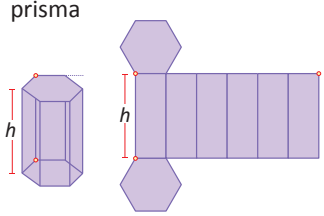


El **prisma** se nombra de acuerdo con la forma de su base.

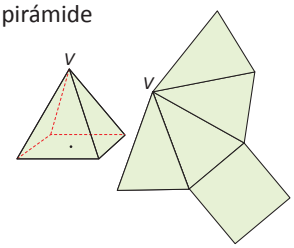


Ten en cuenta

El desarrollo plano de un prisma



El desarrollo plano de una pirámide

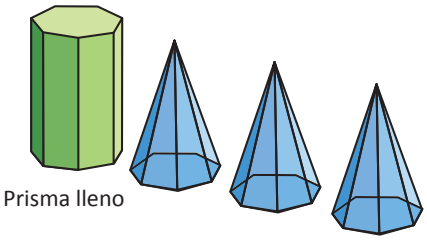


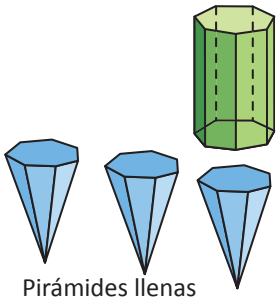
FORMAS TRIDIMENSIONALES

Pirámides de base regular: propiedades

Situación: Velas ecológicas

Flor quiere fabricar tres velas con forma de pirámide, cuya base y altura coinciden con las del prisma hexagonal donde tiene almacenada la cera. Para optimizar recursos, necesita saber si esa cantidad de cera alcanza para llenar completamente los moldes. Ella cree que le sobrará cera. ¿Estará en lo cierto? Justifica tu respuesta.





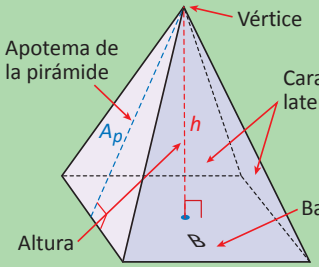
Como el prisma hexagonal y las tres pirámides tienen igual base y altura, al verter el contenido del prisma se observa que se llenan exactamente.

Con este hecho, deducimos lo siguiente:

Volumen de la pirámide = $\frac{1}{3}$ volumen del prisma

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que la **pirámide** es un poliedro que tiene una base poligonal y caras laterales con forma de triángulo, las cuales comparten un vértice común (vértice de la pirámide).

Si la base es un polígono regular y todas las caras laterales son triángulos isósceles congruentes, se trata de una pirámide regular.



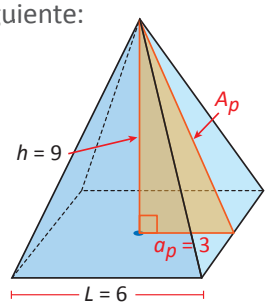
$$V = \frac{1}{3} A_B \times h$$

$$A_L = \frac{P_B \times A_p}{2}$$

$$A_T = A_L + A_B$$

Por ejemplo, en la pirámide mostrada tenemos lo siguiente:

- Lado de la base cuadrada: $L = 6$ cm
- Altura de la pirámide: $h = 9$ cm
- Apotema: $A_p = ?$



Calculamos A_p usando el teorema de Pitágoras.

$A_p = \sqrt{9^2 + 3^2} = \sqrt{90} \cong 9{,}49$ cm

Área lateral (cuatro triángulos):

$A_L = 4\left(\frac{6(9{,}49)}{2}\right) \approx 113{,}88$ cm^2

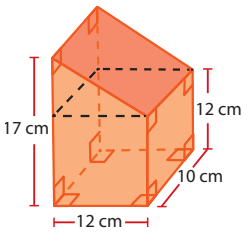
Área total: $A_T = A_B + A_L \Rightarrow A_T = (6)^2 + 113{,}88 = 149{,}88$ cm^2

Volumen: $V = \frac{1}{3}(36)(9) = 108$ cm^3

Tronco de prisma recto y pirámide: propiedades

Situación: Diseño de portapapeles

Una empresa de papelería debe fabricar un organizador de escritorio como el que se muestra. Calcula el área total de cartón necesario para fabricarlo y estima el volumen interno que puede almacenar.



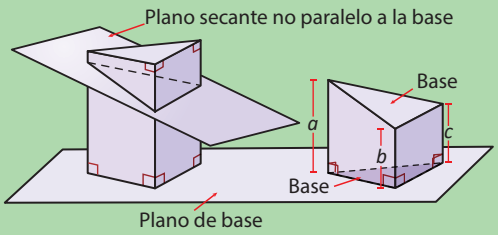
Descomponemos el sólido de la siguiente manera:

Parte del sólido	Área (cm^2)	Volumen (cm^3)
Prisma rectangular (base)	648	1440
Prisma triangular (superior)	110	300
Área total y volumen del organizador	758	1740
Parte abierta (rectángulo)	130	—

Por tanto, se requiere un área de 758 cm^2 de cartón y obtener un volumen de 1740 cm^3.

La resolución de la situación anterior evidencia que el **tronco de prisma** es la porción de un prisma comprendido entre una de sus bases y un plano no paralelo que corta todas sus aristas laterales.

Tronco de prisma triangular

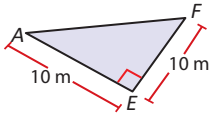


Propiedades:

- Tiene dos bases poligonales no congruentes.
- Las caras laterales son generalmente trapecios (si el corte es oblicuo). Si el corte es paralelo, se obtiene un nuevo prisma con menor altura.
- No es un cuerpo uniforme porque la sección transversal varía a lo largo de la altura.

Situación: Área y volumen de un tronco de prisma

En el tronco de prisma triangular mostrado en la caja **Ten en cuenta**, determina el área de la base inferior, el área lateral y su volumen.

Área de la base	Volumen
Área de las bases Base mayor: triángulo rectángulo *AEF* $A = \frac{10(10)}{2} = 50\ m^2$ 	La base del tronco es un triángulo rectángulo isósceles de catetos 10 m. **Área base inferior** $A_{base} = \frac{10 \times 10}{2} = 50\ m^2$ Usamos la fórmula del **volumen** para un tronco de prisma triangular. $V = A_{base}\ \frac{a+b+c}{3}$ donde $a = 6$ m, $b = 8$ m, $c = 16$ m $V = 50 \times \frac{6+8+16}{3} = 50 \times 10 = 500\ m^3$

Recuerda

En un tronco de prisma, se tiene lo siguiente:

$$A_L = \sum_{i=1}^{n} A_{caras_i}$$

$$A_T = A_L + A_{base\ mayor} + A_{base\ menor}$$

$$V_{\substack{tronco\ de\ prisma\\ de\ base\ triangular}} = A_{base} \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right)$$

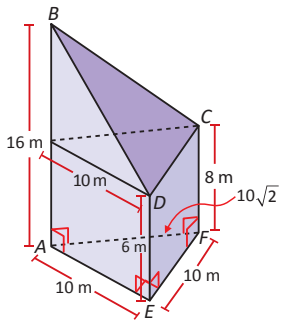
donde a, b y c son las alturas del prisma truncado.

Para un tronco de prisma cualquiera

$V = A_{base} \times$ altura promedio

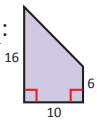
Ten en cuenta

Tronco de prisma triangular



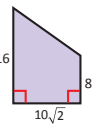
Áreas laterales

- A_1:



$$A_1 = \frac{(16+6)10}{2}$$
$$A_1 = 110$$

- A_2:



$$A_2 = \frac{(16+8)10\sqrt{2}}{2}$$
$$A_2 = 120\sqrt{2}$$

- A_3:

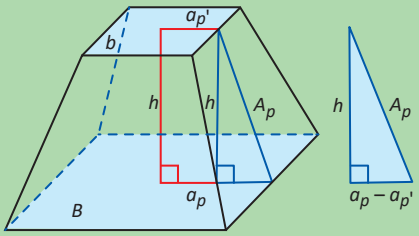


$$A_3 = \frac{(6+8)10}{2}$$
$$A_3 = 70$$

Área lateral total

$$A_L = A_1 + A_2 + A_3$$
$$= 110 + 120\sqrt{2} + 70$$
$$= 180 + 120\sqrt{2}$$
$$= 349{,}7$$

El **tronco de pirámide** es un poliedro que se forma al cortar una pirámide con un plano paralelo a su base, eliminando luego la parte superior. Como resultado se obtiene un sólido con dos bases poligonales semejantes (una mayor y otra menor) y caras laterales con forma de trapecios, como el que se muestra.



$$A_p^2 = (a_p - a_{p'})^2 + h^2$$

$$A_L = \frac{(P + p) \cdot A_p}{2}$$

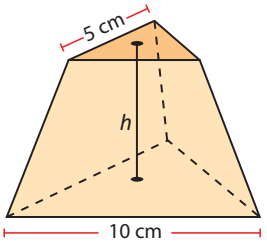
$$A_T = A_L + A_B + A_b$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot (A_B + A_b + \sqrt{A_B \cdot A_b}) \cdot h$$

A_p: apotema tronco
a_p: apotema base mayor
$a_{p'}$: apotema base menor
h: altura del tronco de pirámide (distancia perpendicular entre sus bases)
b y B: base menor y base mayor

A_B: área base mayor
A_b: área base menor
P: perímetro base mayor
p: perímetro base menor

Situación: Diseño limitado



Una empresa desea fabricar contenedores con forma de tronco de pirámide triangular usando solo 300 cm² de material por caja. Para optimizar y evitar desperdicios, se propone que la base menor será la mitad de la base mayor.

Si se toma como base mayor un triángulo equilátero de 10 cm de lado, ¿cuál es el volumen máximo que se puede lograr para esta caja sin exceder el material disponible?

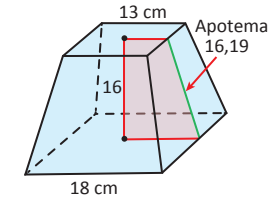
Etapa del procedimiento	Expresión	Resultado
Datos iniciales	Lado de la base mayor: $a = 10$ cm Lado de la base menor: $b = 5$ cm	Triángulos equiláteros
Área (base mayor)	$A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 10^2$	$A_1 = 43{,}3$ cm²
Área (base menor)	$A_2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 5^2$	$A_2 = 10{,}8$ cm²
Área lateral disponible	$A_L = 300 - A_1 - A_2$	$A_L = 245{,}9$ cm²
Cálculo de la altura h (teorema de Pitágoras)	$h = \sqrt{10{,}9^2 - 1{,}45^2}$	$h \approx 10{,}8$ cm
Cálculo del apotema (A_p)	$A_L = 245{,}9 = \frac{30 + 15A_p}{2}$	$A_p \approx 10{,}9$ cm
Cálculo del volumen	$V = \frac{h}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2})$	$V \approx 273{,}6$ cm³

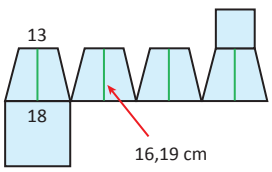
Por lo tanto, la proporción de 1:2 entre las bases permite aprovechar de manera eficiente el material disponible y obtener un volumen considerable.

Ten en cuenta

El apotema del tronco de pirámide es la distancia inclinada entre las dos bases, medida en una cara lateral, y es perpendicular a las bases en un tronco regular.

En la figura se reconoce el desarrollo de un tronco de pirámide y el apotema.

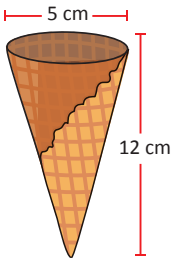




Cono de revolución: propiedades

Situación: Bañando el helado

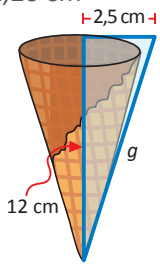
En una heladería, se bañan los conos con chocolate completamente. Se usan 0,5 g de chocolate por cm². Si las dimensiones del cono son las mostradas en la imagen, ¿cuántos gramos se necesitan para 10 conos? Además, ¿cuánto helado contiene cada cono?



Sabemos que para cubrir el barquillo de chocolate tenemos que determinar el área lateral (A_L).

Primero, calculamos la generatriz (g) utilizando el teorema de Pitágoras.

$$g = \sqrt{r^2 + h^2} = \sqrt{(2{,}5)^2 + 12^2} = \sqrt{6{,}25 + 144} = \sqrt{150{,}25} \approx 12{,}26 \text{ cm}$$



Entonces, $A_L = \pi rg = \pi(2{,}5)(12{,}26) = 3{,}14(30{,}65) = 96{,}24 \text{ cm}^2$

Ahora, determinamos la cantidad de chocolate para un cono.

Chocolate por cono = 0,5 (96,24) = 48,12 g

Para 10 conos: total de chocolate = 10(48,12) = 481,2 g

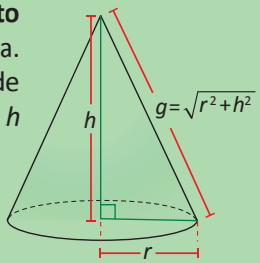
Para determinar la cantidad de helado en cada cono, hallaremos el volumen (V) del cono.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi\,(2{,}5)^2\,(12) = \frac{1}{3}\pi(75) = 25\pi = 78{,}5 \text{ cm}^3$$

Por lo tanto, se necesitan 481,2 g de chocolate para cubrir los 10 conos y cada cono contiene aproximadamente 78,5 cm³ de helado.

El análisis previo nos muestra que el **cono circular recto** es un sólido con una base circular y una superficie curva. Se forma al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos, donde el radio es r y la altura es h (cateto perpendicular a la base).

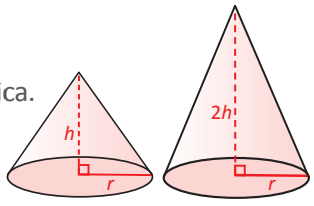
Al desplegar su superficie lateral, se obtiene un sector circular cuyo radio es la generatriz (g) del cono y cuyo arco mide $2\pi r$.



Situación: ¿Doblar la altura, doblar todo?

Se muestran dos conos con el mismo radio, pero uno tiene el doble de altura. Un estudiante dice: "Si el segundo es el doble de alto, también tendrá el doble de volumen, de área lateral y de área total". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

Sabemos que $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

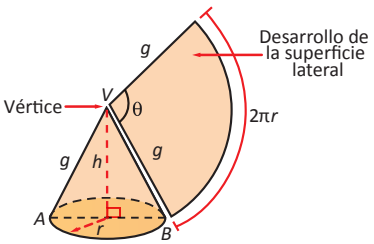


- Si se duplica la altura, el volumen también se duplica.
- Área lateral: $A_L = \pi rg$; con $g = \sqrt{r^2 + h^2}$
  Al duplicar la altura, la generatriz no se duplica; por lo tanto, el área lateral no se duplica.
- Área total: $A_T = \pi r(g + r)$. El área total tampoco se duplica.

Por tanto, las afirmaciones son falsas parcialmente. El volumen sí se duplica, pero las áreas no.

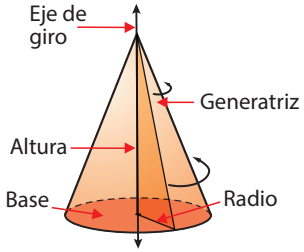
Recuerda

En un cono circular recto, la superficie lateral se desarrolla como un sector circular, cuya generatriz (g) es el radio del sector.



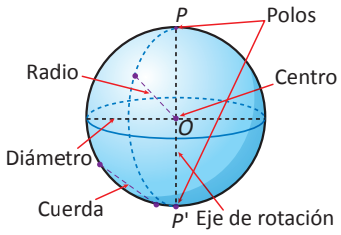
Ten en cuenta

Elementos geométricos del cono de revolución



Recuerda

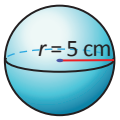
Elementos de una esfera



Esfera: propiedades

Situación: ¿Al duplicar el radio se duplica todo?

Lucía presenta esferas decorativas y afirma esto: "Hice una esfera con radio de 5 cm. Ahora haré otra de 10 cm, así duplico el volumen y el área". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.



Analizamos.

- Área superficial de una esfera con radio r: $A = 4\pi r^2$

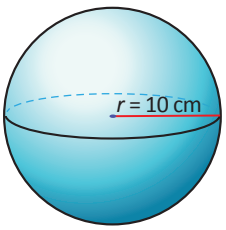
  Si se duplica el radio, el área se multiplica por $(2r)^2 = 4r^2 \Rightarrow A_2 = 4A_1$

  El área se cuadruplica, no se duplica.

- Volumen de una esfera: $V_{inicial} = \frac{4}{3}\pi r^3$

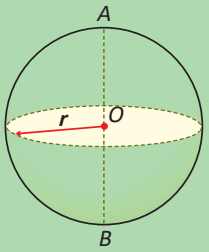
  Si se duplica el radio, el volumen se multiplica por lo siguiente: $(2r)^3 = 8r^3 \Rightarrow V_2 = 8V_1$

  El volumen se multiplica por 8, no por 2.



Por lo tanto, la afirmación de Lucía es incorrecta. Al duplicar el radio, el área se cuadruplica y el volumen se octuplica.

De acuerdo con lo analizado, la **esfera** es un sólido de revolución que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro. El resultado es una figura tridimensional formada por todos los puntos del espacio que están a la misma distancia (radio) de un punto fijo llamado centro.



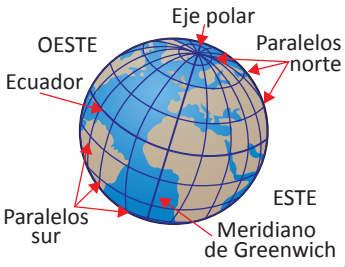
Su volumen (V) y área (A) se determinan así:

$V = \frac{4}{3}\pi r^3$ $\quad A_s = 4\pi r^2$

- r: radio
- A_s: área superficial

¿Sabías que...?

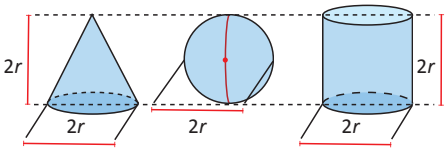
La Tierra no es una esfera perfecta. Debido a su rotación, se encuentra ligeramente achatada en los polos. Esta forma se llama **geoide**.



Situación: Relación entre el cono, la esfera y el cilindro

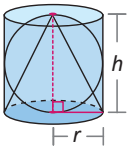
En una exposición, se comparan un cilindro, un cono y una esfera con el mismo radio. Un estudiante afirma lo siguiente: "Como tienen las mismas dimensiones, sus volúmenes deben ser iguales". ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta con procedimientos.

Supongamos que el radio de la base es r y la altura es $h = 2r$ (para que la esfera encaje perfectamente en el cilindro).



Comparamos los volúmenes del cono, esfera y cilindro, en ese orden.

Tomamos los coeficientes y multiplicamos por 3 a todos, obtenemos la relación 2:4:6. Por tanto, la afirmación es incorrecta, los volúmenes guardan la proporción 1:2:3.



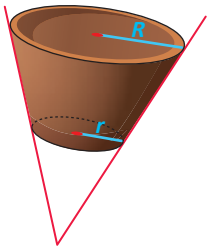
$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi r^2(2r) = 2\pi r^3$

$V_{cono} = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2(2r) = \frac{2}{3}\pi r^3$

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3$

Tronco de cono: propiedades

Situación: La maceta sostenible



José quiere fabricar una maceta con forma de tronco de cono invertido que pueda contener cuatro litros de agua como máximo. Para optimizar el uso de material, evalúa diferentes combinaciones de radios y altura $h = 15$ cm que mantengan constante el volumen, buscando minimizar la superficie total.

¿Cuál modelo recomendarías para minimizar material sin reducir la capacidad? Justifica tu elección.

Una maceta con forma de tronco de cono se obtiene restando dos conos:

$$V_{\text{maceta}} = V_{\text{cono grande}} - V_{\text{cono pequeño}}$$

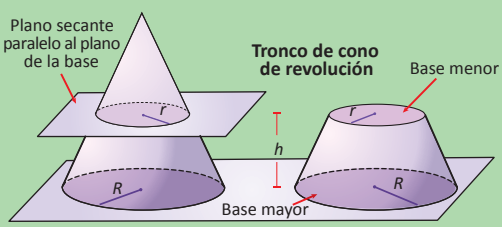
Con volumen y altura fijos, el área total del tronco de cono aumenta cuando los radios están más distantes y se minimiza cuando son más cercanos. La tabla siguiente muestra que ese equilibrio reduce el uso de material sin perder volumen:

Considera: $\pi = 3{,}14$

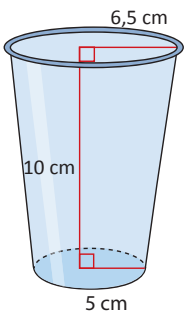
Radio mayor (R)	Radio menor (r)	Altura (h)	Suma de área de bases (cm^2)	Área lateral (cm^2)	Área total (cm^2)	Volumen de la maceta (cm^3)
10	3	15	342,26	675,69	1017,95	2182,30
9	5	15	332,84	682,44	1015,28	2370,70
8	6	15	314,00	665,24	979,24	2323,60
7	6	15	266,90	613,66	880,56	1993,90

El macetero, con radios más cercanos ($R = 8$ cm y $r = 6$ cm), usa menos material para la maceta sin reducir su capacidad de cuatro litros, logrando un equilibrio óptimo entre el tamaño de las bases y la forma del tronco de cono.

A partir de lo trabajado, concluimos que un **tronco de cono** (o cono truncado) es un sólido geométrico que resulta de cortar un cono de revolución con un plano paralelo a su base eliminando la parte superior. Posee dos bases circulares de diferentes radios (R y r) y una altura (h) perpendicular entre ellas.



Por ejemplo, para hallar el área lateral, el área total y el volumen del vaso cerrado mostrado, con radio menor de 5 cm, radio mayor de 6,5 cm y altura de 10 cm, tenemos lo siguiente:



	Expresión utilizada	Resultado
Área lateral (A_L)	$A_L = \pi \cdot g\,(R + r) = \pi \cdot 10{,}11 \cdot (6{,}5 + 5)$	$A_L = 365{,}26$ cm^2
Área total (A_T)	$A_T = \pi\,[g\,(R + r) + R^2 + r^2] = \pi \cdot (183{,}515)$	$A_T = 576{,}53$ cm^2
Volumen (V)	$V = \frac{1}{3}\pi h\,(R^2 + r^2 + R \cdot r) = \frac{1}{3}\pi \cdot 10 \cdot (99{,}75)$	$V = 1044{,}58$ cm^3

Ten en cuenta

Cono trunco

- Área lateral (A_L):
  $A_L = \pi g(R + r)$
- Área total (A_T):
  $A_T = A_L + \pi R^2 + \pi r^2$
- Volumen (V):
  $V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + Rr + r^2)$

Recuerda

En un cono trunco como el vaso que se muestra se reconoce lo siguiente:

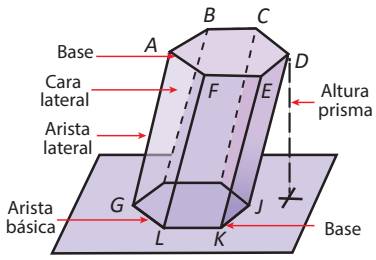
- **Bases:** dos círculos paralelos de radios R (base mayor) y r (base menor).
- **Altura (h):** distancia entre las dos bases.
- **Generatriz (g):** longitud del lado inclinado, relacionada con la altura y los radios mediante el teorema de Pitágoras:
  $g = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran cuerpos geométricos como cilindros, conos y esferas a partir de sus dimensiones clave y relaciones de volumen.
- Representa los sólidos de revolución en tablas expresando la fracción de volumen entre cono y cilindro.
- Emplea procedimientos y fórmulas para calcular áreas y volúmenes comparando eficiencia y uso de material.

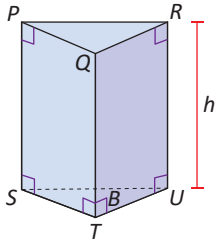
Recuerda

Elementos de un prisma



Además, un prisma es regular si su base es regular.

En un **prisma recto** se tiene lo siguiente:



P_B: perímetro de la base

h: longitud de la arista lateral

- Área lateral (A_L)

$$A_L = P_B \times h$$

- Área total = A_L + 2 área de la base (B)
- Volumen = Área de la base × altura

Practica valores

- Apoya el uso equitativo de recursos para que todos tengan acceso a los materiales de trabajo.
- Contribuye activamente al logro de los objetivos del equipo.

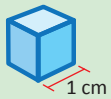
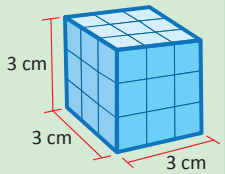
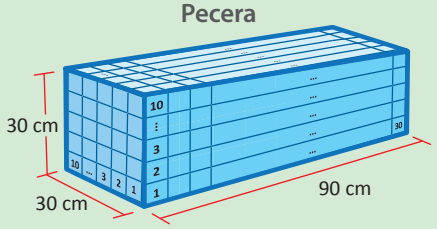
MEDIDAS DE FORMAS TRIDIMENSIONALES

Prismas de base regular: área lateral, total y volumen

Situación: Construcción de una pecera

Una pecera sin tapa tiene las siguientes dimensiones: 90 cm de largo, 30 cm de ancho y 30 cm de alto. ¿Qué volumen de agua puede contener?

Aplicamos una composición por niveles: desde el cubo unitario, pasando por agrupaciones medianas, hasta construir la pecera completa.

Cubo pequeño	Cubo mediano	Pecera
		
Cada cubo representa un volumen unitario de 1 cm³ (1 cm × 1 cm × 1 cm).	Contiene 3 × 3 × 3 = 27 cubos de 1 cm³, es decir, 27 cm³.	Contiene cubos medianos: • A lo largo: 90 ÷ 3 = 30 • A lo ancho: 30 ÷ 3 = 10 • A lo alto: 30 ÷ 3 = 10 En total, caben 30 × 10 × 10 = 3000 cubos medianos de 27 cm³ de volumen. Por tanto, el total es 3000 × 27 = 81 000 cm³.

La experiencia anterior permite reconocer que el **prisma recto** es un poliedro con dos bases congruentes y paralelas, cuyas aristas laterales son perpendiculares a las bases y las caras son rectangulares. Para calcular el perímetro de la base (P_B), el área lateral (A_L), el área total (A_T) o el volumen (V), se pueden emplear las expresiones que se muestran en la caja **Recuerda**.

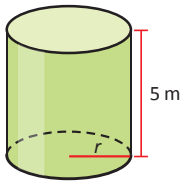
Comparamos dos prismas rectos (base cuadrada y base octogonal) de igual altura y misma área de la base:

Característica	Prisma A: base cuadrada	Prisma B: base octogonal	Comparación
Área de la base (A_B)	900 cm²	900 cm²	Igual (condición para volumen constante)
Altura (h)	30 cm	30 cm	Igual (condición de comparación)
Volumen ($A_B \times h$)	27 000 cm³	27 000 cm³	Igual (condición esencial)
Perímetro de la base (P_B)	120 cm	109,2 cm	Diferente o menor en el octágono
Área lateral ($P_B \times h$)	3600 cm²	3276 cm²	El prisma B tiene menos área.
Área total aproximada	5400 cm²	5076 cm²	Mayor superficie total en el prisma A

Cilindro de revolución: área y volumen

Situación: Contenedor de café en grano

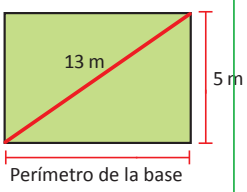
Un depósito cilíndrico contiene café para exportación. Al desplegarlo lateralmente se forma un rectángulo con diagonal de 13 m y altura de 5 m. ¿Qué volumen puede almacenar?



El desarrollo lateral del cilindro es un rectángulo de base $2\pi r$ y altura h. Aplicamos el teorema de Pitágoras a la diagonal del rectángulo.

$$d^2 = (2\pi r)^2 + h^2 \Rightarrow 169 = 4\pi^2 r^2 + 25 \Rightarrow r = \frac{6}{\pi}$$

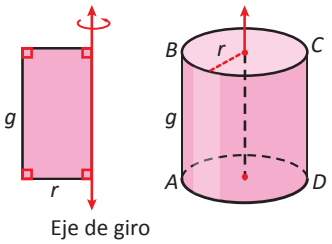
Volumen del depósito: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = \pi\left(\frac{6}{\pi}\right)^2 5 = 57{,}3\ \text{m}^3$



Por lo tanto, el depósito puede almacenar aproximadamente 57,3 m³ de café en grano.

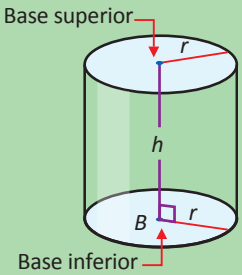
Recuerda

Un cilindro se forma al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.



g: generatriz

r: radio del cilindro



De acuerdo con lo analizado, un **cilindro recto** se forma al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. La altura del cilindro es el lado fijo. El desarrollo plano incluye dos círculos paralelos y congruentes (bases) y un rectángulo (lateral). En el desarrollo, el rectángulo tiene como base $2\pi r$ y altura h.

Volumen del cilindro: $V = A_B \times h = \pi r^2 h$

Área de la superficie lateral: $A_L = P_B \times h = 2\pi rh$

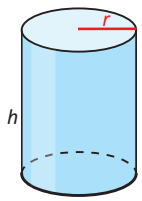
Área total: $A_T = A_L + 2A_B = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r(h + r)$

Situación: ¿Basta una base circular para ser cilindro?

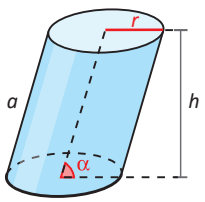
Andrea presentó un sólido con una base circular abajo y una base ovalada arriba, unidas por una superficie curva. Ella afirma: "Este sólido es un cilindro porque tiene una base circular y una superficie curva". Dibuja el sólido que presentó Andrea y compáralo con un cilindro verdadero. ¿Tiene razón? Justifica tu respuesta.

La afirmación de Andrea no es correcta. Para que sea un cilindro, debe tener dos bases circulares, iguales y paralelas, tal como se muestra.

- Cilindro recto: bases circulares alineadas y congruentes.
- Cilindro oblicuo: bases circulares no alineadas, pero iguales y paralelas, generatriz inclinadas (a).



Cilindro recto



Cilindro oblicuo

En cambio, el sólido de Andrea tiene una base circular abajo y una base ovalada arriba. Las bases no son iguales ni paralelas. Aunque tenga superficie curva, eso no lo convierte en cilindro. Otros sólidos, como conos o elipsoides, también tienen curvas y no son cilindros.

Evalúa tus progresos

- Modela y representa cuerpos geométricos como prismas rectos y cilindros a partir de sus dimensiones y desarrollos planos, identificando sus elementos y características.
- Establece la relación entre el área de la base, el área lateral, el área total y el volumen, reconociendo el área como medida del material y el volumen como medida de la capacidad.
- Emplea procedimientos para calcular áreas y volúmenes de prismas y cilindros, comparando la eficiencia del uso del material.
- Justifica qué figura resulta más adecuada según costo y superficie sustentando decisiones en contextos de diseño y construcción.

Actividad lúdica



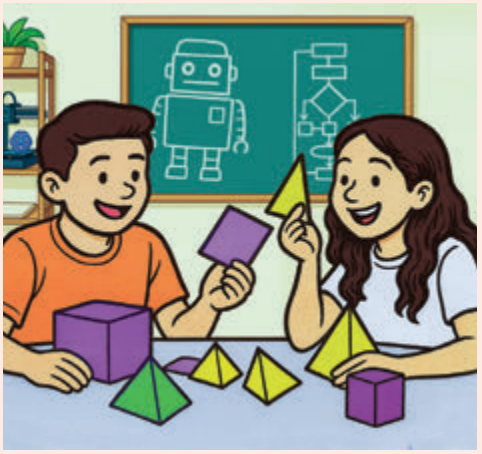
¡Analiza jugando! Observa las reglas del juego, revisa estrategias y argumenta tus ideas con sentido matemático.

Arquitectos de poliedros en GeoPrint3D

1. Situación

El equipo de GeoPrint3D se enfrenta a un gran desafío. Nuestra impresora 3D genera piezas 2D para construir sólidos geométricos, pero los manuales de ensamblaje se han perdido.

En equipos de trabajo, diseñen un algoritmo (o procedimiento) para ensamblar un sólido 3D a partir de piezas 2D, y sigan las instrucciones al pie de la letra aplicando transformaciones geométricas y bucles.



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Participantes

- Jefe de Análisis: observa las piezas 2D y la indicación para el trabajo 3D sin tocarlas. Indica al programador qué transformaciones aplicar.
- Programador de Instrucciones: redacta un algoritmo claro para transformar las piezas 2D en la base del sólido 3D. Incluye bucles y pasos precisos para el ensamblador.
- Ensamblador (robot): arma el sólido 3D siguiendo al pie de la letra las instrucciones del algoritmo.
- Verificador: lee en voz alta el algoritmo y supervisa que el ensamblaje se ejecute correctamente señalando errores y asegurando precisión.

b. Materiales

- Bolsa A (piezas 2D): figuras geométricas recortadas en cartulina o impresas, incluyendo triángulos, cuadrados, rectángulos, pentágonos y hexágonos.
- Bolsa B (indicación de trabajo 3D): tarjetas con imágenes o nombres de sólidos 3D (como prismas y pirámides triangulares, rectangulares, pentagonales o hexagonales) que indican construir.
- Materiales adicionales: cartulina, tijeras, cinta y pegamento.

Tu propósito de aprendizaje

Interpreta prismas rectos y cilindros a partir de sus dimensiones y desarrollos planos, establece relaciones entre área de base, área lateral y volumen, emplea procedimientos para calcular áreas y capacidades, argumenta cuál figura resulta más eficiente en material para un volumen fijo, y sustenta su clasificación geométrica.

Practica valores

- Actúa con empatía hacia quienes sufren los efectos de la contaminación o cambios climáticos.
- Contribuye al cumplimiento de acuerdos grupales y apoya a tu equipo hasta finalizar la tarea.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

a. Etapa 1: Sorteo y análisis

Cada equipo recibe lo siguiente:

- Piezas 2D (bolsa A): formas geométricas base; por ejemplo, triángulos, cuadrados, rectángulos.
- Indicación de trabajo (bolsa B): sólido 3D a construir.
- El equipo acuerda qué transformaciones aplicar a las piezas 2D para formar el sólido. Por ejemplo:
  - Indicación: prisma rectangular.
  - Pieza inicial: triángulo.
  - Transformaciones: traslación y reflexión para formar el rectángulo (base).
  - Estrategia: duplicar la base y repetir cuatro veces las caras laterales, luego ensamblar el prisma rectangular.

b. Etapa 2: Escritura del algoritmo

El programador redacta las instrucciones en pseudocódigo, por ejemplo, para un prisma rectangular usando triángulos:

- Tomar el triángulo inicial.
- Aplicar reflexión y traslación para formar un rectángulo (base).
- Repetir dos veces para generar las bases superior e inferior.
- Repetir cuatro veces para formar las caras laterales (base × altura).
- Unir la base inferior con las cuatro caras laterales.
- Colocar la base superior para completar el prisma.

c. Etapa 3: Ensamblaje (simulación del robot)

- El ensamblador construye el sólido guiado por el algoritmo. Puede usar las instrucciones de su equipo o de otro.
- El verificador lee y comprueba que se sigan correctamente los pasos.

d. Etapa 4: Depuración y optimización

- El equipo revisa si su algoritmo tuvo errores; por ejemplo, en ángulos, piezas mal duplicadas e instrucciones ambiguas.
- Corrigen y reescriben una versión optimizada reduciendo pasos con bucles.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué relación existe entre el número de lados de la base y la cantidad de caras laterales?

b. Si cambias la forma de la base (triángulo, cuadrado, pentágono, hexágono), ¿qué cambia en las características del prisma (número de caras, aristas, vértices, área y volumen)?

c. ¿Qué patrones descubriste al comparar la forma de la base y la cantidad de caras laterales al cambiar el tipo de poliedro?

Evalúa tus progresos

- Modela cuerpos geométricos representados por prismas y cilindros a partir de sus dimensiones y unidades cúbicas.
- Representa el desarrollo plano del cilindro con dos círculos y un rectángulo, y comunica las fórmulas de área total y volumen, así como los elementos de los poliedros.
- Emplea procedimientos para obtener las áreas y volúmenes utilizando el teorema de Pitágoras para determinar dimensiones internas como radios o perímetros.
- Argumenta formas geométricas según la relación área-volumen, y evalúa la validez de comparar prismas con bases distintas por medio de ejemplos.

UNIDAD

3

Diseñamos viviendas seguras y sostenibles para nuestras comunidades



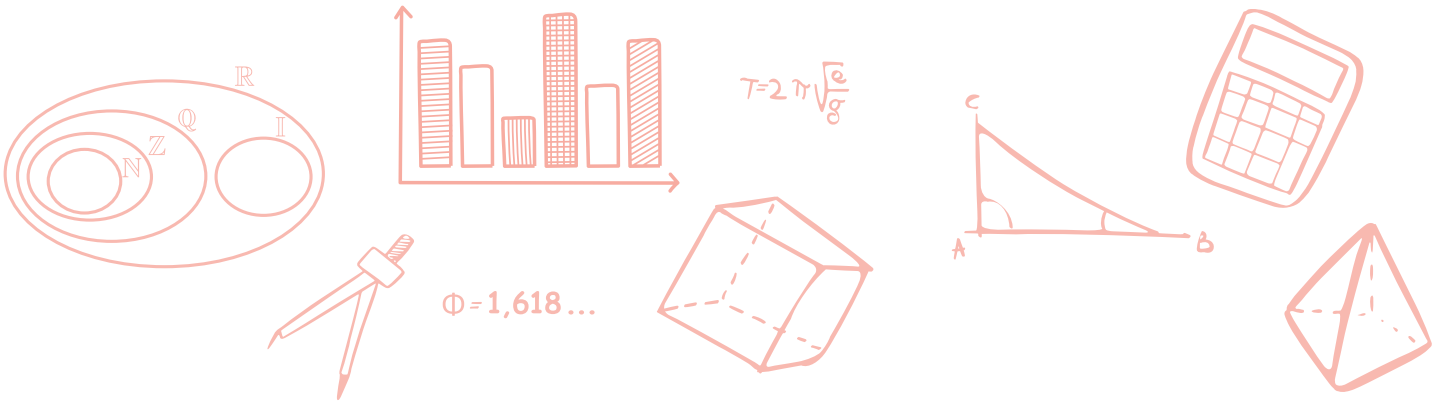
OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

11 CIUDADES Y COMUNIDADES SOSTENIBLES

Este objetivo busca lograr que las ciudades y comunidades sean inclusivas, seguras, resilientes y sostenibles mediante una adecuada planificación urbana y el acceso equitativo a servicios básicos.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Uso eficiente de materiales, espacio y energía en la construcción
- Incorporación de tecnologías sostenibles, como los paneles solares
- Implementación de soluciones habitacionales que mejoran el bienestar familiar



En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización

Construyo mis conocimientos

Operaciones con números racionales

- Intervalos con números racionales y su representación
- Operaciones con intervalos: unión, intersección
- Operaciones con intervalos: diferencia, diferencia simétrica y complemento

Función cuadrática

- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición, tipos de problemas
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: formas de representación
- Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: transformaciones gráficas

Función exponencial

- Función exponencial $f(x) = a^x$: representación tabular y gráfica, propiedades

Medidas de formas bidimensionales

- Razones trigonométricas de ángulos agudos y notables
- Identidades trigonométricas
- Ángulos de elevación y de depresión



Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional
  - Respeto a toda forma de vida
- Enfoque búsqueda de la excelencia
  - Flexibilidad y apertura
  - Superación personal

Fuente: Shutterstock (2024).

INVESTIGAMOS



Explora la situación, asume un rol, resuelve y explica tus ideas matemáticas con apoyo del anexo.

SITUACIÓN

Promoviendo una construcción segura y planificada

El Ministerio de Vivienda, Construcción y Saneamiento informó que el 70 % de las viviendas en el país son autoconstruidas, lo que conlleva a problemas como la falta de planificación formal, el uso ineficiente de materiales, presupuestos inexactos y deficiencias en el diseño arquitectónico. Estas condiciones impactan directamente en la seguridad y calidad de las edificaciones.

Como ingeniero civil, tu misión es diseñar un proyecto de construcción que sea eficiente tanto en términos de costos, materiales y arquitectura.



Fuente: *Diario Correo* (2021).

¿Qué estrategias específicas podrías implementar para optimizar al máximo el uso de materiales y la reducción de costos sin comprometer la seguridad y la calidad de la construcción?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

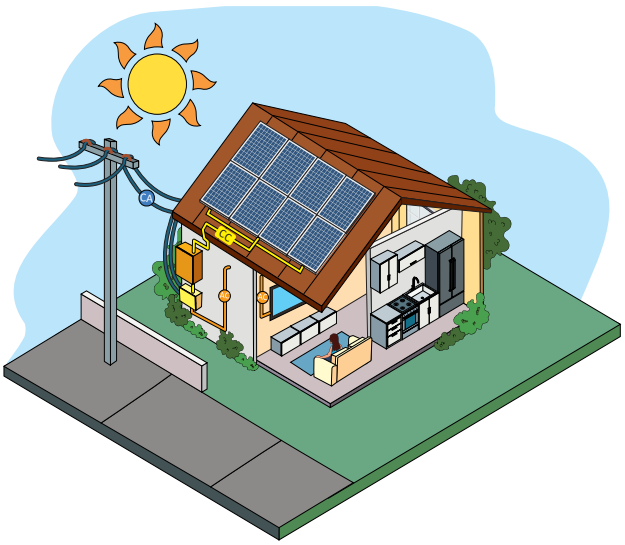
- **Recolecta** información clave como el número de integrantes de la familia, características del terreno (plano o inclinado), necesidades de ambientes interiores y exteriores básicos (sala, dormitorio, cocina, baño, jardín, garaje). Organiza los datos en una ficha de análisis y selecciona un modelo de vivienda (de uno o dos pisos) que responda a los estándares y requerimientos identificados.
- **Determina** las dimensiones de los ambientes considerando el área y el volumen de cada ambiente (sala, dormitorios, cocina, baño…) y usando rangos referenciales. Representa los valores con expresiones racionales en forma de intervalos y sobre la recta numérica tomando en cuenta las condiciones del terreno.
- **Compara** costos según materiales empleados. Calcula el costo total para tres alternativas constructivas (económica, estándar y reforzada) considerando precios unitarios, tipos de estructura (bloques, paneles, hormigón armado). Representa los resultados en intervalos y analiza cuál opción optimiza mejor el presupuesto.
- **Utiliza** datos de precios, transporte y costos fijos para construir una función del tipo $C(x) = ax^2 + bx + c$. Representa la gráfica, identifica el vértice y analiza cómo varía el costo según la cantidad de concreto u otro material estructural adquirido.
- **Determina** la altura y la longitud de las vigas según el ángulo de inclinación (razón trigonométrica) del techo y el ancho de la vivienda. Compara opciones de cubierta (tejas, losas, estructuras ligeras) y evalúa cuál garantiza mayor estabilidad y eficiencia estructural teniendo en cuenta la cimentación y muros de contención si el terreno lo requiere.

SITUACIÓN

Diseño de una vivienda sostenible

Según World Green Building Council, los edificios generan el 39 % de las emisiones de carbono a nivel mundial, mientras que las viviendas sostenibles pueden reducir el consumo energético entre un 30 % y un 40 %. Sin embargo, muchas viviendas aún se construyen sin considerar criterios de sostenibilidad, lo que genera un elevado consumo de energía y un impacto ambiental significativo.

Como arquitecto urbanista, tu misión es diseñar viviendas que optimicen el uso de recursos energéticos y materiales garantizando eficiencia y sostenibilidad.



¿Qué características y estrategias específicas debes incorporar en el diseño de viviendas para maximizar la eficiencia energética y reducir el impacto ambiental asegurando un modelo sostenible y funcional a largo plazo, que integre de forma eficiente el uso de paneles solares para lograr una captación óptima de energía?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Analiza** una tabla de uso diario de energía (electrodomésticos), estima el consumo mensual y representa el resultado como un intervalo. Luego, compara tu resultado con los rangos de consumo promedio y sugiere un tipo de panel solar adecuado.
- **Representa** con una función cuadrática el área óptima del techo para instalar paneles solares. Representa su gráfica, identifica el vértice y explica qué dimensiones permiten captar la mayor cantidad de energía solar considerando restricciones del espacio.
- **Compara** materiales de construcción ecológicos analizando tablas con diferentes materiales de construcción y considerando su costo por metro cuadrado y el nivel de impacto ambiental. Representa los datos en intervalos y justifica qué opción optimiza mejor el presupuesto familiar sin comprometer la sostenibilidad del proyecto.
- **Modela** el ahorro económico al usar paneles solares mediante una función cuadrática que relacione el tiempo (en años) con el ahorro económico acumulado por el uso de paneles solares. Interpreta su gráfica e identifica el punto donde inicia el ahorro real.
- **Calcula** el ángulo óptimo de inclinación para instalar paneles solares según la ubicación geográfica aplicando razones trigonométricas. Explica cómo este ángulo optimiza la captación solar e influye en el diseño del techo.

Anexo A: Promoviendo una construcción segura y planificada

1. Encuesta de recolección de información familiar para el diseño de vivienda

1. **Información familiar**
   a. Número de integrantes: _____ Edades: _____
   b. Personas con necesidades especiales (especificar): _____
2. **Características del terreno**
   a. Tipo de terreno: ☐ plano ☐ inclinado
   b. Condiciones particulares (rocoso, arcilloso, inundable): _____
3. **Necesidades de ambientes**
   a. Dormitorios: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3 ☐ 4 o más
   b. Baños: ☐ 1 ☐ 2 ☐ 3
   c. Ambientes adicionales necesarios: ☐ sala ☐ comedor ☐ cocina ☐ lavandería ☐ Otros: _____
4. **Ambientes exteriores**
   a. ¿Requiere jardín o patio? ☐ Sí ☐ No
   b. ¿Garaje? ☐ No ☐ Sí, ¿para cuántos vehículos? _____
5. **Preferencias y estilos arquitectónicos**
   a. Tipo de construcción preferida: ☐ 1 piso ☐ 2 pisos
   b. Estilo deseado (moderno, tradicional, mixto): _____
6. **Instalaciones básicas**
   a. Instalación eléctrica: ☐ básica ☐ completa (iluminación, tableros avanzados)
   b. Instalación sanitaria (agua y desagüe): ☐ básica ☐ completa
   c. Instalación de gas doméstico: ☐ Sí ☐ No
7. **Preferencias sobre acabados**
   a. Pisos: ☐ cerámico ☐ porcelanato ☐ madera ☐ Otro: _____
   b. Paredes interiores: ☐ pintura ☐ yeso ☐ enchape
   c. Puertas y ventanas: ☐ madera ☐ aluminio ☐ PVC ☐ Otro: _____
   d. Acabados para baños y cocina (grifería, muebles específicos): _____
8. **Presupuesto**
   a. Presupuesto máximo estimado para la construcción: S/ _____

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Rangos de áreas y volúmenes por tipo de ambiente

Ambiente	Área (m^2)	Volumen (m^3)
Dormitorio	9-15	22-36
Sala	15-25	36-60
Cocina	6-12	14-28
Baño	3-6	7-14
Comedor	10-18	24-43

3. Costos referenciales de materiales de construcción

Material	Precio unitario (S/)	Cantidad estimada
Ladrillo (unidades)	0,50	8000
Cemento (bolsa)	30,00	100
Arena (m^3)	70,00	15
Fierro (kg)	4,20	900
Concreto premezclado (m^3)	270,00	10

4. Tarifas referenciales de servicios por zona

Zona	Mano de obra (S/ por día)	Transporte (S/ por viaje)	Maquinaria (S/ por hora)
Urbana	80	150	120
Periurbana	65	180	100
Rural	50	200	90

5. Cálculo de altura de techos usando razones trigonométricas

Ángulo (°)	Base (m)	Altura (m)
15°	4,00	1,07
30°	4,00	2,31
45°	4,00	4,00
60°	4,00	6,93

6. Análisis técnico y económico de inclinación de techos

Ángulo (°)	Altura (m)	Longitud de viga (m)	Costo de vigas (S/)	Pendiente ($tan\theta$)	Aplicación recomendada
15°	1,07	4,14	1242	0,268	Zonas secas/vientos fuertes
25°	1,87	4,41	1323	0,466	Uso general (balance ideal)
30°	2,31	4,62	1386	0,577	Zonas lluviosas o paneles solares
45°	4,00	5,66	1698	1,000	Alta pendiente para evacuación rápida
60°	6,93	8,00	2400	1,732	Cubiertas inclinadas con entretecho útil

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Diseño de una vivienda sostenible

1. Encuesta sobre consumo de energía eléctrica en hogares

Objetivo: Analizar el consumo eléctrico en viviendas para optimizar el diseño energético y seleccionar un tipo de panel solar adecuado.

1. Datos generales del hogar

a. Zona: ☐ urbana ☐ rural

b. Tipo de vivienda: ☐ casa ☐ departamento ☐ Otro: _____

c. N.° de residentes: _____

d. Instalación eléctrica: ☐ monofásica ☐ bifásica ☐ trifásica

e. Problemas frecuentes: ☐ cortes de luz ☐ sobrecalentamiento ☐ cortocircuitos

2. Consumo eléctrico promedio

a. ¿Cuál es su consumo mensual aproximado?

☐ 0-150 kWh ☐ 151-300 kWh ☐ 301-500 kWh ☐ Más de 500 kWh

b. ¿Qué horario presenta mayor consumo eléctrico?

☐ 6:00 a. m. - 12:00 p. m. ☐ 12:00 p. m. - 6:00 p. m. ☐ 6:00 p. m. - 12:00 a. m.

3. Equipos y uso diario

a. Marca los aparatos electrodomésticos y aparatos electrónicos que tienes en casa.

☐ refrigerador ☐ lavadora ☐ aire acondicionado ☐ ventilador ☐ TV

☐ computadora ☐ microondas ☐ Otros: _____

b. Completa la tabla solo de los aparatos que tienes en casa.

Electrodoméstico	Potencia (W)	Horas/día	Días/semana
Refrigerador			
Ventilador o A/C			
Iluminación principal			7
Televisor			

c. ¿Cuántas bombillas tienes en casa? _____ ¿Cuántas son LED? _____

d. ¿Qué porcentaje de bombillas son LED?

☐ 0-25 % ☐ 26-50 % ☐ 51-75 % ☐ 76-100 %

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Catálogo de paneles solares para viviendas sostenibles

Modelo	Potencia (W)	Eficiencia (%)	Medidas (mm)	Peso (kg)	Costo (USD)
Canadian Solar HiKu	400	20,3	1722 × 1134 × 35	22,5	180-220
LONGi Solar LR4-72	450	21,2	2094 × 1038 × 35	24,0	200-240
SunPower Maxeon 6	420	22,8	1690 × 1046 × 40	19,6	280-320
Jinko Solar Tiger	380	18,7	2015 × 1002 × 40	23,0	150-180
Trina Solar TSM-DE15	395	19,1	1765 × 1096 × 35	21,8	160-190

3. Costos de servicios y ahorros potenciales

Servicio	Costo mensual (S/)	Ahorro potencial (%)
Electricidad	150	40
Agua caliente	70	15
Calefacción y refrigeración	100	20

4. Valores para ángulo de inclinación solar

Ángulo (°)	h (a = 1,5 m)	h (a = 2,7 m)	h (a = 4 m)
15°	0,38	0,69	1,03
20°	0,51	0,92	1,36
25°	0,63	1,14	1,69
30°	0,75	1,35	2,00
35°	0,86	1,54	2,29
40°	0,96	1,73	2,57
45°	1,06	1,90	2,82
55°	1,22	2,21	3,27
60°	1,29	2,33	3.46
65°	1,36	2,44	3,62
70°	1,40	2,53	3,75
75°	1,44	2,60	3,86
55°	1,22	2,21	3,27

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Exploramos



Practica lo que has aprendido. Estas actividades te ayudarán a construir nuevos y mejores aprendizajes.

1. Registro de tiempos en la competencia

En una competencia escolar de natación de 200 metros libres, se registraron los siguientes tiempos por cada nadador:

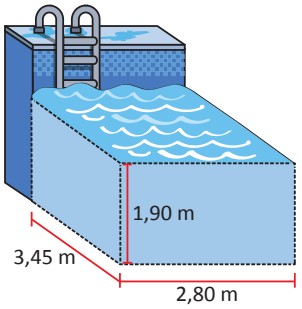
Nadador	Tiempo (minutos: segundo, centésima de segundo)
Aníbal Pérez	2:05,10
Juan Quiroga	1:53,15
Gabriel Ochoa	1:48,25
Celso Rivadeneyra	2:00,45

a. ¿Cuánto tiempo más tardó el nadador del tercer lugar con respecto al que llegó en primer lugar?

b. El tiempo de 1:53,15 se puede expresar como 1,5315 min. ¿Es correcto ello? Justifica tu respuesta mostrando la conversión entre minutos, segundos y milésimas de segundos.

2. Colocación de baldosas en piscinas

Rodrigo es contratado para cubrir con baldosas el piso y las paredes internas de tres piscinas idénticas, cuyas dimensiones son estas: 3,45 m de largo, 2,80 m de ancho y 1,90 m de profundidad.



a. Plantea una expresión que permita obtener el área total de las tres piscinas en las que se colocarán las baldosas.

b. Rodrigo cobrará S/25 por cada metro cuadrado de área cubierta de baldosas que coloque. Si recibe un adelanto de S/1200 y el resto se lo pagarán en dos quincenas, ¿cuánto recibirá cada quincena?

3. Presupuesto público del país

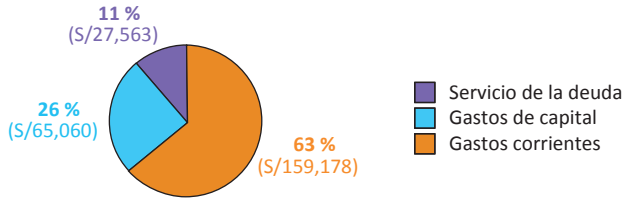
Los gráficos muestran la composición del Presupuesto Público 2025 por categorías: gastos corrientes, gastos de capital y servicio de deudas, con su distribución en porcentajes.

a. Usando el gráfico de categorías, identifica la de mayor y menor asignación, y halla la diferencia absoluta (S/) y relativa (%) entre ellas.

b. Del gráfico según funciones, ¿a qué sector le corresponde 8,4 % de variación y cuánto representa en soles? Asimismo, ¿qué porcentaje del presupuesto representan juntos los sectores educación y salud?

c. Supón que dispones de quinientos millones de soles para reasignar; transfiérelos desde el sector de menor asignación al de mayor asignación. Explica la distribución empleando operaciones y propiedades.

Presupuesto de 2025 según categorías (millones de soles y porcentaje, %)



Distribución del presupuesto público 2025, según funciones (millones de soles)

Presupuesto en millones de soles		Variación (S/) 2025/2024	Variación (%) 2025/2024
Educación	49 611	3062	6,6
Salud	30 373	885	3,0
Transporte	23 114	992	4,2
Orden público y seguridad	15 532	1198	8,4
Protección social	10 421	1113	12,0
Justicia	8826	536	6,5
Agropecuaria	7495	338	5,5
Saneamiento	7044	509	7,8
Defensa y seguridad nacional	6255	214	3,5
Ambiente	4656	319	7,3
Vivienda y desarrollo urbano	3518	318	9,9
Cultura y deporte	2692	520	23,9

Fuente: Adaptado de *El Comercio* (2024).

4. Ahorro energético familiar

En la tabla se muestra información sobre el pago mensual de una vivienda al emplear luminarias de diversos tipos. El costo de la electricidad es de S/0,64 por kWh y el tiempo de encendido de cada luminaria es de seis horas diarias durante 30 días al mes.

a. Completa la tabla con la información requerida.

Luminaria	N.°	Consumo por hora (kWh)	Consumo mensual (kWh)	Pago mensual (S/)
Bombillo (60 W)	5	0,06		34,56
Halógena (70 W)	3			24,19
Dicroico (5 W)	4		3,6	
LED (10 W)	8	0,01		9,22

b. Diseña un plan para reducir el gasto eléctrico mensual en al menos un 60 %, considerando las luminarias de la tabla o alternativas, con seis horas de encendido o más/menos. Justifica los cambios con cálculos de tipo, cantidad y uso.

5. Reconociendo nociones y propiedades

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Los números decimales exactos son generados por las fracciones ordinarias.

II. Los números decimales inexactos son generados por las fracciones ordinarias que no pueden convertirse en fracciones decimales y por los números irracionales.

III. La unión de los números racionales e irracionales es el conjunto de los números reales.

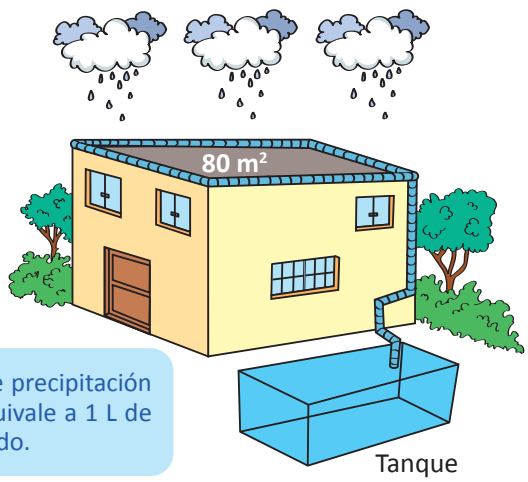
IV. El conjunto de los números irracionales es denso en los reales: entre cualesquiera dos números reales distintos siempre existe al menos un número irracional.

Fundamenta tus resultados empleando propiedades y operaciones de los números racionales o irracionales.

6. Aprovechando el agua de lluvia

En una comunidad rural, cada hogar recoge agua de lluvia de un techo de 80 m² hacia un tanque para abastecer el consumo. Considera la información de la tabla.

Datos	Valor
Capacidad del tanque	3500 L
Consumo diario por casa	125 L/día
Precipitación promedio	1,6 mm/día
Disminución en sequía	75 %



Nota: 1 mm de precipitación sobre 1 m² equivale a 1 L de agua recolectado.

Se quiere conocer la cantidad recolectada para un mes de 30 días. ¿Cuál es la expresión que modela la cantidad de agua recolectada en un mes normal y en un mes de sequía? Justifica tu respuesta empleando números decimales.

1. Altura que alcanza un balón

Durante la primera práctica, un entrenador de fútbol registró la trayectoria de un balón pateado desde el suelo, observando y midiendo su altura desde el primer segundo hasta que volvió a caer. Los datos se muestran en la tabla siguiente:

Tiempo (s)	Altura (m)
1	3
2	4
3	3
4	0

a. En la segunda práctica, el entrenador patea el balón al aire desde el tiempo $t = 0$, con una altura inicial de un metro. En ambos casos, la trayectoria del balón es parabólica. Determina la expresión algebraica que representa la altura alcanzada en cada situación y justifica tu respuesta analizando los valores y las condiciones de los parámetros.

b. Se afirma: "Si dos funciones cuadráticas tienen el mismo coeficiente cuadrático $a = -1$, como $f(x) = -x^2 + bx + c$ y $g(x) = -x^2 + b'x + c'$, representan la misma curva. ¿Es correcta la afirmación? Fundamenta gráficamente.

2. Presupuesto de ladrillos

Un ingeniero civil, que requiere ladrillos para la construcción de una vivienda, observa el siguiente anuncio:



La tabla muestra el registro para reconocer el precio de los ladrillos según la cantidad necesaria.

Millares	Precio unitario (S/ por millar)	Precio total (S/)
5	1250	5(1250)
5 + 1	1250 − 10 × 1	(5 + 1)(1250 − 10 × 1)
5 + 2	1250 − 10 × 2	(5 + 2)(1250 − 10 × 2)
5 + 3	1250 − 10 × 3	(5 + 3)(1250 − 10 × 3)
⋮	⋮	⋮
5 + *n*		

Se sabe que el ingeniero necesita realizar una proyección del presupuesto. ¿Cuál es el precio para 11 millares de ladrillos? ¿Cuál sería el precio para *n* millares de ladrillos?

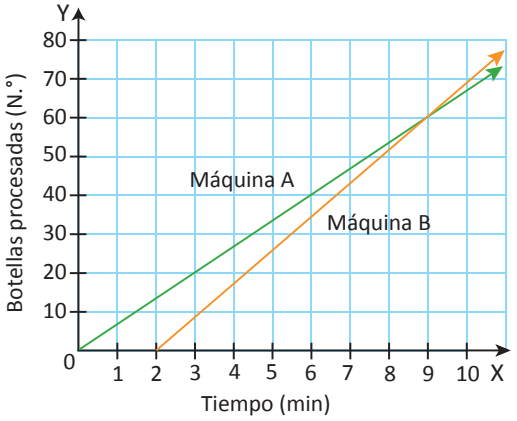
3. Máquinas para refrescos artesanales

Una empresa de refrescos artesanales registra en una gráfica la cantidad de botellas con refresco procesado por dos máquinas.

a. ¿Cómo puede el supervisor determinar cuál máquina es más productiva observando la pendiente de las líneas en la gráfica?

b. Se afirma que la máquina B inició antes que la A; por eso, su línea aparece más a la derecha en la gráfica. Sin embargo, la recta que representa la producción de la máquina A tiene una pendiente mayor, por lo que alcanza a la máquina B en el minuto 9. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta empleando el intercepto y la pendiente.

Botellas procesadas según máquina

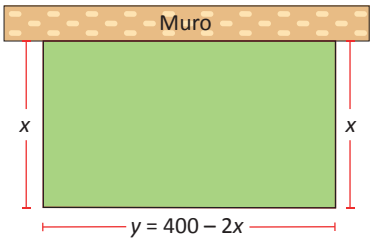


4. Delimitación de un terreno para cultivo

Un jardinero dispone de 400 m de malla para cercar un terreno rectangular de la mayor área posible usando un muro como uno de los lados, el cual no requiere cerca.



a. Observa el gráfico y completa los valores que faltan en la tabla.



Ancho (m)	Largo (m)	Área (m²)
50	?	15 000
?	150	?
120	?	?
?	?	20 000

b. Según la tabla, se afirma que se generará una parábola abierta hacia arriba. ¿Es correcto ello? Fundamenta tu respuesta.

5. Análisis de una función

Observa el análisis de una función de la forma $f(x) = mx + b$.

$$f(x) = -2x + 3$$

- Dominio: $\mathbb{R}$
- Rango: $\mathbb{R}$
- Pendiente: $m = -2$ indica que la recta desciende de izquierda a derecha, porque $m < 0$.
- Intercepto en el eje Y: $b = 3$ representa la intersección con el eje Y, es decir, el punto donde la recta corta al eje vertical.

a. Evalúa las siguientes funciones y describe sus características, tal como se muestra en el análisis de $f(x)$.

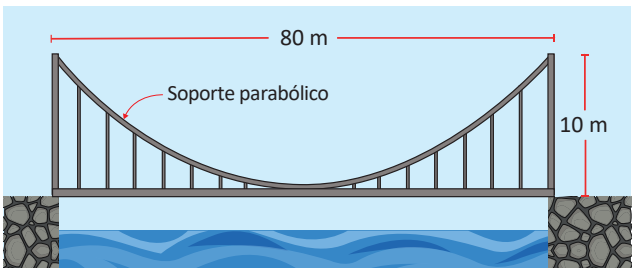
- $g(x) = 3x - 4$
- $h(x) = 5x + 6$
- $j(x) = -8x - 4$
- $k(x) = -3x + 7$
- $m(x) = -0{,}5x + 7$

b. Selecciona una función de la siguiente forma: $f(x) = ax \pm b$ y otra de la forma $f(x) = -ax \pm b$. Luego, expresa cada una en su expresión tabular y gráfica.

6. Diseño de puente parabólico

El gráfico muestra un puente con soporte parabólico.

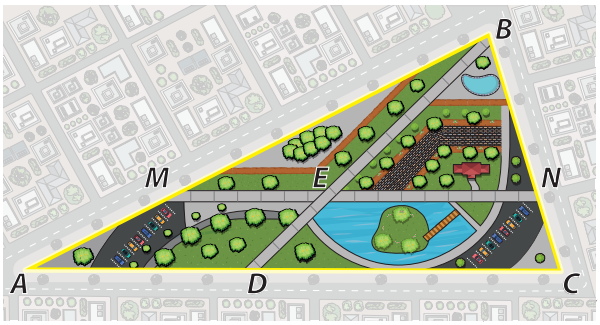
a. Se modela el arco del puente en el plano cartesiano mediante una parábola con vértice en el centro del tramo. Los extremos del arco se ubican en (–40; 10) y (40; 10), y el vértice en (0; 0). ¿Cómo influye el coeficiente cuadrático en la apertura y la altura de la parábola que representa el arco? Justifica tu respuesta con representaciones gráficas o simbólicas.



b. Se afirma que cambiar el punto de referencia en el puente hacia el extremo izquierdo modifica la ecuación y mantiene la misma curva. ¿Esto es correcto? Explica y analiza en qué casos este modelo sería más útil.

1. Diseño de un parque comunitario

El diseño del parque tiene la forma de triángulo *ABC,* cuya base $\overline{AC}$ mide 500 m.



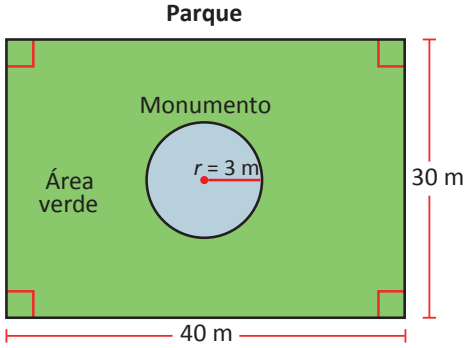
a. En el diseño, se requiere que la vereda $\overline{MN}$ sea paralela a la base $\overline{AC}$ y mida la mitad de su longitud (500 m). ¿Dónde deben ubicarse los puntos *M* y *N* sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ para cumplir esta condición?

Presenta los procedimientos geométricos que permiten comprobar que *M* y *N* son los puntos medios de los lados, y que $\overline{MN}//\overline{AC}$.

b. Se afirma que al trazar desde *B* las veredas $\overline{BE}$ y $\overline{BD}$, estas cortan a $\overline{MN}$ y $\overline{AC}$, respectivamente, en sus puntos medios. ¿Es correcta esa afirmación? Justifica tu respuesta realizando los trazos correspondientes y comprobando las intersecciones.

2. Distancia del pasadizo

La figura muestra el diseño de un parque rectangular de 40 m de largo y 30 m de ancho, con un monumento circular en el centro de radio 3 m.



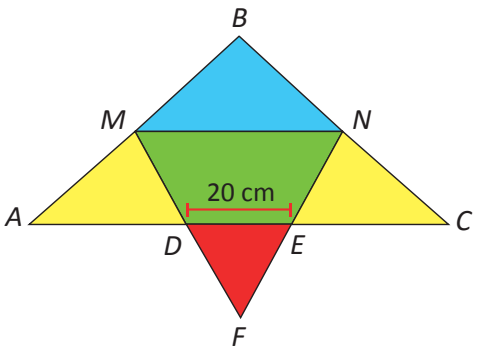
a. Se construirán cuatro pasadizos rectos e idénticos desde cada esquina del parque hasta el punto más cercano del borde del monumento circular. Determina la longitud mínima de estos pasadizos si llegan exactamente hasta el borde del monumento.

b. Considerando el triángulo rectángulo formado por el largo, el ancho y la diagonal del parque, se afirma que, al proyectar perpendicularmente la diagonal sobre el lado más largo, el segmento obtenido mide lo mismo que el lado más corto del parque. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica con construcciones y medidas.

3. Diseño de una cometa

Un estudiante diseña el plano de una cometa con las siguientes características:

- Los extremos *M* y *N* de la varilla están ubicados en el punto medio de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$, respectivamente.
- Los puntos *D* y *E* son puntos medios de los lados $\overline{MF}$ y $\overline{NF}$, respectivamente.
- m$\overline{DE}$ = 20 cm

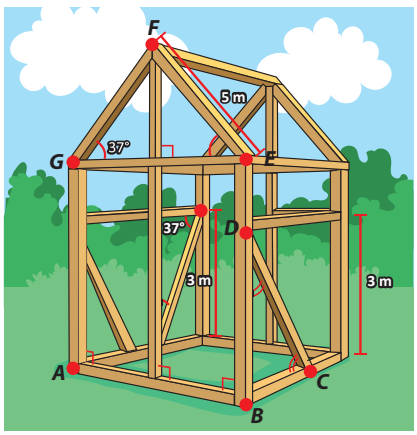


a. ¿Cuál es la medida de la varilla $\overline{AC}$ según las características del diseño realizado por el estudiante?

b. Se afirma que la diagonal $\overline{MF}$ de la cometa es la mediana del triángulo *ABC*, por lo que también mide la mitad de $\overline{AC}$. ¿Es correcto lo que se dice? Argumenta tu respuesta empleando propiedades.

4. Estructura de un invernadero

A partir de la información mostrada en la imagen, completa la tabla con las medidas requeridas para el invernadero.



Elemento	Medida
$\overline{AB}$	
$\overline{FG}$	
$\overline{DC}$	
$\angle E$	
$\angle D$	

5. Relaciones de medidas en el triángulo

¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas?

I. Dos triángulos rectángulos son semejantes si sus ángulos agudos correspondientes son congruentes.

II. En un triángulo rectángulo, la suma de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa es igual a la longitud de la altura trazada desde el ángulo recto.

III. Dos triángulos rectángulos son semejantes si los catetos correspondientes son proporcionales.

IV. En un triángulo rectángulo, el cuadrado de un cateto equivale al producto de la hipotenusa por la proyección ortogonal del otro cateto sobre la hipotenusa.

Justifica tus respuestas empleando propiedades sobre relaciones métricas.

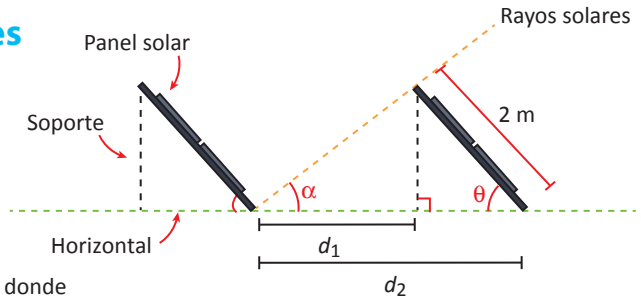
6. Posición óptima de paneles solares

Un panel solar de 2 m de largo se inclina con un ángulo θ respecto a la horizontal, de modo que quede perpendicular a los rayos del sol.

Durante el año, los rayos solares inciden con diferentes ángulos sobre el suelo, representados por α (60°, 53°, 45°, 30° o 15°), según la posición del sol en cada estación.

a. Deduce fórmulas que relacionen el ángulo θ con la sombra del panel (d_1) y la distancia entre paneles (d_2). Calcula $d_1 + d_2$ y determina el valor mínimo.

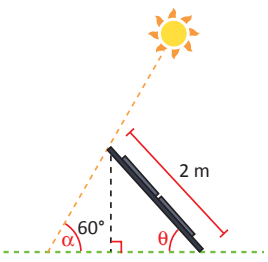
b. Elige dos ángulos: uno para verano (sol alto) y otro para invierno (sol bajo) como los que se muestan en la imagen. Justifica tu elección con triángulos rectángulos semejantes, explicando cómo esas inclinaciones maximizan la eficiencia solar en cada estación.

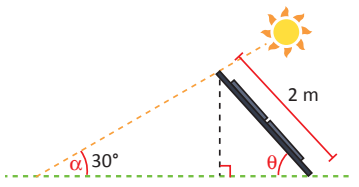


donde

- d_1: longitud de la sombra proyectada por el panel sobre el suelo
- d_2: distancia mínima entre las bases de los paneles solares consecutivos

Nota: α y θ son ángulos complementarios.





Desarrollamos



Interpreta situaciones, resuelve con orden, sustenta ideas matemáticas y amplía tus comprensiones.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran situaciones económicas o de altura máxima mediante funciones cuadráticas, y establece la relación entre el vértice y el punto óptimo. Emplea procedimientos para determinar valores máximos o mínimos, y argumenta la interpretación del vértice y del coeficiente principal en contextos reales.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Escucha con atención las ideas de tus compañeros y acepta sugerencias para mejorar.
- Participa en jornadas de reforestación escolar y siembra de árboles.

Pensamos y actuamos

Una pequeña empresa que produce cuadernos quiere analizar su beneficio.

A partir de sus registros, la empresa modela el beneficio (en soles) mediante $B(x) = -2x^2 + 80x - 300$, donde x es la cantidad de cuadernos producidos y $B(x)$ el beneficio.

1. Completa la tabla. Luego, calcula $B(x)$ en cada caso y registra su beneficio.

Cantidad de cuaderno (x)	Desarrollo	Beneficio en soles $B(x)$
0	$B(0) = -2(0)^2 + 80(0) - 300$	−300
10	$B(10) = -2(10)^2 + 80(10) - 300$	300
20	$B(20) = -2(20)^2 + 80(20) - 300$	500
30		
40		
50		

2. Con los pares $(x; B(x))$ de la tabla, ubica los puntos en el plano cartesiano, traza la curva e identifica el vértice de la parábola. Luego, responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué forma tiene la curva resultante?, ¿cómo se relaciona con la función cuadrática?

b. ¿El beneficio crece para siempre al producir más?, ¿hasta qué cantidad?

c. ¿Qué significa el punto más alto de la parábola en este contexto?

d. El coeficiente de x^2 es negativo. ¿Se relaciona con la forma de la curva?

e. ¿Cuántos cuadernos debe producir para obtener el beneficio máximo?, ¿y cuál es ese beneficio máximo?

f. ¿En qué rango de producción el beneficio es positivo $B(x) > 0$?

3. Ahora, a partir de $B(x) = -2x^2 + 80x - 300$, y considerando los nuevos coeficientes, halla las coordenadas del vértice $(h; k)$ y completa la siguiente tabla. Elabora los gráficos para comprobar lo obtenido.

Función	a	b	c	Vértice		Características de la parábola
				$h = -\frac{b}{2a}$	$k = B(h)$	
$B(x)$	−2	80	−300	20	500	, máximo
$B_1(x)$	−1	80	−300	40	1300	, máximo
$B_2(x)$	+4	80	−300			
$B_3(x)$	+2	+80	100			

Relaciona la actividad realizada con lo siguiente:

- a: según el signo del coeficiente a, se determina si la parábola tiene un máximo (si $a < 0$) o un mínimo (si $a > 0$). Además, cuanto mayor es $|a|$, más estrecha es la parábola; en cambio, si $|a|$ disminuye, se ensancha.
- c: representa el punto de intersección de la parábola con el eje Y.

4. **A partir de lo obtenido en la tabla anterior, responde.**
   a. ¿Qué coeficiente determina la existencia de máximo/mínimo?
   b. Elige dos funciones y explica qué beneficio económico representa cada modificación de a y c.

¿Qué construimos?

Luego de analizar las actividades realizadas, tres estudiantes afirman lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Como $a < 0$, la parábola se abre hacia abajo y hay beneficio máximo en el vértice.	Si producimos más, el beneficio siempre aumenta.	Cambiar c sube o baja la curva, pero no cambia la cantidad x que maximiza el beneficio.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas de contextos económicos y físicos (como la altura) que implican optimizar mediante el uso de funciones cuadráticas.
- Representa la función cuadrática en el plano cartesiano e identifica el vértice como punto de optimización según el contexto.
- Emplea procedimientos para obtener el valor de los vértices, raíces y puntos que maximizan o minimizan resultados.
- Argumenta la relación entre el signo del coeficiente principal de la función y la concavidad interpretando el significado en el contexto.

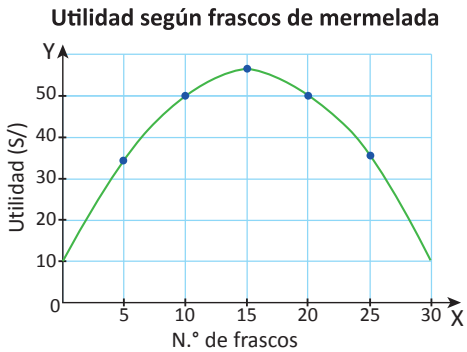
Profundizamos

Para la resolución de los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **José patea una pelota. La altura (h) de la pelota en función del tiempo (t) se expresa mediante $h(t) = 40t - 8t^2$. Halla t sabiendo que, a los t segundos después que pateó la pelota, otro jugador del mismo equipo salta, cabecea la pelota y hace gol. Se sabe que el cabezazo fue a una altura de 1,98 m; además $t \geq 1$.**

2. **En una producción de mermeladas caseras, la utilidad obtenida depende del número de frascos producidos. Analiza la siguiente tabla y el gráfico para decidir cuántos frascos conviene producir.**

Cantidad de frascos	Utilidad (S/)
0	10,0
5	35,0
10	50,0
15	55,0
20	50,0
25	35,0
30	10,0



   a. ¿La utilidad siempre aumenta? ¿En qué momento deja de convenir producir más frascos? Justifica tu respuesta gráficamente.
   b. ¿En qué punto se alcanza la máxima utilidad?, ¿cómo lo justificas?
   c. ¿El modelo refleja una situación real? Explica si es razonable y por qué.
   d. Plantea una expresión matemática basada en la utilidad y la cantidad de frascos producidos. Sustenta tu respuesta.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve situaciones de crecimiento en altura mediante funciones exponenciales, expresa las relaciones de duplicación o decrecimiento e identifica la asíntota horizontal. Emplea procedimientos para calcular cantidades o dosis en un tiempo dado, y argumenta el comportamiento de la función y la validez del crecimiento limitado según el contexto real del modelo.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Modifica tu plan de trabajo cuando surgen imprevistos y mantén una actitud positiva frente al cambio.
- Participa en la elaboración de carteles sobre el ahorro energético.

Pensamos y actuamos

1. Durante una actividad de laboratorio, los estudiantes colocan 150 bacterias en una placa de cultivo. Se observa que cada hora el número de bacterias se duplica, siempre que haya espacio suficiente.

A partir de la información, completa la tabla y luego responde las preguntas.

Tiempo (h)	Cantidad de bacterias
x	$f(x)$
0	150 × 1
1	150 × 2
2	150 × 4
3	
4	
5	
6	
x	

a. ¿Qué patrón observas en la evolución de la cantidad de bacterias?

b. ¿Qué tipo de función representa este proceso?

c. Si continúas el experimento, ¿cuántas bacterias habrá en la hora 10?

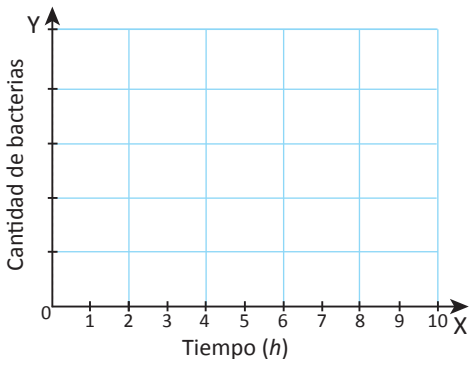
d. Representa los datos en una gráfica. ¿Cómo describirías la forma que presenta?

2. En otra placa de laboratorio se colocan 625 bacterias, que se duplican cada hora, por lo que el número de bacterias después de x horas se puede calcular con la expresión $f(x) = 625 \cdot 2^x$.

Pero la placa tiene un límite o una capacidad máxima de 10 000 bacterias. Con la información dada, completa la tabla y representa los valores en el plano cartesiano adjunto.

Tiempo (h)	Cantidad de bacterias
0	
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

Crecimiento bacteriano con saturación



a. ¿Qué ocurre con la cantidad de bacterias cuando se alcanza la capacidad máxima de 10 000?

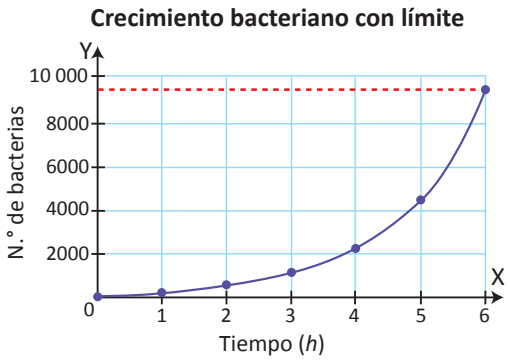
b. ¿Se puede seguir usando la misma expresión $f(x) = 625 \cdot 2^x$?

c. ¿Qué valores de x tienen sentido dentro del modelo?

d. ¿Cómo cambia el rango de la función cuando se sobrepasa la capacidad máxima?

e. ¿La función mantiene un crecimiento exponencial en todo su dominio o, al alcanzar la capacidad máxima, se estabiliza debido a la presencia de un valor constante?

3. **Observa la gráfica del modelo considerando un límite o capacidad máxima y luego analiza las preguntas.**



a. ¿Qué representa el punto donde la curva se detiene?

b. ¿Por qué deja de crecer la función a partir de cierta hora?

c. ¿El comportamiento sigue siendo exponencial en todo el dominio?

d. Se afirma lo siguiente: "Toda función exponencial creciente puede seguir creciendo indefinidamente". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta usando la situación y la gráfica.

¿Qué construimos?

Luego de analizar los datos, tres estudiantes afirman lo siguiente:

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Las funciones exponenciales a veces son crecientes.	La gráfica de una función exponencial a veces varía de acuerdo al valor de la base.	Las funciones exponenciales nunca tienen como base un número negativo.

a. ¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

b. ¿Qué diferencias observas entre una función lineal creciente y esta función exponencial? ¿Ambas presentan una razón de cambio constante?, ¿cómo se refleja esto en la tabla o la gráfica?

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran incrementos y variaciones, y explica en una función exponencial.
- Representa la función exponencial (en tablas y gráficos) con su límite (saturación), y expresa la asíntota (capacidad máxima).
- Emplea procedimientos para hallar la función exponencial y determina cuándo se alcanza el límite.
- Justifica con ejemplos el significado de la asíntota, argumenta sobre el crecimiento con saturación y evalúa las afirmaciones.

Profundizamos

Para la resolución de los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Un paciente elimina, a través de la orina, parte del medicamento que ha ingerido. La cantidad $f(x)$ (en miligramos) que permanece en su organismo después de x horas está dada por la función $f(x) = 20 \cdot (0{,}8)^x$.**

   a. ¿Cuál es la dosis inicial del medicamento?

   b. ¿Cuánta cantidad permanece en el organismo después de 12 horas?

   c. ¿Qué cantidad total del medicamento ha sido eliminada luego de 12 horas?

2. **Una función exponencial decreciente se define así: $f(x) = 200 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$.**

   a. ¿Cuál es su rango?

   b. ¿Tiene una asíntota horizontal?, ¿en qué valor?

   c. ¿Qué pasaría si al modelo le restamos cinco unidades?, ¿cómo afecta la asíntota?

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran distancias inaccesibles con triángulos rectángulos y razones trigonométricas (*sen*, *cos*, *tan*), expresa relaciones entre ángulos (elevación/depresión) y lados, emplea estrategias para hallar alturas y distancias, y determina modificaciones (doble ángulo). Justifica la aplicación de razones, evalúa las afirmaciones de proporcionalidad y sustenta tus cálculos.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Demuestra disposición para aprender de tus compañeros y valora sus aportes como parte del proceso de aprendizaje.
- Promueve el uso de materiales reciclables en el aula.

Pensamos y actuamos

Un grupo de estudiantes construye un goniómetro casero para medir la altura (h) de un edificio. Desde distintas posiciones en el patio del colegio, miden el ángulo de elevación hacia la parte más alta del edificio y la distancia horizontal (d) a la base.

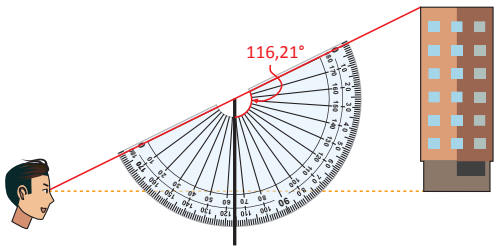


Figura 1

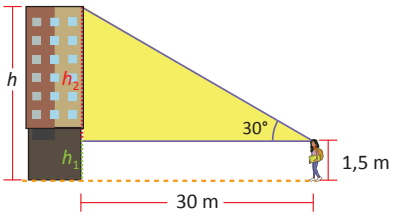


Figura 2

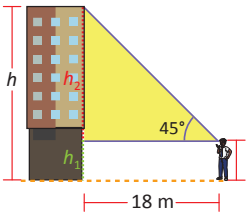
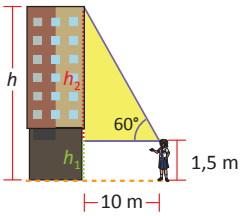


Figura 3



1. Completa la tabla con la información requerida.

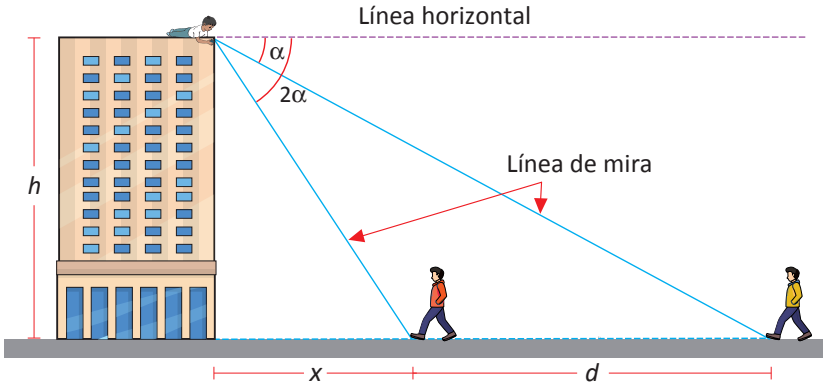
Figura	Ángulo de elevación θ	Distancia horizontal d (m)	Altura a los ojos del observador h_1 (m)	Altura parcial del edificio $h_2 = d \times tan\theta$ (m)	Altura total h (m)
1	30°	30	1,5	17,3	18,8
2	45°				
3	60°				

2. Respecto a la tabla anterior, responde lo siguiente:

a. ¿Qué ocurre con el ángulo de elevación cuando la distancia (d) aumenta?

b. ¿Siempre la altura (h) del objeto a medir (edificio) es igual a la distancia por tangente del ángulo agudo, más la distancia del observador?

Desde la parte superior del edificio de h metros de altura, un estudiante recostado sobre el techo observa a una persona con un ángulo de depresión α. Si esta persona se desplaza d metros hacia el edificio, el ángulo de depresión se duplica (2α).



3. **¿Cuál es la expresión que representa la distancia inicial (*d*) que separa a la persona de la base del edificio?**

4. **¿Cuál es la expresión que representa la distancia final *x*?**

5. **Completa la tabla con distintos valores de altura del edificio y desplazamiento.**

Altura del edificio (m)	Desplazamiento inicial (m)	Ángulo inicial (α)	Ángulo duplicado (2α)	Distancia final (m)	Distancia total (m)
36	72,00	15°	30°	62,35	134,35
36	50,91	22,5°			
50	57,74	30			
72	91,15	26,5°			

6. **Responde las preguntas.**

   a. ¿Qué ocurre con el ángulo de depresión cuando la persona se acerca o se aleja de la base del edificio? Explica con tus cálculos y un esquema.

   b. Si el edificio tuviera más altura (por ejemplo, 80 m o 90 m), ¿cómo cambiarían las soluciones? Completa la tabla y compara con el caso de 36 m.

¿Qué construimos?

En un aula, luego de analizar las actividades de los ángulos de elevación y depresión, tres estudiantes comparten sus conclusiones.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Si duplico la distancia al objeto, el ángulo de elevación se reduce a la mitad.	El ángulo de depresión siempre disminuye a medida que la persona se aleja de la base del edificio.	El ángulo de elevación y el de depresión cambian de manera proporcional a la distancia recorrida.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

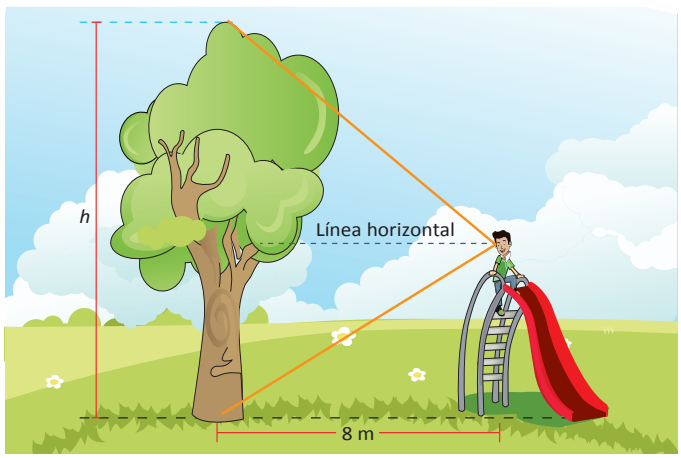
- Resuelve situaciones que involucran alturas y distancias inaccesibles, y explica con triángulos rectángulos y ángulos (elevación/depresión).
- Expresa tu comprensión de los triángulos rectángulos y sus medidas en situaciones apoyándote de esquemas y gráficos.
- Emplea procedimientos para hallar alturas y distancias, y analiza variaciones (doble ángulo) referidas a triángulos notables.
- Evalúa la validez de afirmaciones con ejemplos.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

Jairo se sube a un tobogán que está a 8 m de un árbol. Para ver el pie del árbol, baja la vista 37° respecto a la horizontal y, para observar la punta de la copa del árbol, levanta su mirada 45° respecto a la horizontal.

Con esta información, ¿será posible calcular la altura (*h*) del árbol? Efectúa el procedimiento.



Fuente: Minedu (2024).

Formalizamos



Relaciona procedimientos y propiedades de los ejemplos, dialoga y reflexiona para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

Intervalos con números racionales y su representación

Situación: Control de temperaturas

Las vacunas deben conservarse entre temperaturas desde los 2 °C y menos de 8 °C. Durante cuatro días se registraron las temperaturas mínimas y máximas, como se muestran en la tabla. ¿En qué días las vacunas estuvieron en riesgo? Justifica tu respuesta.

Día	Temperatura
1	1,5-8,1 °C
2	2,2-7,8 °C
3	2,0-8,0 °C
4	2,5-9,0 °C

De la información, la temperatura de las vacunas debe estar en el intervalo [2; 8[, es decir, 2 °C ≤ $T°$ < 8 °C; y se lee: "La temperatura T es mayor o igual que 2 °C y menor que 8 °C". Analicemos cada día:

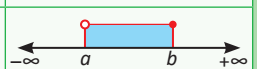
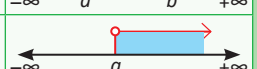
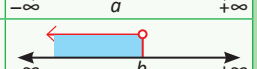
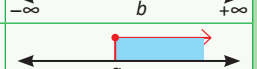
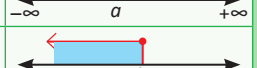
- Día 1: 1,5 ∉ [2; 8[y 8,1 ∉ [2; 8[. No cumple.
- Día 2: 2,2 ∈ [2; 8[y 7,8 ∈ [2; 8[. Cumple.
- Día 3: 2 ∈ [2; 8[y 8 ∉ [2; 8[. No cumple.
- Día 4: 2,5 ∈ [2; 8[y 9 ∉ [2; 8[. No cumple.

Por lo tanto, el único día que la temperatura no estuvo en riesgo fue el día 2, los días en riesgo fueron el 1; 3 y 4, ya que sus temperaturas están fuera del intervalo.

El análisis previo nos muestra lo siguiente:

Intervalo y su representación gráfica. Un intervalo es el conjunto de números reales que están entre dos valores de la recta real. Los extremos están definidos por cotas abiertas (]a; b[), cerradas ([a; b]) o semiabiertas (]a; b], [a; b[).

Tipos de intervalos. En la tabla se presentan los tipos de intervalos con su notación conjuntista y su representación gráfica.

Intervalos de longitud	Tipo	Notación y significado	Gráfico
Finita	Cerrado	$[a; b] = \{x/x \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b\}$	
	Abierto	$]a; b[= \{x/x \in \mathbb{R}; a < x < b\}$	
	Semiabierto o semicerrado	$]a; b] = \{x/x \in \mathbb{R}; a < x \leq b\}$	
		$[a; b[= \{x/x \in \mathbb{R}; a \leq x < b\}$	
Infinita	Abierto	$]a; +\infty[= \{x/x \in \mathbb{R}; x > a\}$	
		$]-\infty; b[= \{x/x \in \mathbb{R}; x < b\}$	
	Semicerrado	$[a; +\infty[= \{x/x \in \mathbb{R}; x \geq a\}$	
		$]-\infty; b] = \{x/x \in \mathbb{R}; x \leq b\}$	

¿Sabías que...?

En el control de calidad, se usan intervalos para verificar si los productos cumplen estándares establecidos. Cada intervalo indica los valores aceptables de una medida, como peso, longitud o grosor, sin que el producto sea rechazado.

Ten en cuenta

Los números racionales se consideran un subconjunto de los números reales y comparten con estos las propiedades aditiva, multiplicativa y de potenciación. Esta relación resulta fundamental al analizar los intervalos dentro del conjunto de los números reales.

Practica valores

- Acepta los errores como oportunidades para aprender.
- Promueve charlas escolares sobre el cuidado del planeta.

Operaciones con intervalos: unión e intersección

Situación: Horario de internet en casa

Satoshi tiene un acceso restringido a internet durante la semana con estas reglas:

A. Tareas escolares: De 14:00 a 17:00 horas

B. Entretenimiento: De 16:00 a 19:00 horas

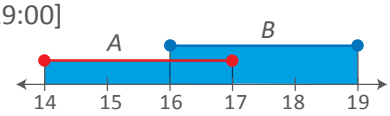
¿Cuál es el rango total de horas en que tiene acceso a internet? ¿En qué horario puede elegir entre estudiar y entretenerse? Justifica tu respuesta.



Denotamos como conjuntos.

- $A = [14:00; 17:00]$
- $B = [16:00; 19:00]$

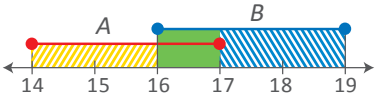
a. El acceso total a internet sería la unión de ambos horarios:



$A \cup B = [14:00; 17:00] \cup [16:00; 19:00] = [14:00; 19:00]$

Esto significa que Satoshi tiene acceso a internet desde las 14:00 hasta las 19:00 horas.

b. El horario donde puede estudiar y entretenerse corresponde a la intersección de los intervalos



$A \cap B = [14:00; 17:00] \cap [16:00; 19:00] = [16:00; 17:00]$.

Entre las 16:00 y las 17:00 horas, Satoshi puede estudiar y entretenerse.

La experiencia anterior permite reconocer lo siguiente:

Intersección ($\cap$) y unión ($\cup$)

La **intersección** de dos intervalos A y B, denotada como $A \cap B$, es el conjunto de todos los números que pertenecen simultáneamente al intervalo A y al intervalo B.

Representación simbólica:

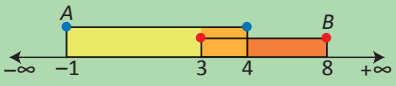
$A \cap B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \in B\}$

Ejemplo:

Si $A = [-1; 4]$ y $B = [3; 8]$, calcula $A \cap B$.

Resolución:

Graficamos los intervalos.



Del gráfico observamos que $A \cap B = [3; 4]$.

La **unión** de dos intervalos A y B, denotada como $A \cup B$, es el conjunto de todos los números que pertenecen al intervalo A, al intervalo B o a ambos.

Representación simbólica:

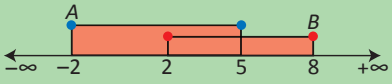
$A \cup B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \vee x \in B\}$

Ejemplo:

Si $A = [-2; 5]$ y $B = [2; 8]$, calcula $A \cup B$.

Resolución:

Graficamos los intervalos.



Del gráfico observamos que $A \cup B = [-2; 8]$.

Recuerda

La unión reúne todos los elementos que pertenecen al menos a uno de los conjuntos.

La intersección contiene solo los elementos comunes a ambos.

Operación	Notación	Significado
Unión	$A \cup B$	Pertenece a A o a B.
Intersección	$A \cap B$	Pertenece a A y a B.

Ten en cuenta

En las operaciones

$[a; b[\cap]b; d] = \varnothing$

$[a; b] \cap [b; d] = \{b\}$

$[a; b] \cup]b; d] = [a; d]$

$]a; b[\cup]b; d[=]a; d[- \{b\}$

Recuerda

Cuando dos intervalos se superponen parcialmente (tienen una intersección no vacía, pero ninguno está contenido en el otro), su unión forma un solo intervalo. En cambio, si son disjuntos, su unión no forma un intervalo.

Situación: Intervalos bajo la lupa

Dos estudiantes dialogan sobre los intervalos y sus operaciones.

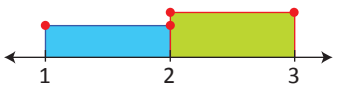
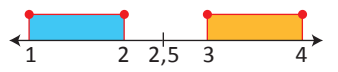
- Estudiante A: “La unión de dos intervalos siempre da como resultado otro intervalo”.
- Estudiante B: “La intersección de dos intervalos nunca es vacía”.

¿Quién tiene la razón? ¿Puedes justificar tu respuesta con ejemplos gráficos?

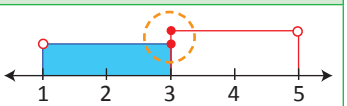
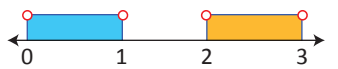
Analiza ambas afirmaciones y, si alguna no es cierta, plantea un contraejemplo que lo demuestre.

Analicemos ambas afirmaciones:

Estudiante A: ¿La unión de dos intervalos siempre forma un solo intervalo?

Ejemplo / contraejemplo	Representación visual
La unión de [1; 2] y [2; 3] forma el intervalo [1; 3], ya que comparten el 2.	
La unión de [1; 2] y [3; 4] no forma un solo intervalo, porque hay un “salto” entre ellos. Rompe la propiedad de convexidad que caracteriza a los intervalos reales.	

Estudiante B: La intersección de dos intervalos nunca es vacía.

Ejemplo / contraejemplo	Representación visual
La intersección de]1; 3] y [3; 5[es {3}. Aunque solo es un punto, **no es vacía**.	
La intersección de]0; 1[y]2; 3[es ∅. No tienen ningún número en común.	

Por tanto se cumple lo siguiente:

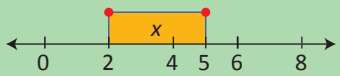
- Para que la unión forme un solo intervalo, los intervalos deben tocarse o superponerse.
- Para que la intersección no sea vacía, debe haber al menos un número en común. Todo depende de cómo se relacionan los intervalos.

Ten en cuenta

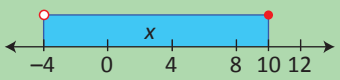
La unión no siempre forma un solo intervalo, ni la intersección garantiza elementos comunes. Todo depende de la posición de los intervalos en la recta numérica y del tipo de intervalos considerados.

La experiencia anterior permite reconocer lo siguiente:

La **cardinalidad de un conjunto o intervalo** se refiere a la cantidad de elementos que lo conforman. En los intervalos reales, la cardinalidad es infinita; es decir, entre dos números reales siempre existen infinitos números reales. Por ejemplo, en el intervalo [2; 5], existen infinitos valores de x tales que $2 \leq x \leq 5$.



La **inclusión o exclusión de extremos** depende del tipo de intervalo. Por ejemplo, en el intervalo semiabierto]–4; 10], el número –4 está excluido, mientras que el número 10 está incluido.



Operaciones con intervalos: diferencia, diferencia simétrica y complemento

Situación: Horarios en la biblioteca

La biblioteca atiende de 8:00 a 17:00 horas. Sin embargo, de 13:00 a 14:30 horas hay limpieza, y de 16:00 a 17:00 horas el acceso es solo para el personal. ¿Qué horarios están completamente restringidos a los estudiantes? ¿En qué horario puede ingresar libremente un estudiante?

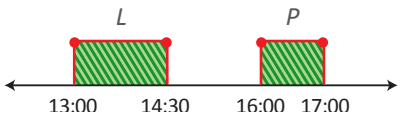


El rango de horas lo representamos en intervalos.

- Horario total de atención: $T = [8:00; 17:00]$
- Horario de limpieza: $L = [13:00; 14:30]$
- Horario solo al personal: $P = [16:00; 17:00]$

Hallamos la franja de horas restringidas al estudiante.

$L \cup P = [13:00; 14:30] \cup [16:00; 17:00]$

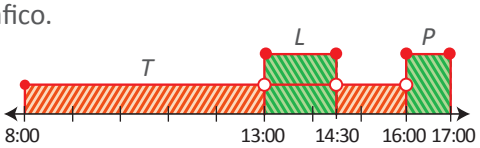


Por lo tanto, estos intervalos corresponden a horarios en los que el público general no tiene acceso.

Reconocemos la diferencia entre el horario total y el horario restringido.

$$T - (L \cup P) = [8:00; 17:00] - ([13:00; 14:30] \cup [16:00; 17:00])$$

Observamos el gráfico.

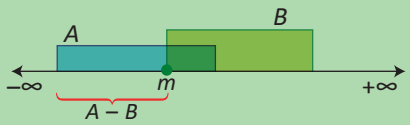


Por tanto, el estudiante puede ingresar libremente en los siguientes horarios: $[8:00; 13:00[\cup]14:30; 16:00[$.

El problema resuelto ilustra lo siguiente:

Diferencia ($A - B$). La diferencia entre dos intervalos A y B es el conjunto de elementos que están en A, pero no en B.

Representación simbólica: $A - B = \{x \in \mathbb{R} / x \in A \wedge x \notin B\}$



Tengamos en cuenta lo siguiente:

- Si m es un extremo abierto, en $(A - B)$ será un extremo cerrado.
- Si m es un extremo cerrado, en $(A - B)$ será un extremo abierto.

Diferencia simétrica ($A \Delta B$). La diferencia simétrica entre dos intervalos A y B es el conjunto de elementos que están en A o en B, pero no en ambos.

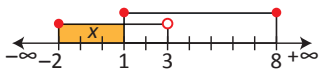
Representación simbólica: $A \Delta B = \{x \in \mathbb{R} / x \in (A - B) \vee x \in (B - A)\}$

Ten en cuenta

Analiza las siguientes operaciones:

- Sean $A = [-2; 3[$ y $B = [1; 8]$.

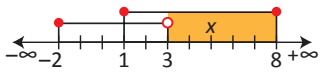
  $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$



  $A - B = [-2; 1[$

- Sean $A = [-2; 3[$ y $B = [1; 8]$.

  $B - A = \{x / x \in B \wedge x \notin A\}$



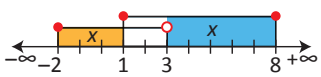
  $B - A = [3; 8]$

Ten en cuenta

Analiza las siguientes operaciones:

- Sean $A = [-2; 3[$ y $B = [1; 8]$.

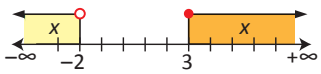
  $A \Delta B = \{x / x \in (A \cup B) \wedge x \notin (A \cap B)\}$



  $A \Delta B = [-2; 1[\cup [3; 8]$

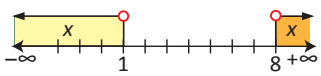
- Sean $A = [-2; 3[$ y $B = [1; 8]$.

  El complemento de $A = [-2; 3[$ es



  $A^C =]-\infty; -2[\cup [3; +\infty[$

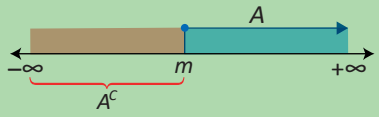
  El complemento de $B = [1; 8]$ es



  $B^C =]-\infty; 1[\cup]8; +\infty[$

Complemento de un intervalo (A^c). El complemento de un intervalo A son todos los números reales que no están en el intervalo A.

Representación simbólica: $A^c = \{x \in \mathbb{R} / x \notin A\} = \mathbb{R} - A$



Tengamos en cuenta lo siguiente:

- Si m es un extremo abierto en A, en A^c el extremo será cerrado.
- Si m es un extremo cerrado en A, en A^c el extremo será abierto.

Situación: Complemento o diferencia



En una universidad, los laboratorios están disponibles para los estudiantes desde las 8:00 hasta las 18:00 horas, excepto los horarios ya reservados por los docentes.

Un estudiante comenta lo siguiente: "Los horarios en los que no puedo usar el laboratorio se obtienen restando el horario de estudiantes al total del día". Otro le responde: "Eso es el complemento, no una diferencia". ¿Es lo mismo tomar el complemento que restar un conjunto del total?, ¿cuándo coinciden?

Asumimos lo siguiente:

Horario del día: $U = [00:00; 24:00]$

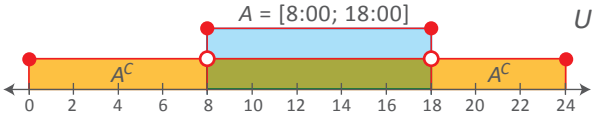
Horario disponible para estudiantes: $A = [8:00; 18:00]$

La pregunta es si $U - A$ es lo mismo que A^c.

Por definición se cumple lo siguiente:

- La diferencia entre ambos conjuntos se expresa como $U - A = \{x \in U / x \notin A\}$; esto significa todos los elementos de U que no están en A.
- El complemento de A es $A^c = \{x \in U / x \notin A\}$; esto significa todos los elementos que están fuera de A, como se muestra en la imagen.

Intervalo A y su complemento A^c en el universo $[0; 24]$



Por tanto; $U - A = A^c = [0; 8:00[\cup]18:00; 24:00]$.

Ambos conjuntos coinciden solo si el universo considerado es exactamente U (en este caso, el día de 0 a 24 horas). Entonces $U - A = A^c$. Si no se especifica el universo común en ambos, no son iguales.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas en situaciones que involucran rangos continuos (horarios) con intervalos, y establece sus tipos (abiertos, cerrados).
- Representa intervalos y operaciones en la recta referidos a la unión, intersección y complemento.
- Emplea procedimientos para hallar la diferencia vacía y complemento infinito.
- Justifica inclusión de extremos, argumenta resultados de intersección y evalúa la validez.

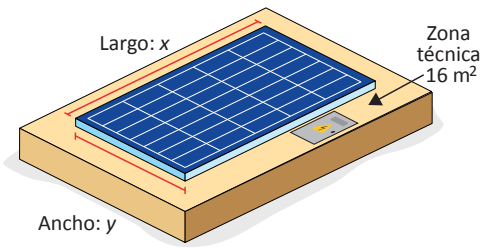
FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: definición, tipos de problemas

Situación: Instalación de paneles solares

Para instalar paneles solares en un techo rectangular, se usarán 48 m de rieles para el perímetro y 16 m² serán destinados a una zona técnica fuera del área de paneles solares. ¿Cuál es el área total máxima que podría cubrirse con este sistema?

Representamos el techo y realizamos lo siguiente:



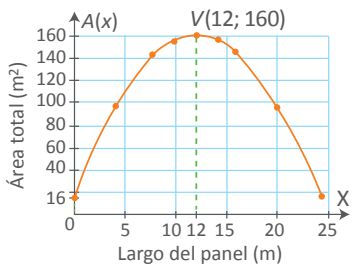
1.° Representamos el perímetro del rectángulo.
$2x + 2y = 48$
$x + y = 24$
Al despejar, tenemos lo siguiente:
$y = 24 - x$

2.° Ahora representamos el área total (A) del panel.
$A = x \cdot y$
$A = x \cdot (24 - x)$
$A(x) = -x^2 + 24x + 16$, incluyendo la zona técnica

3.° Exploramos con valores.

Largo x	Área total $A(x)$
0	16
4	96
8	144
10	156
12	160
14	156
16	144
20	96
24	16

4.° Esta es la representación gráfica de $A(x) = -x^2 + 24x + 16$, cuyo vértice es $V = (12; 160)$.

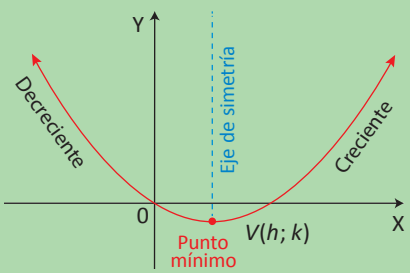


Al representar los puntos en el plano cartesiano, obtenemos una parábola con concavidad hacia abajo. Conforme aumentan los valores de x, los valores del área también aumentan hasta su punto máximo, que es 160 cuando $x = 12$; luego, el área comienza a decrecer. Por lo tanto, el área máxima que podría cubrirse es 160 m².

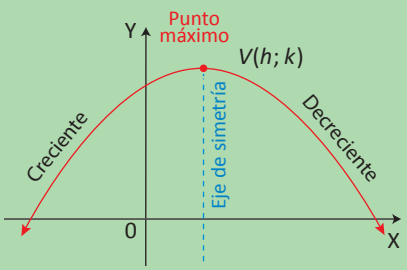
La resolución de la situación anterior evidencia lo siguiente:

Representación de la función cuadrática. Una función cuadrática es un polinomio de grado 2, de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, donde $a, b, c \in \mathbb{R}$.

La gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es paralela al eje Y.



$a > 0$, la parábola se abre hacia arriba



$a < 0$, la parábola se abre hacia abajo

Ten en cuenta

En el contexto real podemos encontrar **tipos de problemas** que pueden ser resueltos con la función cuadrática y su representación. Estos pueden ser:

Control de flujo en riego

La tasa de flujo neto de agua (en litros por hora) en un tanque de riego automático se modela con la función: $f(x) = x^2 - 6x + 8$, donde x es el tiempo en horas desde que se activa el sistema.

- Si $f(x)$ es positiva, el tanque se está llenando.
- Si $f(x)$ es negativa, el tanque se está vaciando.

Determina los momentos exactos en que el flujo de agua se detiene (el flujo neto es cero) aplica factorización.

Valores máximos y mínimos: Producción agrícola

La ganancia $f(x)$ (soles) de una chacra depende de la cantidad de fertilizante x(kg), según: $f(x) = -2x^2 + 12x$. ¿Qué cantidad de fertilizante maximiza la ganancia? ¿Cuál es la ganancia máxima?

Ten en cuenta

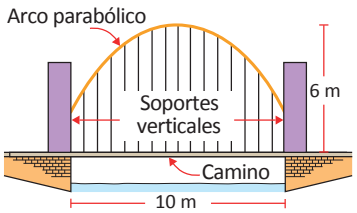
Esta representación de la función cuadrática se denomina forma general y tiene los siguientes elementos:

$f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$

- Intersección con el eje Y $(0; c)$
- Eje de simetría $x = -\frac{b}{2a}$
- Vértice $\left(-\frac{b}{2a}; f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: formas de representación

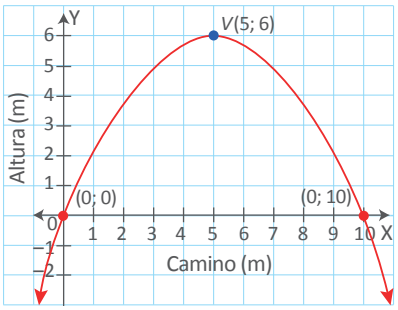
Situación: Parábola que conecta



En el diseño de un puente con arco parabólico, los apoyos extremos del arco están separados 10 m sobre el camino. El arco se modela con la función $f(x) = -\frac{6}{25}(x-5)^2 + 6$ alcanzando una altura máxima de seis metros.

¿Qué representan los parámetros $a = -\frac{6}{25}$, $h = 5$ y $k = 6$ en el modelo del arco, y cómo cambia su forma al variar cada uno de ellos?

La expresión está en forma canónica $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde $V(h; k)$ es el vértice de la parábola.



Elementos identificados:

- Coeficiente $a = -\frac{6}{25}$: La parábola es cóncava hacia abajo ($a < 0$).
- Vértice (altura máxima): (5; 6), donde $h = 5$ y $k = 6$.
- Eje de simetría: $x = 5$ (recta vertical).

El análisis muestra que a controla la curvatura y concavidad del arco, h su posición horizontal y k la altura del vértice. Modificar cada parámetro implica ajustar la forma y posición del puente según el diseño.

Recuerda

Sea $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$.

Para convertir la función a la **forma canónica**, completamos el cuadrado realizando los siguientes pasos:

- Factorizamos el 2 de los primeros dos términos. $f(x) = 2(x^2 + 2x) - 6$.
- Completamos el cuadrado dentro del paréntesis. $f(x) = 2(x^2 + 2x + 1 - 1) - 6$ $f(x) = 2[(x+1)^2 - 1)] - 6$ de donde $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$
- Por lo tanto, la forma canónica es $f(x) = 2(x+1)^2 - 8$ y el vértice está en $(-1; -8)$. La concavidad es hacia arriba, ya que $a = 2 > 0$.

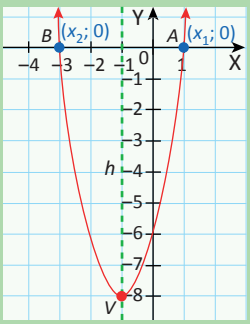
El análisis de la situación permite identificar los parámetros de $f(x)$ según la forma en que está expresada. En ese sentido, la **forma factorizada** de $f(x) = ax^2 + bx + c$ se obtiene descomponiendo el trinomio en factores lineales.

Se escribe como $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$, donde $a \neq 0$ es el **coeficiente principal**, y x_1 y x_2 son las **raíces o ceros** de la función cuadrática, es decir, los valores de x para los cuales $f(x) = 0$.

Por ejemplo, la función $f(x) = 2(x-1)(x+3)$ está en su **forma factorizada**, donde

- $a = 2$, raíces: $x_1 = 1$, $x_2 = -3$
- La parábola se abre hacia arriba, porque $a > 0$.

La forma canónica, también llamada forma vértice, se expresa como $f(x) = a(x-h)^2 + k$, donde



- $a \neq 0$ es el coeficiente principal.
- $(h; k)$ son las coordenadas del vértice de la parábola.

Elementos de la gráfica:

- Eje de simetría: $x = h$
- Vértice: $(h; k)$

Coeficiente a

- Cóncava hacia arriba: $a > 0$
- Cóncava hacia abajo: $a < 0$

Recuerda

La **forma polinómica o general** de una función cuadrática se expresa así: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde

- $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $a \neq 0$.
- a es el coeficiente cuadrático, b es el coeficiente lineal y c es el término independiente.

Ejemplo: $f(x) = 2x^2 + 4x - 6$ Esta es la forma general, donde

- $a = 2$, $b = 4$ y $c = -6$
- El vértice es $x = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2(2)} = -1$ y $f(-1) = -8$; es decir, la coordenada $(-1; -8)$, valor que coincide con el obtenido en las otras formas de representación.

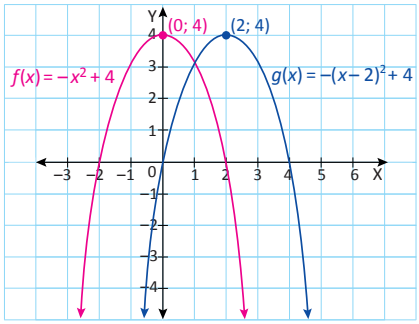
Función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$: transformaciones gráficas

Situación: Gráficas de funciones

Durante una actividad de clase, Javier y Ana grafican dos funciones cuadráticas. Ana: $g(x) = -(x - 2)^2 + 4$, y Javier: $f(x) = -x^2 + 4$. Ambos afirman que representan la misma función porque "tienen la misma forma y la misma altura máxima". ¿Estás de acuerdo con su afirmación? Justifica tu respuesta.

Realizamos la tabulación y la gráfica de ambas funciones.

x	$f(x) = -x^2 + 4$ (Javier)	$g(x) = -(x - 2)^2 + 4$ (Ana)
–2	0	–12
–1	3	–5
0	4	0
1	3	3
2	0	4
3	–5	3
4	–12	0



Al observar los valores de la tabla y la gráfica, tenemos que la gráfica de la función $g(x)$ es una traslación horizontal de la gráfica $f(x)$ dos unidades a la derecha. Por tanto, el vértice de $f(x)$, ubicado en el punto (0; 4), se desplaza a la derecha hasta el punto (2; 4).

La resolución de la situación anterior evidencia que las **transformaciones** son cambios en la representación gráfica base $f(x) = x^2$. Se clasifican en traslaciones (desplazamientos), simetrías (reflexión) y alargamiento y contracción.

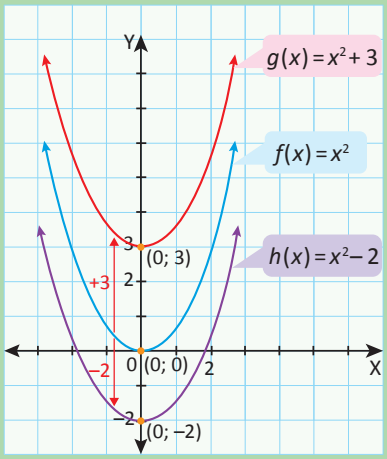
a. Desplazamientos

Desplazamiento vertical

Sea la función $f(x) = x^2$.

Su desplazamiento vertical se expresa como $g(x) = f(x) + k$, donde...

- Si $k > 0$, la gráfica se traslada hacia arriba k unidades.
- Si $k < 0$, la gráfica se traslada hacia abajo k unidades.
- Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al desplazarla tres unidades hacia arriba, obtenemos $f(x) + 3 = x^2 + 3$. Por lo tanto, la nueva función es $g(x) = x^2 + 3$.



- Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al desplazarla dos unidades hacia abajo, obtenemos $f(x) - 2 = x^2 - 2$. Por lo tanto, la nueva función es $h(x) = x^2 - 2$.

Recuerda

Las tablas de valores organizan datos y facilitan construir gráficos e identificar patrones.

Observa la relación entre el largo de un terreno y su área.

Largo x	Área total $A(x)$
0	16
4	96
8	144
10	156
12	160
14	156
16	144
20	96
24	16

Ten en cuenta

Trayectorias parabólicas

La trayectoria del balón en un tiro está dada por la función cuadrática: $f(x) = -x^2 + 5x$, donde x representa la distancia horizontal (metros) y $f(x)$, la altura del balón (metros). Gisela afirma que la altura máxima ocurre a los 2,5 metros de distancia y que alcanza 6,25 metros de altura. ¿Estás de acuerdo con su afirmación? Justifica.

Recuerda

En la **contracción de una función cuadrática**, la parábola cambia su apertura y se vuelve más ancha cuando se multiplica la función por un valor, $0 < a < 1$.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al multiplicarla por 0,5 obtenemos $g(x) = 0{,}5\,x^2$.

La nueva parábola es más ancha que la función inicial (ver gráfica en el apartado **c**).

Ten en cuenta

Intersección con los ejes: fuente ornamental

En una fuente ornamental de la plaza de una ciudad, el agua sale a presión y describe una trayectoria parabólica que puede representarse con la función: $f(x) = -x^2 + 6x$, donde x representa la distancia horizontal (metros) desde el punto de salida del chorro, y $f(x)$ representa la altura del agua (metros). Gael desea conocer:

- ¿En qué puntos la trayectoria del agua corta los ejes x e y?
- ¿Cuál es la altura máxima que alcanza el chorro?

¿Qué significado tienen esos puntos en la situación real?

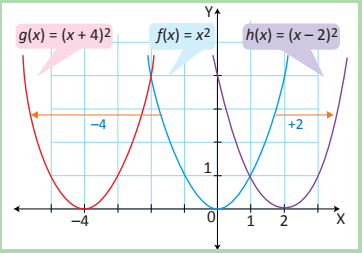
Recuerda

El alargamiento o contracción afecta la profundidad o la anchura de la parábola modificando su apariencia, pero no su vértice.

Desplazamiento horizontal

Sea la función $f(x) = x^2$. Su desplazamiento horizontal se expresa así: $g(x) = f(x - h)$, donde...

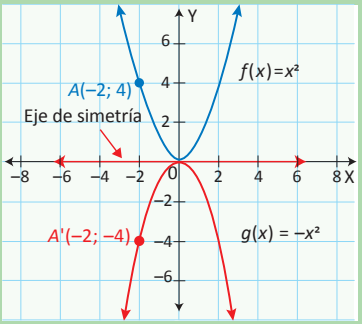
- Si $h > 0$, la gráfica se traslada h unidades a la derecha.
- Si $h < 0$, la gráfica se traslada h unidades a la izquierda.
- Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al desplazarla dos unidades hacia la derecha, obtenemos $f(x-2) = (x-2)^2$. Por lo tanto, la nueva función es $h(x) = (x-2)^2$. Al desplazarla cuatro unidades hacia la izquierda, $g(x) = (x+4)^2$.



b. Simetría o reflexión vertical

Se refleja la gráfica respecto al eje X, y todos los valores de y cambian de signo; es decir, $g(x) = -f(x)$.

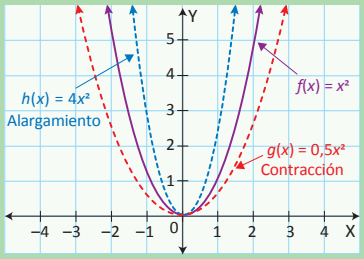
Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al aplicar la reflexión vertical, obtenemos $g(x) = -f(x) = -x^2$.



c. Alargamiento y contracción

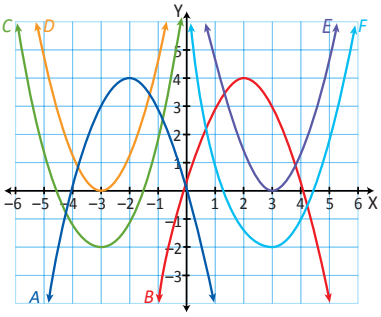
La parábola modifica su apertura y se vuelve más angosta (se **alarga**) cuando se multiplica la función por un valor $a > 1$.

Ejemplo: Sea la función $f(x) = x^2$. Al multiplicarla por cuatro a cada coordenada de $f(x)$, obtenemos $h(x) = 4x^2$ (ver gráfica). La nueva parábola es más angosta que la inicial.



Situación: Transformación de una parábola

Completa la tabla describiendo la transformación geométrica que experimenta la función base $f(x) = x^2$ en cada caso.



Función	Descripción de la transformación geométrica
$E(x) = (x-3)^2$	Es la función $f(x) = x^2$ desplazada tres unidades a la derecha.
$D(x) = (x+3)^2$	
$A(x) = -(x+2)^2 + 4$	
$B(x) = -(x-2)^2 + 4$	
$C(x) = (x+3)^2 - 2$	
$F(x) = (x-3)^2 - 2$	

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Función exponencial $f(x) = a^x$: representación tabular y gráfica, propiedades

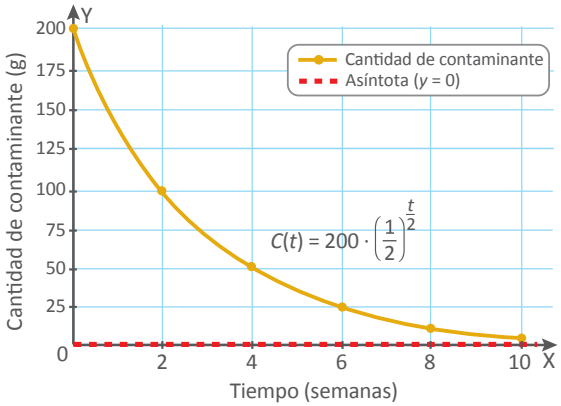
Situación: ¿El suelo queda limpio por completo?

Un grupo de estudiantes investiga el proceso en el que un contaminante en el suelo se reduce a la mitad cada dos semanas. Se inicia con doscientos gramos. Uno de ellos afirma: "Después de diez semanas ya no queda nada". ¿Estás de acuerdo? ¿Qué patrón observas? ¿La disminución es por resta o por otro tipo de cambio?

Para responder las preguntas, tabularemos y graficaremos para analizar el comportamiento de las variables, tiempo y cantidad de contaminantes.

Tiempo (semanas)	Cantidad de contaminante (g)
0	200
2	100
4	50
6	25
8	12,5
10	6,25

Disminución del contaminante con el tiempo



La cantidad de contaminante disminuye exponencialmente: se reduce cada vez más, pero nunca toca $f(x) = 0$. La afirmación del estudiante es incorrecta, ya que siempre queda una porción del contaminante.

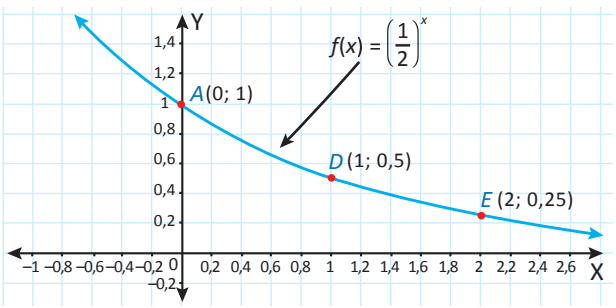
El análisis anterior nos muestra que la **función exponencial** con base a está definida para todos los números reales x por $f(x) = y = a^x$, donde $a > 0$, $a \neq 1$ y $x \in \mathbb{R}$.

Ejemplo: Dada la función exponencial por $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, construye su gráfica, y halla el dominio y el rango.

Tabulamos la función.

x	$f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
–2	4
–1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

Gráfica de la función exponencial



Donde el Dom(f) = $\mathbb{R}$ y el Ran(f) =]0; +∞[

Ten en cuenta

Una **función exponencial** es una relación entre dos variables reales, en la cual la variable independiente aparece en el exponente.

Su forma general es $f(x) = a^x$, donde

- x es la variable independiente.
- $f(x)$ es la variable dependiente.

En una función exponencial, la variable dependiente cambia multiplicándose por un mismo factor constante cada vez que la variable independiente toma valores en su dominio.

Esto significa que su crecimiento o decrecimiento no es aditivo, sino multiplicativo.

Recuerda

Características de la función exponencial

- Dominio: Dom(f) = $\mathbb{R}$
- Rango: Ran(f) =]0; +∞[
- Si $a > 1$, la función es creciente.
- Si $0 < a < 1$, la función es decreciente.

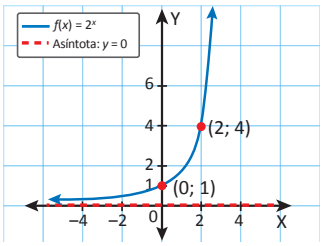
TIC

Recuerda

Si $a > 1$, la función crece cuando x toma valores positivos y decrece cuando x toma valores negativos acercándose a la **asíntota horizontal** $y = 0$.

Por ejemplo, $f(x) = 2^x$.

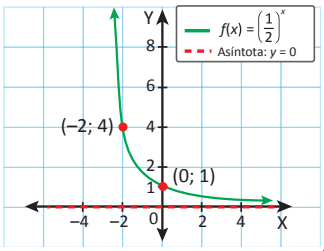
Función creciente: $f(x) = 2^x$



Si $0 < a < 1$, la función decrece cuando x toma valores positivos acercándose a la asíntota horizontal $y = 0$, y crece cuando x toma valores negativos.

Por ejemplo, $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

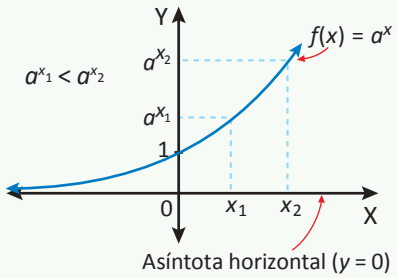
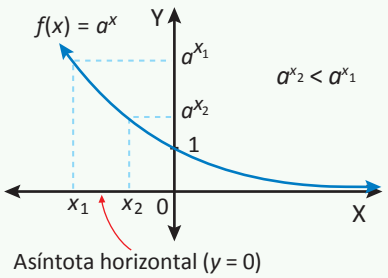
Función decreciente: $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



Evalúa tus progresos

- Representa la función en tablas y gráficos, analiza sus traslaciones, y expresa su dominio, rango y asíntota.
- Emplea procedimientos para determinar la traslación, la asíntota y su modificación.
- Justifica el límite (asíntota), argumenta con ejemplos el crecimiento de la función y evalúa el efecto de traslación.

La experiencia anterior permite reconocer que la **gráfica de una función exponencial** tiene una de las siguientes formas:

Caso $a > 1$	Caso $0 < a < 1$
 Asíntota horizontal ($y = 0$)	 Asíntota horizontal ($y = 0$)
Dominio: $]-\infty; +\infty[$	Dominio: $]-\infty; +\infty[$
Rango: $]0; +\infty[$	Rango: $]0; +\infty[$
Intersección con el eje Y: (0; 1)	Intersección con el eje Y: (0; 1)
Creciente	Decreciente
El eje X es una asíntota horizontal ($a^x \to 0$ cuando $x \to -\infty$).	El eje X es una asíntota horizontal ($a^x \to 0$ cuando $x \to \infty$).
Continua	Continua

Asíntota vinculada a la función exponencial. Una asíntota es una recta a la que se aproxima una función cuando la variable independiente tiende a un valor determinado (finito o infinito) sin que la función necesariamente la cruce o intercepte; tal como se observa en la caja **Recuerda**.

Situación: Desplazamiento vertical de la asíntota

Un estudiante transforma $f(x) = 3^x$ a $g(x) = 3^x - 2$ y afirma: "Como la base no cambia, la asíntota sigue siendo $y = 0$". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

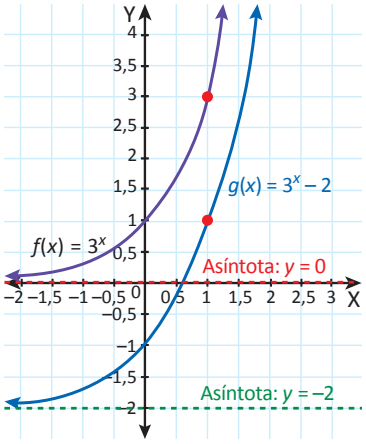
Al realizar una traslación vertical a una función exponencial, la asíntota horizontal sí cambia.

Para la función $f(x) = 3^x$

- Asíntota horizontal: $y = 0$
- Comportamiento: Cuando $x \to -\infty$, $f(x) \to 0$.

Para la función $g(x) = 3^x - 2$

- La gráfica se desplaza dos unidades hacia abajo.
- Asíntota horizontal: $y = -2$
- Comportamiento: Cuando $x \to -\infty$, $g(x) \to -2$.



Lo analizado lo observamos en el gráfico adjunto.

Por tanto, la afirmación es incorrecta, ya que la traslación vertical modifica la asíntota horizontal.

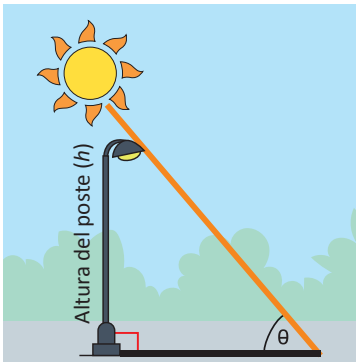
MEDIDAS DE FORMAS BIDIMENSIONALES

Razones trigonométricas de ángulos agudos y notables

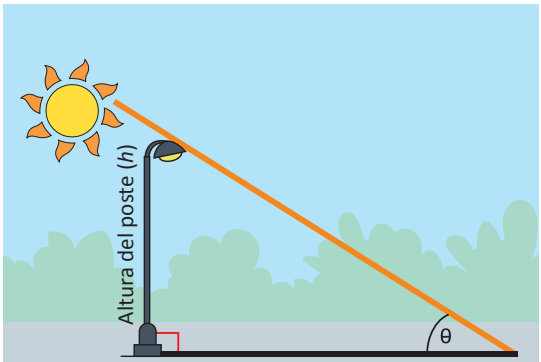
Situación: Sombras y la posición del sol

Una tarde, Ana observa la sombra de un poste de luz. Y observa que cuando el sol está bajo la sombra, se alarga; y cuando el sol está alto, se acorta.

Curiosa se pregunta: "¿De qué depende la longitud (L) de la sombra si el poste siempre tiene la misma altura (h)?".



Longitud corta de la sombra (L)



Longitud larga de la sombra (L)

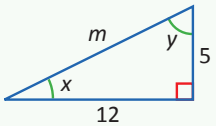
Para responder, analizamos la relación entre el ángulo del sol y la longitud de la sombra del poste en la siguiente tabla:

Ángulo entre el rayo de luz solar y el suelo	Longitud de la sombra L (en función de la altura h)	Relación entre la altura y la longitud de sombra
30°	1,73 h	≈ 0,58
45°	1 h	1
60°	0,58 h	≈ 1,73

La longitud de la sombra depende del ángulo del sol con el suelo, según $L = \frac{h}{tan\theta}$

La experiencia anterior permite reconocer las **razones trigonométricas de un ángulo agudo**. Una razón trigonométrica es una relación entre las longitudes de los lados de un **triángulo rectángulo** con respecto a uno de sus **ángulos agudos**. Estas razones se mantienen iguales para un mismo ángulo sin importar el tamaño del triángulo.

En el siguiente ejemplo, reconocemos las razones trigonométricas respecto a los ángulos agudos.



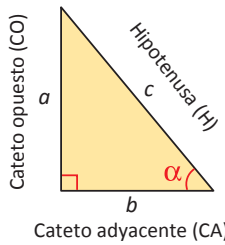
$m^2 = 5^2 + 12^2$
$m^2 = 25 + 144$
$m = 13$

$sen x = cos y = \frac{5}{13}$
$cos x = sen y = \frac{12}{13}$
$tan x = cot y = \frac{5}{12}$

$cot x = tan y = \frac{12}{5}$
$sec x = csc y = \frac{13}{12}$
$csc x = sec y = \frac{13}{5}$

Recuerda

Razones trigonométricas en el triángulo rectángulo



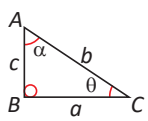
$sen\alpha = \frac{CO}{H} = \frac{a}{c}$
$cos\alpha = \frac{CA}{H} = \frac{b}{c}$
$tan\alpha = \frac{CO}{CA} = \frac{a}{b}$
} Razones principales

$cot\alpha = \frac{CA}{CO} = \frac{b}{a}$
$sec\alpha = \frac{H}{CA} = \frac{c}{b}$
$csc\alpha = \frac{H}{CO} = \frac{c}{a}$
} Razones recíprocas

Ten en cuenta

Según el **teorema de Pitágoras**, en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la longitud de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos.

$b^2 = a^2 + c^2$



Practica valores

- Busca retroalimentación de tu docente y compañeros.
- Propón ideas para proteger a los animales y ecosistemas locales cercanos a tu escuela.

Ten en cuenta

Propiedad de complementarios

Si $\alpha + \beta = 90°$, entonces

$sen\alpha = cos\beta$

$tan\alpha = cot\beta$

$sec\alpha = csc\beta$

Ejemplo:

$senx = cosy = \frac{5}{13}$

Propiedad de recíprocos

Si $\alpha = \beta$, entonces

$sen\alpha \cdot csc\beta = 1$

$tan\alpha \cdot cot\beta = 1$

$sec\alpha \cdot cos\beta = 1$

Ejemplo:

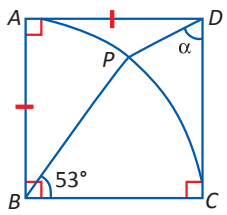
$cosx \cdot secx = \frac{12}{13} \cdot \frac{13}{12} = 1$

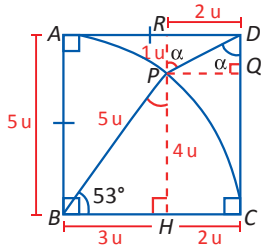
Recuerda

Razón \ α	30°	60°	45°
$sen\alpha$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$cos\alpha$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$
$tan\alpha$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	1
$cot\alpha$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$sec\alpha$	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	2	$\sqrt{2}$
$csc\alpha$	2	$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$

Razón \ α	37°	53°
$sen\alpha$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
$cos\alpha$	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
$tan\alpha$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{3}$
$cot\alpha$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4}$
$sec\alpha$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{3}$
$csc\alpha$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$

Ejemplo: Ahora, en el gráfico, determina la tangente del ángulo α.





Primero trazamos la perpendicular $\overline{PH}$ formando el triángulo notable de 53° y 37°, de donde $m\overline{BH} = 3$ u, $m\overline{HP} = 4$ u, $m\overline{PR} = 1$ u y $m\overline{HC} = 2$ u.

En el cuadrado, cuyo lado es igual a 5 u, se tiene que $\overline{BA}$, $\overline{BP}$ y $\overline{BC}$ son radios (5 u) del cuadrante *ABC*.

Por lo tanto, del gráfico, $tan\alpha = \frac{m\overline{RD}}{m\overline{RP}} = \frac{2}{1} = 2$.

Identidades trigonométricas

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que relacionan las razones trigonométricas de un mismo ángulo. Estas identidades son válidas para cualquier valor angular para el cual las razones trigonométricas involucradas estén definidas.

Las identidades fundamentales son las siguientes:

- Identidades pitagóricas

  $sen^2\alpha + cos^2\alpha = 1$

  $tan^2\alpha + 1 = sec^2\alpha$

  $cot^2\alpha + 1 = csc^2\alpha$

- Identidades por cociente

  $tan\alpha = \frac{sen\alpha}{cos\alpha}$

  $cot\alpha = \frac{cos\alpha}{sen\alpha}$

- Identidades recíprocas

  $sen\alpha = \frac{1}{csc\alpha}$

  $cos\alpha = \frac{1}{sec\alpha}$

  $tan\alpha = \frac{1}{cot\alpha}$

Situación: ¿Es una identidad?

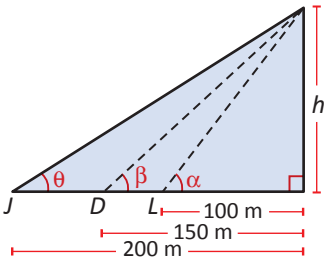
Analizamos si cada expresión corresponde a una identidad trigonométrica.

Expresión	¿Es identidad?	Justificación / Verificación
$sen^2x + cos^2x = 1$	✓	Identidad pitagórica clásica. Se cumple para todo *x*.
$tanx = \frac{senx}{cosx}$	✓	Definición directa de tangente. Se cumple si $cosx \neq 0$.
$1 - cos^2x = sec^2x - 1$	✗	Primer miembro: sen^2x Segundo miembro: tan^2x
$\frac{1 + cosx}{senx} = cotx + cscx$	Verificar	$\frac{1 + cosx}{senx} = cotx + cscx$ $= \frac{cosx}{senx} + \frac{1}{senx}$ Por tanto se verifica que $\frac{1 + cosx}{senx} = \frac{1 + cosx}{senx}$; $senx \neq 0$

Ángulos de elevación y de depresión

Situación: ¿Quién observa mejor la cima?

Lucía, Diego y José observan la parte más alta de un edificio, como se muestra en el gráfico. ¿Quién de ellos genera el mayor ángulo de elevación al observar la cima? Considera que los tres observadores están al mismo nivel del pie del edificio.



A partir del gráfico, analizamos la información de la tabla.

Persona	Distancia horizontal (m)	Altura referencial (m)	Relación	Ángulo de elevación
Lucía	100	50	$tan\alpha = \frac{50}{100} = 0{,}5$	$\alpha \approx 26{,}6°$
Diego	150	50	$tan\beta = \frac{50}{150} \approx 0{,}333$	$\beta \approx 18{,}4°$
José	200	50	$tan\theta = \frac{50}{200} = 0{,}25$	$\theta \approx 14°$

Observamos que, a menor distancia horizontal, mayor es el ángulo de elevación. Por eso, Lucía necesita levantar más la mirada para ver la cima.

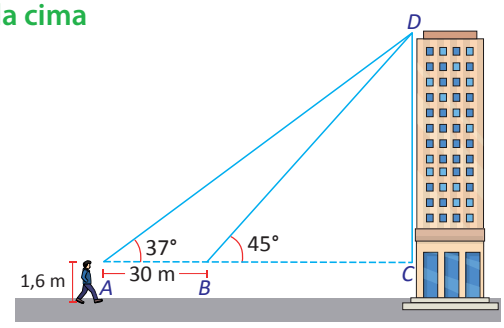
De acuerdo con lo analizado, definimos lo siguiente:

Ángulo de elevación. Es el ángulo formado entre la línea de mira de un observador que mira hacia arriba y la línea horizontal.

Ángulo de depresión. Es el ángulo formado entre la línea de mira de un observador que mira hacia abajo y la línea horizontal.

Situación: Desde el suelo hasta la cima

Una persona observa la parte superior de un edificio con un ángulo de elevación de 37°. Luego avanza 30 m hacia el edificio y, desde esa nueva posición, lo observa con un ángulo de 45°. La altura de sus ojos con respecto al suelo es de 1,6 m. ¿Cuál es la altura total del edificio?



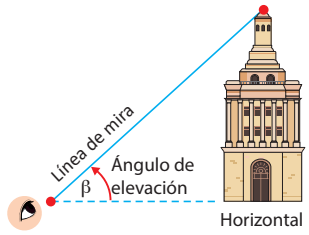
Del gráfico se deduce lo siguiente:

- En el triángulo notable de 37° y 53°, $m\overline{DC} = 3k$.
- En el triángulo notable de 45°, $m\overline{BC} = 3k$.
- Además, aplicando la tangente de 37°, obtenemos $tan37° = \frac{3}{4} = \frac{3k}{30 + 3k}$

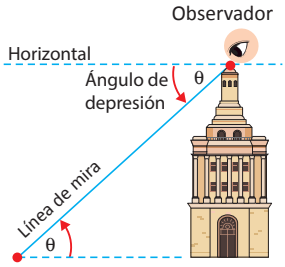
Resolvemos la ecuación $90 + 9k = 12k \rightarrow k = 30$, de donde la altura total $= 3k + 1{,}6 = 3(30) + 1{,}6 = 90 + 1{,}6 = 91{,}6$ m.

Ten en cuenta

Ángulo de elevación



Ángulo de depresión



Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas referidos a las alturas con triángulos, y establece la relación ángulo-lados (elevación/depresión).
- Representa la situación con esquemas y expresa las relaciones con razones trigonométricas (*sen*, *cos*, *tan*).
- Emplea procedimientos para obtener las razones trigonométricas y hallar alturas o distancias.
- Justifica la razón trigonométrica seleccionada, y argumenta con ejemplos la no proporcionalidad entre el ángulo y la altura. Evalúa las afirmaciones y sustenta los resultados obtenidos.

Actividad lúdica



¡Interpreta jugando! Revisa las reglas del juego, reflexiona tus estrategias y comunica tus ideas con sentido matemático.

Código Hanói: el desafío de los discos infinitos

1. Situación

Hace siglos, los monjes del templo de Hanói construyeron una torre con 64 discos que deben trasladarse siguiendo reglas sagradas. Se dice que, al completar la tarea, el universo reiniciará su ciclo. Ahora, ustedes han sido elegidos para reconstruir la lógica perdida de Hanói.

Cada equipo enfrentará desafíos que les permitirán descubrir la fórmula secreta para predecir los movimientos mínimos. Solo así podrán desbloquear el Código Hanói, compuesto por cinco dígitos. ¡Empecemos, tú puedes!



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Equipos de 2 a 4 estudiantes

b. Se requiere contar con los soportes y los discos. El juego consiste en pasar todos los discos del poste ocupado (donde se encuentra la torre inicial) a uno de los otros postes vacantes, siguiendo estas pautas:

- Solo se puede mover un disco a la vez.
- Un disco más grande no puede colocarse sobre uno más pequeño.
- Solo se puede mover el disco que se encuentre en la parte superior de cada varilla.

c. Cada equipo debe registrar todos los movimientos y completar las consignas de cada desafío.

d. Para desbloquear el código, deben justificar cada cálculo y patrón descubierto.

e. Se valora la discusión y argumentación grupal fomentando la colaboración y el razonamiento crítico.

Tu propósito de aprendizaje

Modela y representa el problema (actividad lúdica: Torre de Hanói) mediante una relación exponencial, expresando la correspondencia entre discos y movimientos. Emplea estrategias de conteo y patrones para hallar el número mínimo de movimientos. Justifica el crecimiento exponencial, argumenta la imposibilidad al aumentar los discos y sustenta la comprensión del fenómeno.

Practica valores

- Motiva a tus compañeros a esforzarse y comparte tus experiencias de mejora personal.
- Cuida las plantas del aula y del huerto escolar regándolas responsablemente.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: Tres discos para empezar

a. Tema: Observación y experimentación

b. Consigna: Resuelvan la torre con tres discos. ¿Cuántos movimientos mínimos se requieren?

c. Acción: Ejecuten el juego físico y registren cada paso.

d. Reflexión: ¿Podrían haberlo hecho en menos pasos?

Desafío 2: Escalera invisible

a. Tema: Patrones numéricos

b. Consigna: Completen la tabla con los movimientos mínimos para 1 a 5 discos y observen la regularidad.

c. Acción: Predigan el número de movimientos para seis discos.

Desafío 3: El código oculto

a. Tema: Modelación matemática

b. Consigna: Construyan una fórmula general para predecir el número mínimo de movimientos para n discos.

c. Acción: A partir de la tabla, deducen que $M(n) = 2^n - 1$.

Desafío 4: Mentira matemática y el templo infinito

a. Tema: Pensamiento crítico y aplicación

b. Consigna: Verifiquen la afirmación: "Cada disco nuevo suma solo dos movimientos".

c. Acción:

- Refuten con la tabla y el modelo demostrando que el crecimiento es exponencial. Calculen también los movimientos para 64 discos: $M(64) = 2^{64} - 1 \approx 1{,}84 \times 10^{19}$.
- Consideren ahora 4, 5 o más postes y discutan cómo la estrategia óptima cambia y cómo esto afecta el número mínimo de movimientos.

d. Reflexión: Consideren la imposibilidad física de realizar tal tarea.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Cómo se evidencia el crecimiento exponencial en los movimientos de la torre?

b. ¿En qué momento pasaron de contar pasos a modelar matemáticamente?

c. ¿Cómo detectaron que la afirmación "Cada disco suma solo dos movimientos" era incorrecta?

d. ¿En qué otras situaciones de la vida real o problemas matemáticos podrían aplicarse estructuras o patrones similares?

Evalúa tus progresos

- Representa la posición y el mínimo de movimiento (Torre de Hanói) con una función exponencial, y establece la fórmula que relaciona discos (n) y movimientos ($M(n)$).
- Representa la relación discos-movimientos en tablas, expresa la solución (64 discos) con notación exponencial y comunica la magnitud del crecimiento.
- Emplea estrategias (patrones) para hallar movimientos mínimos, aplica procedimientos y determina si la solución es factible en el tiempo.
- Justifica el crecimiento exponencial, argumenta la imposibilidad física (torre grande), evalúa los procedimientos y la estrategia óptima, y susténtalos.

UNIDAD

4

Diseñamos sistemas productivos que impulsan el bienestar y el equilibrio ambiental



OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

12 PRODUCCIÓN Y CONSUMO RESPONSABLES

Este objetivo promueve el uso eficiente de los recursos y la toma de decisiones responsables para garantizar la sostenibilidad de los sistemas productivos.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Evaluación de escenarios con restricciones para optimizar decisiones
- Promoción de un consumo responsable
- Reducción de desperdicios y del impacto ambiental de los procesos productivos con criterios de sostenibilidad

En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión, datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Sistema de inecuaciones y región factible

- Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Tipos de soluciones en sistemas de inecuaciones
- Método de resolución y su representación gráfica
- Método de optimización: la región factible

Transformaciones geométricas isométricas

- Simetría axial y central
- Traslaciones y rotaciones

Transformaciones geométricas

- Homotecia directa
- Homotecia inversa
- Combinaciones de isometrías y homotecias

Organización y presentación de datos

- Tablas de frecuencias para datos agrupados y no agrupados
- Gráficos estadísticos: histograma y polígono de frecuencias para datos agrupados

Medidas estadísticas

- Medidas de tendencia central: media, mediana y moda para datos agrupados
- Medidas de tendencia central: análisis de sesgo en las medidas
- Medidas de dispersión: rango, desviación media y estándar, coeficiente de variación



Fuente: Shutterstock (2020).

Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque de derecho
  - Libertad y responsabilidad
  - Diálogo y concertación

INVESTIGAMOS



Analiza cada situación, asume un rol, resuelve apoyándote en el anexo y justifica tus ideas matemáticas.

SITUACIÓN

Diseñando un sistema acuícola sostenible

El Ministerio de la Producción informó que la acuicultura peruana, pese a su potencial, aún tiene un bajo nivel de desarrollo y se enfoca en pocas especies. Además, existe concentración regional de productores y limitada diversificación. Planificar un proyecto acuícola sostenible representa un desafío que exige eficiencia en el uso del agua, el espacio y el presupuesto.

Como ingeniero pesquero y acuicultor, tu misión es diseñar una unidad de cultivo eficiente, funcional y sostenible considerando la distribución del área, el tipo de especie y los estándares ambientales.

Acuicultura espera incrementar en más de 70 % las unidades productivas de este sector

Nota de prensa

Se espera superar 21 000 unidades productivas y fortalecer sus capacidades.



Fuente: Adaptado de *El Peruano* (2023).

¿Qué decisiones técnicas y estratégicas puedes tomar para diseñar un proyecto acuícola sostenible, que maximice el rendimiento, promueva la diversificación y garantice viabilidad económica?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Analiza** información estadística sobre especies, regiones y costos de producción en acuicultura. Para ello, obtén las medidas de tendencia central a partir de datos agrupados e interpreta los valores obtenidos. Asimismo, identifica patrones y desigualdades que orienten el diseño inicial de la unidad de cultivo.
- **Modela** las restricciones del diseño mediante un sistema de inecuaciones lineales con dos variables y representa gráficamente la región factible. Establece una función objetivo que exprese el propósito del proyecto y evalúa sus valores en los puntos extremos. Selecciona la mejor alternativa dentro de las opciones viables justificando la decisión con base en el análisis del modelo.
- **Transforma** el plano de la unidad acuícola utilizando homotecias para ajustar la escala del diseño. Aplica traslaciones o simetrías para reorganizar la distribución de zonas funcionales en el espacio y optimiza el uso del terreno mediante transformaciones geométricas que mejoren su operatividad.
- **Obtén** las medidas de dispersión sobre costos o rendimientos con base en datos agrupados y determina la estabilidad de los valores mediante desviaciones, varianza y coeficiente de variación. Además, evalúa el riesgo y la sostenibilidad del proyecto considerando la variabilidad de los datos.
- **Elabora** y sustenta una propuesta de unidad acuícola sostenible integrando el diseño transformado, el modelo de inecuaciones, la función objetivo y el análisis estadístico. Argumenta cómo tus decisiones optimizan recursos y garantizan sostenibilidad en un contexto real. Evalúa el riesgo y justifica la viabilidad del proyecto según la variabilidad de los datos.

SITUACIÓN

Gestión eficiente de un restaurante

La gestión de un restaurante requiere una planificación cuidadosa de costos, precios y proyecciones de ventas. A pesar de que el sector ha crecido un 5,32 % este año, muchos restaurantes aún enfrentan desafíos en la gestión eficiente de sus recursos. Este desequilibrio entre ingresos y gastos puede comprometer la estabilidad financiera del negocio.

Como gestor de restaurantes y planificador de recursos, tu misión es diseñar un plan eficiente que optimice el uso de los recursos, maximice las ganancias y garantice un servicio de alta calidad.



Fuente: Rreepik

¿Qué decisiones técnicas y estratégicas puedes tomar para elaborar un plan eficiente de gestión de un restaurante que optimice recursos, maximice las ganancias y asegure un servicio de alta calidad?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Reconoce** las preferencias de alimentación de un grupo de personas así como las tendencias de los precios de menús empleando las medidas de tendencia central.
- **Elabora** un menú semanal, de preferencia, y diseña el presupuesto asociado considerando costos e ingresos esperados. Modela las restricciones mediante inecuaciones lineales. Proyecta precios mínimos y ganancias máximas.
- **Organiza** los horarios del personal de atención y cocina en función del menú y la demanda diaria esperada. Representa las restricciones mediante inecuaciones y optimiza la distribución del tiempo.
- **Diseña** una distribución funcional a escala del espacio del restaurante considerando el área disponible, aforo y zonas de atención. Aplica homotecias para ajustar proporciones y simular redistribuciones eficientes.
- **Determina** la estabilidad de los costos y precios de venta utilizando medidas de dispersión en datos agrupados; asimismo, evalúa el riesgo y la sostenibilidad del plan considerando la variabilidad de los datos.
- **Elabora** y sustenta un plan de gestión semanal que integre el menú, presupuesto, distribución del espacio y proyecciones económicas. Justifica cómo tus decisiones optimizan recursos y aseguran un servicio de calidad.

Anexo A: Diseñando un sistema acuícola sostenible

1. Área mínima por especie

Especie	Tipo de sistema	Área mínima (m^2/t)	Tiempo de crianza (meses)
Trucha	Estanques en tierra	10	7
Paco	Jaulas flotantes	12	6
Tilapia	Estanques rústicos	9	5
Concha de abanico	Suspensión marina	8	12
Langostino	Jaulas marinas	11	5

Fuente: Adaptado de Enciso (2019).

2. Costos referenciales de insumos

Insumo o equipo	Unidad	Precio referencial (S/)	Vida útil (meses)
Alimento balanceado	kg	5,50	–
Bomba de agua	Unidad	1200	36
Aireador	Unidad	950	30
Jaula flotante	Unidad	1800	48
Red de manejo	Unidad	250	24
Kits de prueba de calidad de agua	kit	150	12

Fuente: Adaptado de Enciso (2019).

3. Producción estimada por especie

Especie	Producción mensual estimada (t)	Tiempo de crianza (meses)	Temperatura óptima (°C)
Trucha	3,0	7	12
Paco	2,5	6	26
Tilapia	2,0	5	28
Concha de abanico	4,5	12	20
Langostino	3,8	5	27

Fuente: Adaptado de Produce (2022).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

4. Costos de personal operativo

Tipo de personal	Salario mensual (S/)	Cantidad estimada
Operario de cultivo	1200	2
Técnico en acuicultura	1800	1
Vigilante	1000	1
Asistente administrativo	1500	1

Fuente: Adaptado de Produce (2022).

5. Frecuencia de cosecha y demanda por especie

Especie	Cosechas por año	Demanda nacional estimada (t/año)	Principal mercado
Trucha	1	15 000	Local y de exportación
Paco	2	18 000	Local
Tilapia	2	10 000	Local
Concha de abanico	1	20 000	De exportación
Langostino	2	25 000	De exportación

Fuente: Adaptado de Fondepes (2004).

6. Distribución del área de cultivo

Zona de la unidad	Espacio estimado (m^2)
Estanques o jaulas	200
Zona de alimentación	40
Área de manejo y cosecha	60
Almacenamiento de insumos	30
Área administrativa	20

Fuente: Adaptado de Dinara (2010).

7. Costos de construcción por tipo de material

Tipo de material	Costo por m^2 (S/)	Área estimada (m^2)
Cemento	10	200
Ladrillo	45	200
Malla galvanizada	25	100
PVC para drenaje	12	80
Acabados básicos	20	200

Fuente: Adaptado de Leal y Pacheco (2019).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Gestión eficiente de un restaurante

1. Encuesta para la gestión eficiente de un restaurante escolar

Este cuestionario tiene como propósito recoger información relevante sobre las preferencias alimenticias, percepción de precios, hábitos de consumo y condiciones del espacio físico. Los datos obtenidos permitirán diseñar un plan eficiente para la gestión de un restaurante escolar que optimice recursos y garantice un servicio de calidad.

1. ¿Qué tipo de plato prefieres a la hora de almorzar? (Ejemplos: arroz con pollo, tallarines, estofado, etc.) _____

2. ¿Con qué frecuencia almuerzas fuera de casa durante la semana? (0-5 veces) _____

3. ¿Cuánto dinero dispondrías para pagar por un menú completo? S/_____

4. ¿Cuánto pagarías como mínimo y como máximo por un menú completo? mínimo: S/_____; máximo: S/_____

5. ¿Qué forma de atención prefieres para consumir tu almuerzo?

a) Comer en el lugar **b)** Llevar la comida **c)** Que me traigan por *delivery*

6. ¿Cuántas personas suelen almorzar contigo cuando estás fuera de casa? _____

7. ¿Cuál es tu horario habitual de almuerzo? (Hora aproximada) _____

8. ¿Qué tan importante es para ti la comodidad del espacio físico del restaurante? Elige una opción.

1: nada importante 2: poco importante 3: importante 4: muy importante

9. ¿Qué tan importante es para ti la higiene del espacio? Elige una opción.

1: nada importante 2: poco importante 3: importante 4: muy importante

10. ¿Qué aspectos valorarías más en un menú? Marca hasta tres alternativas.

a. Buen sabor **c.** Valor nutricional **e.** Cantidad de comida

b. Precio accesible **d.** Variedad en la semana **f.** Presentación

11. ¿Estarías dispuesto(a) a pagar más por un menú más saludable?, ¿cuánto más? S/_____

12. ¿Cuál es tu medio de pago preferido al adquirir alimentos en el restaurante?

a. Efectivo **c.** Aplicación móvil

b. Transferencia **d.** Otro: _____

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Demanda estimada por plato (platos estrellas del menú)

Plato	Costo de insumos (S/)	Precio sugerido de venta (S/)	Demanda diaria (unidades)
Lomo saltado	18,00	35,00	50
Pollo a la brasa (porción)	10,00	20,00	60
Cebiche	12,50	30,00	45
Chaufa de pollo	8,00	18,00	40

Fuente: Adaptado de Infobae (2024).

3. Costos operativos detallados

Concepto	Costo mensual (S/)	Observaciones
Alquiler del local	3000	Incluye agua y mantenimiento
Sueldos del personal	7000	Dos cocineros y tres mozos
Energía eléctrica	1200	Promedio mensual
Gas	800	Consumo estimado en cocina
Utensilios y limpieza	500	Reposición mensual

Fuente: Adaptado de Medina (2023).

4. Variación de precios de alimentos por kilogramo

Producto	Precio mínimo (S/)	Precio máximo (S/)	Promedio (S/)
Pollo	6,50	8,00	7,25
Papa	1,20	2,50	1,85
Tomate	4,00	6,00	5,00
Cebolla	3,00	4,00	3,50
Aceite vegetal	8,00	11,00	9,50

Fuente: Adaptado de INEI (2025).

5. Precios de insumos alimentarios en el Perú (2025)

Categoría	Producto/Dato destacado	Variación (%)
Pescados y mariscos	Lisa	22,3
	Jurel	21,6
	Corvina	21,3
Carnes	Pollo eviscerado	3,1
	Promedio general	2,8
Lácteos y huevos	Huevos de gallina	3,7
Hortalizas y tubérculos	Poro	16,0
	Arveja verde	14,0
	Cebolla china	13,4

Fuente: Adaptado de INEI (2025).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

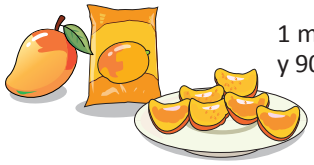
Exploramos



Cada aprendizaje previo es un peldaño. Úsalo para avanzar con seguridad, resolver desafíos y construir nuevos saberes.

1. Envasado de pulpa de mango

En una planta procesadora se obtiene pulpa de mango para jugos o conservas. Observa la imagen.



1 mango rinde entre 50 g y 90 g de pulpa

Además, se cuenta con un lote de 150 mangos.

a. Completa la tabla y escribe una inecuación que exprese las cantidades mínima y máxima de pulpa (en gramos) que puede obtenerse del lote.

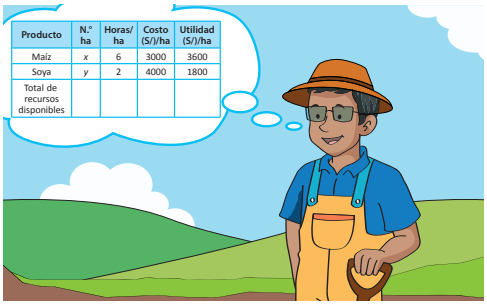
Información	Expresión simbólica (inecuación)
Cantidad mínima de pulpa que se obtendría con 150 mangos	
Cantidad máxima de pulpa que se obtendría con 150 mangos	

b. Si se cuenta con x mangos, escribe una expresión algebraica que represente la pulpa mínima y máxima (g) que se puede obtener.

c. Se afirma que si aumentas la cantidad de mangos, aumentan proporcionalmente los valores mínimo y máximo de pulpa. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta con ejemplos.

2. Siembra de maíz y soya

Un agricultor planifica la siembra de maíz y soya, y desea maximizar la utilidad, sin exceder los recursos disponibles: 12 hectáreas (ha), 48 horas de mano de obra y S/40 000 de capital. Cada cultivo requiere ciertos recursos y genera utilidad.



a. Con la información anterior, completa la tabla.

Producto	N.° ha	Horas / ha	Costo (S/) / ha	Utilidad (S/) / ha
Maíz	x	6	3000	3600
Soya	y	2	4000	1800
Total de recursos disponibles				

b. Si no se cultiva soya, determina el número de hectáreas de maíz y la utilidad.

c. Con 10 horas adicionales de mano de obra, analiza el efecto en la solución óptima.

3. Servicio de internet

La tabla muestra el pago de instalación y el pago mensual por el servicio de internet en dos compañías diferentes.

Compañía	Pago único de instalación (S/)	Pago mensual (S/)
A	9,50	45,00
B	12,50	43,50



a. A partir de la información dada en la tabla, ¿cómo representarías el monto (M) a pagar en un tiempo de x meses en cada una de las compañías?

b. ¿Durante cuántos meses el monto a pagar en la compañía A resulta ser menor o igual al monto en la compañía B? Representa la situación con una inecuación, resuélvela y justifica tu procedimiento.

4. Representaciones algebraicas

En cada una de las siguientes situaciones, se plantean condiciones que deben cumplirse.

Completa la tabla escribiendo la expresión algebraica que representa cada situación.

Situación	Expresión algebraica
Un maestro organiza libros en dos estantes. Uno contiene cinco libros más que el otro, y la cantidad total de libros entre ambos debe ser menor que 37.	
Una empresa calcula el costo de producción como el triple de las unidades fabricadas menos la mitad de esas mismas unidades. Esta diferencia debe ser menor que 24.	
Una empresa calcula su beneficio restando S/5 al 20 % del valor de las ventas realizadas. Para que haya ganancia, ese resultado debe ser positivo.	
Se diseña un jardín en forma de un triángulo equilátero y con un perímetro que no supera los 76 m.	

5. La desigualdad y propiedades

Se tiene la siguiente inecuación:

$$\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2} < \frac{1}{6}$$

Un estudiante plantea el procedimiento bajo ciertas propiedades:

$6\left(\frac{x-1}{3} - \frac{x+1}{2}\right) < 6 \cdot \frac{1}{6}$	Multiplicación por el m. c. m. (6)
$2(x-1) - 3(x+1) < 1$	Simplificación de fracciones
$2x - 1 - 3x + 1 < 1$	Aplicación de la propiedad distributiva
$-x < 1$	Reducción del término semejante
$x < -1$	Multiplicación por –1 a ambos miembros

En el procedimiento, determina si se han aplicado correctamente las propiedades. Si encuentras algún error, explica por qué, corrígelo de forma justificada y resuelve la inecuación.

6. Combinaciones saludables

A continuación se muestra información respecto del contenido de grasas en alimentos y las calorías diarias recomendadas (kcal/día) por la FAO y la OMS, según grupo etario y actividad física:

FAO (contenido de grasas en 100 g de alimentos comunes)
- Pollo a la plancha: 3 g
- Carne de res: 10 g
- Queso: 33 g
- Palta: 15 g

OMS (calorías diarias recomendadas, kcal/día)
- 1600 kcal (niños y adolescentes)
- 2000 kcal (adulto promedio)
- 2500 kcal (adulto con actividad física intensa)

Nota: 1 g de grasa aporta 9 kcal.

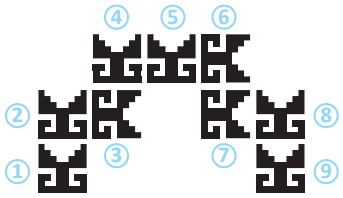
a. Un adulto promedio consume 100 g de pollo a la plancha, 100 g de carne de res y 50 g de queso en un día. ¿Supera las calorías recomendadas por grasas según la OMS? Justifica tu respuesta mostrando los cálculos.

b. Una persona tiene una dieta recomendada de 2500 kcal/día, de las cuales las calorías provenientes de la grasa no deben superar el 30 %. ¿Puede consumir 100 g de queso y 100 g de carne de res sin exceder ese límite? Justifica tu respuesta.

1. TransformArt, figuras con sentido

Una empresa plantea el diseño de bolsos con bordados, el cual presenta las siguientes características:





a. Al observar los bordados, ¿qué transformaciones (rotación, reflexión, traslación) llevan el cuadro 1 al 4 y al 9? Explica tu elección. Considera que puede haber más de una respuesta.

b. Diseña el cuadro 22 e indica si tiene núcleo de repetición o propón uno. Justifica.

c. Si se define un núcleo de repetición en los bordados, ¿los cuadros en posiciones múltiplos de 4 coinciden siempre con el cuadro inicial? Justifica tu respuesta.

2. Transformaciones que decoran

Una diseñadora crea frisos (patrones repetidos en una franja) a partir de una figura base. Observa los siguientes frisos:

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	Fig. 5	Fig. 6	
Modelo A							...
Modelo B							...
Modelo C							...

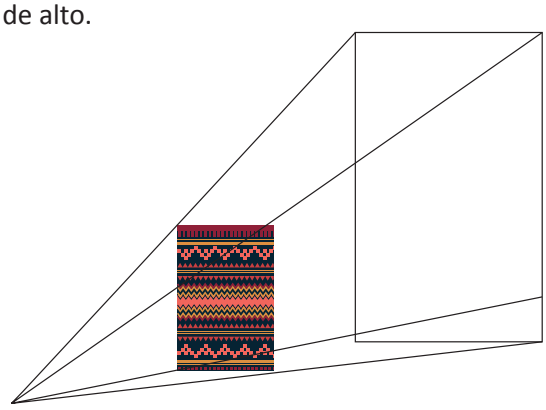
a. A partir de la figura base (figura mínima que se repite en cada friso), ¿qué transformaciones (rotación, reflexión, traslación) aplicarías para construir cada modelo?

b. Compara los modelos A y C. ¿Qué reflexiones se aplican y respecto a qué eje?

c. Expresa las características de las figuras 17 y 21 en cada modelo relacionando su posición con la figura que ocupan.

3. Ampliación de fotografía

Un emprendedor elabora una gigantografía de publicidad que se colocará en la pared lateral de un edificio de 10 m de ancho por 42 m de altura. Para ello, dispone de un diseño original de 10 cm de ancho por 15 cm de alto.



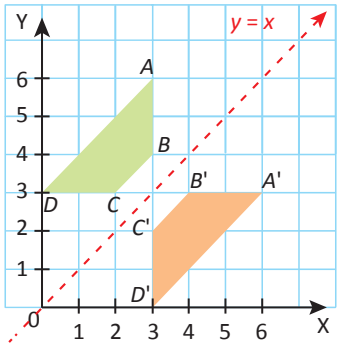


a. ¿Cuáles serán las dimensiones máximas que podrá tener la gigantografía si tiene que ser semejante al diseño original?

b. Explica por qué es importante mantener las proporciones al ampliar o reducir una imagen.

4. Decisiones bajo restricción

En el plano cartesiano se traza la recta $y = x$. Observa la figura $ABCD$ ubicada en el primer cuadrante. Si aplicamos una reflexión respecto a la recta $y = x$, cada punto de la figura se traslada a una nueva posición e intercambia sus coordenadas, lo cual genera la figura transformada $A'B'C'D'$.



a. De acuerdo a la gráfica adjunta, completa la tabla con las coordenadas de los puntos reflejados.

Punto	Coordenada original P(x; y)	Coordenada reflejada P'(x'; y')
A	(3; 6)	
B		(4; 3)
C	(2; 3)	
D		(3; 0)

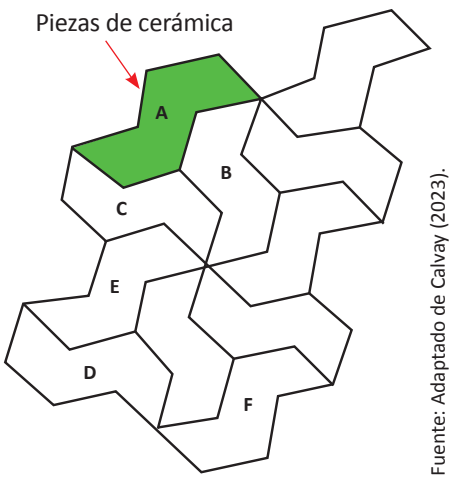
b. De la tabla mostrada, propón una regla general para reflejar un punto (x; y) respecto de la recta $y = x$. Justifica mediante procedimientos y construcciones.

5. Remodelación de un parque

Durante la remodelación del parque, un albañil instaló cerámicas en la vereda siguiendo la forma mostrada en la imagen. El hijo quiere seguir colocando las piezas, pero no sabe cómo organizarlas.

- Hijo: ¿Cómo lograste que las piezas encajaran tan bien?
- Papá: Tomé la pieza A como referencia. Luego, trasladé, giré e invertí las demás piezas para que encajaran.

Movimiento	Escribe la transformación geométrica realizada
A → B	
C → E	
C → D	
A → F	



Parte del parque con cerámicos

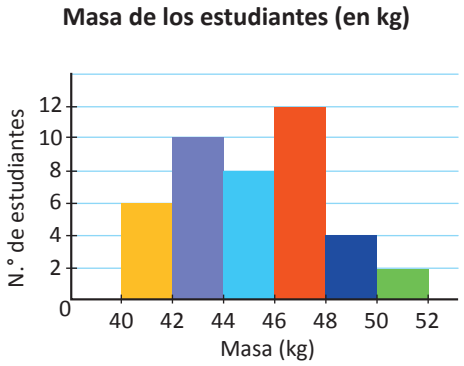
Fuente: Adaptado de Calvay (2023).

a. Para cada movimiento indicado en la tabla, identifica la transformación geométrica correspondiente (traslación, rotación o reflexión).

b. Compara los movimientos A → B y A → F. ¿Cuál requiere menos desplazamiento o giro para colocar la pieza correctamente? Justifica tu respuesta usando conceptos de transformaciones geométricas.

1. Decisiones saludables

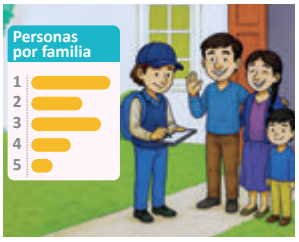
El histograma muestra la masa (en kg) de los estudiantes que forman parte de la selección de atletismo.



a. El entrenador debe decidir si la masa mínima para seleccionar a los estudiantes de atletismo será de 43 kg o 44 kg. ¿Qué opción elegirías y por qué?

b. Una nutricionista propone reforzar el plan alimenticio de un grupo de estudiantes que representa más del 60 % del total. ¿Qué intervalos de peso incluirías en ese grupo objetivo? Fundamenta tu respuesta con cálculos y razones considerando que pueden existir varias respuestas posibles.

2. Contando para compartir



Para brindar ayuda social a una comunidad, se preguntó a sus miembros cuántas personas viven en cada una de sus familias. Estas fueron sus respuestas:

3; 5; 4; 3; 5; 6; 8; 3; 3; 5; 7; 5; 6; 5; 4; 4; 7; 4; 5; 3

a. Con las respuestas obtenidas, completa la tabla.

Personas por familia (x_i)	Frecuencia (f_i)	Porcentaje (f_i %)
3	5	
4		20
5		
6	2	
7		10
8	1	

b. Si para la ayuda se dispone de 100 raciones de alimentos, que deben repartirse según el número total de personas por familia, ¿cómo deberían repartirse? Justifica tu respuesta mostrando los procedimientos.

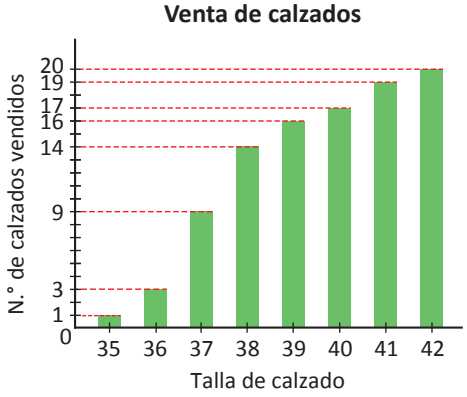
c. ¿Qué porcentaje de familias con más de seis integrantes hay en la comunidad? Evalúa si la ayuda social está bien dirigida.

3. Ventas de calzado

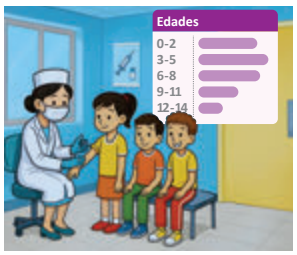
Una tienda registró la cantidad de pares de zapatos vendidos por talla para analizar las tallas con mayor frecuencia de venta durante la temporada.

a. ¿Hasta qué talla de calzado se debería garantizar el inventario para cubrir al menos el 75 % de las ventas totales de los clientes? Justifica tu respuesta construyendo y analizando una tabla de frecuencias simples y acumuladas.

b. El gráfico muestra que la mayoría de las ventas corresponde a las tallas grandes. ¿Es correcta esta interpretación? Justifica tu respuesta.



4. Pacientes atendidos por edad



En la imagen se observa el registro de edades de niños atendidos durante una campaña de vacunación.

Completa la tabla y luego responde.

Edad	f_i	h_i	F_i	H_i
[0; 2[		0,20		
[3; 5[	20			
[6; 8[				0,85
[9; 11]			80	

a. ¿Qué intervalo de edad contiene al mayor número de niños atendidos en la vacunación?

b. ¿En qué intervalo acumulado se supera el 50 % de la población atendida? Explica tu razonamiento.

c. A partir de la tabla completa, obtén la edad promedio de los niños atendidos. Explica tu procedimiento.

5. Análisis de temperatura

Durante una semana, un técnico registró la temperatura en una comunidad y obtuvo la media aritmética. A continuación se muestra el registro de la temperatura en una tabla y el procedimiento para obtener la media aritmética.

Temperatura (°C)	x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$
[8; 10[	9	3	27
[10; 12[	12	4	48
[12; 14[	13	9	107
[14; 16[	15	3	45
[16; 18]	16	1	16
Total		20	250

Con estos datos, el técnico concluyó que la temperatura promedio fue la siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i f_i}{n}$$

$$\bar{x} = \frac{250}{20} = 12{,}5$$

Revisa el procedimiento desarrollado e identifica posibles errores en la tabla o en el cálculo de la media. Explícalos y corrígelos de manera justificada.

6. Prevención con evidencia

A continuación se muestra información de un estudio realizado a 100 pacientes adultos. Se presentan los intervalos de glucosa (en mg/dL) y su estado nutricional según el IMC (índice de masa corporal).

Intervalo de glucosa (mg/dL)	N.° de pacientes
Menos de 70 (hipoglucemia)	5
70-99 (normal)	45
100-125 (prediabetes)	30
126 o más (diabetes)	20
Total	100

Estado nutricional (según el IMC)	N.° de pacientes
Peso normal	35
Sobrepeso	40
Obesidad	25
Total	100

a. Según las tablas, analiza si existe relación entre el estado nutricional y los niveles de glucosa. Explica tus conclusiones considerando que existen otros factores.

b. Según los datos, ¿qué grupo de personas debería priorizar el centro de salud para prevenir enfermedades? Fundamenta tu respuesta con la información de las tablas.

Desarrollamos



Analiza situaciones, muestra estrategias de resolución, explica con claridad tus ideas matemáticas y profundiza tus aprendizajes.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve situaciones problemáticas que involucran sistemas de inecuaciones lineales, explica el significado de la región factible y sus vértices, utiliza métodos gráficos para determinar la solución óptima, y justifica la validez de la solución óptima (máximo) para la toma de decisiones.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

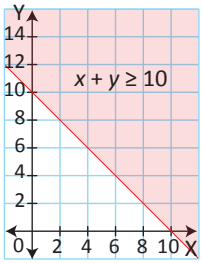


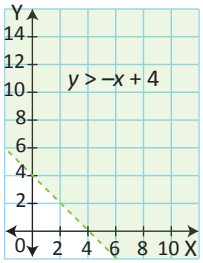
Practica valores

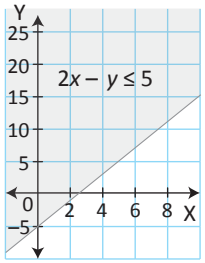
- Decide con autonomía cómo participar en las actividades del aula respetando las normas acordadas por el grupo.
- Reduce y reutiliza el papel y otros materiales desechables durante las actividades en clase.

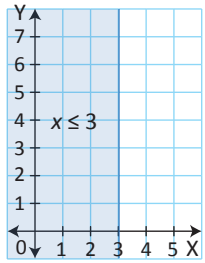
Pensamos y actuamos

1. Observa las representaciones gráficas. Cada una corresponde al conjunto solución de una inecuación lineal con dos variables.









A partir de las gráficas mostradas, completa la siguiente tabla:

Inecuación	Tipo de línea (¿está incluida?)	Ubicación de la región solución	¿Qué podrían representar las variables?	Contexto posible
$x + y \geq 10$	Línea continua (si está incluida)	Región por encima o sobre la recta	x: número de estudiantes y: número de adultos	Venta de entradas: se debe vender al menos 10 en total
$2x - y \leq 5$				
$x \leq 3$				
$y > -x + 4$				

a. ¿La línea continua se incluye la solución de la inecuación? Justifica tu respuesta.

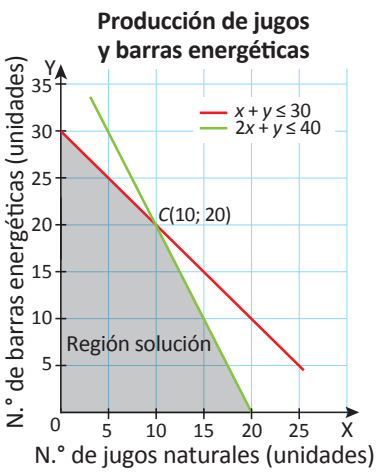
b. ¿Cómo puedes verificar si un punto cualquiera pertenece o no a la región solución?

c. ¿Crees que una misma inecuación puede representar situaciones distintas dependiendo del contexto? Sustenta tu respuesta con un ejemplo.

2. En una feria escolar, el grupo de producción de bocadillos saludables tiene dos restricciones para organizar su producción semanal.

- Restricción 1: La suma de los jugos naturales (x) y de las barras energéticas (y) no debe superar las 30 unidades.
- Restricción 2: Producir cada jugo toma dos horas y cada barra una hora, con un máximo de 40 horas disponibles. Además, solo se consideran cantidades no negativas de jugos y barras energéticas ($x \geq 0, y \geq 0$).

Estas restricciones pueden representarse gráficamente para visualizar qué combinaciones de productos son posibles.



Considerando la información anterior, completa la tabla y luego responde.

Sistema de inecuaciones	Rectas límite (forma explícita)	Puntos de intersección con los ejes	¿Dónde se ubica la región solución?	¿Qué representa cada punto del plano solución?
$x + y \leq 30$	$x + y = 30$	(30; 0) y (0; 30)		
$2x + y \leq 40$	$2x + y = 40$			

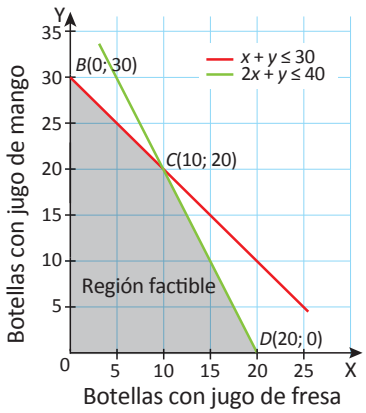
a. ¿Cómo podrías verificar si un punto cumple con ambas restricciones sin usar el gráfico?

b. Si un cliente pide al menos cinco botellas de jugo de fresa ($x \geq 5$), ¿cómo cambia la región solución?

3. El equipo de Flor y José produce botellas con jugo de fresa (x) y botellas con jugo de mango (y). Están limitados por los siguientes recursos:

- Restricción 1: $x + y \leq 30$ (por capacidad de embotellado diario)
- Restricción 2: $2x + y \leq 40$ (por número de horas disponibles)
- Restricción 3: $x \geq 0$, $y \geq 0$ (no se pueden producir cantidades negativas)

Región factible y vértices



El precio de venta es de S/4 por jugo de fresa y S/5 por jugo de mango. Flor propone maximizar el ingreso total con la función objetivo $Z(x; y) = 4x + 5y$.

a. José afirma lo siguiente: "El punto (20; 0) es el que maximiza el ingreso porque produce la mayor cantidad de jugo de fresa, que es más rentable". ¿Es correcto? Justifica tu respuesta.

b. Si el precio del jugo de mango baja a S/3, ¿la combinación de botellas que maximiza el ingreso (punto óptimo) seguirá siendo la misma?

¿Qué construimos?

Veamos qué opinan dos estudiantes sobre cómo producir mejor.

Estudiante 1	Estudiante 2
La mejor combinación es producir más jugo de fresa (x), porque pienso que eso significa mayor producción total.	Producir más jugo de fresa (x) no siempre da más ingresos; depende de precios y restricciones.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas de restricciones (ejemplos: de producción, recursos) que involucran el sistema de inecuaciones lineales, y establece la función objetivo para su optimización.
- Representa la región factible en el plano cartesiano, e interpreta el significado de la líneas continuas y discontinuas y de los vértices.
- Emplea procedimientos referidos a la evaluación de los vértices para hallar el punto que maximiza la función objetivo dentro de la región factible.
- Justifica, con ejemplos, por qué un punto pertenece o no a la región factible, y argumenta que la solución óptima se encuentra siempre en uno de los vértices del polígono factible.

Tu propósito de aprendizaje

Modela diseños mediante la aplicación de transformaciones geométricas y sus combinaciones; describe las propiedades de conservación de las isometrías; utiliza procedimientos de traslación, rotación y homotecia en el plano coordenado, y argumenta la validez de los movimientos al justificar el mantenimiento de la forma, tamaño u orientación.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.

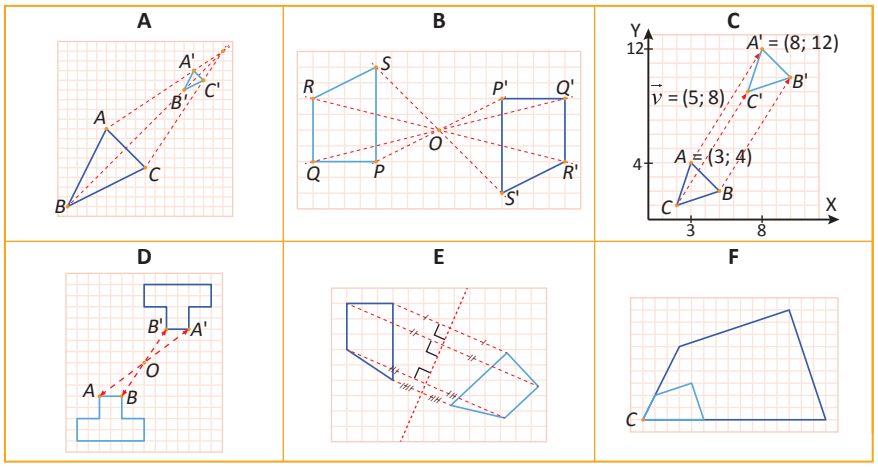


Practica valores

- Dialoga con tus compañeros para resolver desacuerdos y buscar consensos antes de tomar decisiones.
- Cuida los recursos del aula empleando el papel y demás materiales con criterio para evitar desperdicios.

Pensamos y actuamos

1. Un grupo de estudiantes de diseño técnico busca crear un diseño de módulos repitiendo y transformando una figura base. Cada pieza fue transformada para mantener armonía en el conjunto. Observa las seis figuras empleadas en el diseño.



A partir de las transformaciones mostradas, completa la tabla y luego responde.

Figura a transformar	Tipo de transformación	Eje, centro, vector o factor	Conserva (forma o tamaño)	Cambia orientación (especificar)
A				
B				
C				
D				
E				
F				

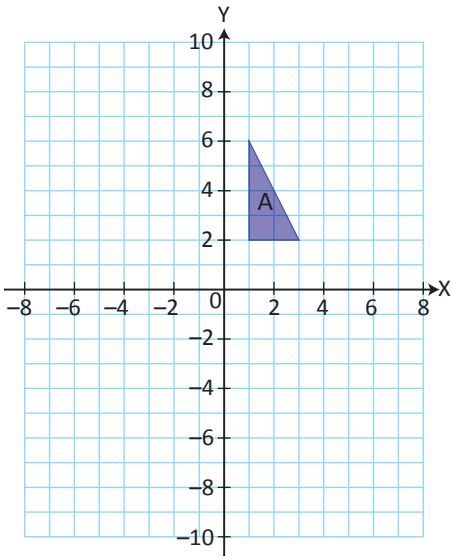
a. ¿Qué figuras presentan transformaciones que no conservan el tamaño?, ¿cómo lo sabes?

b. ¿Qué transformaciones conservan el sentido horario o antihorario de la figura?

c. ¿Por qué algunas transformaciones se consideran isometrías?

d. ¿Qué figuras de la cuadrícula coinciden entre sí tras aplicar una transformación isométrica?

2. La figura A representa una pieza en el diseño de un logotipo. Se desea analizar qué transformaciones se pueden aplicar para obtener nuevas posiciones en el plano.



Representa la secuencia de transformaciones a partir de la figura A con las siguientes indicaciones:

a. Trasládala con el vector (–7; –3) y nómbrala figura B.

b. Rótala 90° antihorario con respecto al punto (–1; 2) y nómbrala figura C.

c. Describe la transformación de C a B, e indica si conserva forma, tamaño u orientación.

d. Realiza una homotecia de la figura C con razón –2 y centro (3; 1), y obtén la figura D.

e. Analiza qué transformación única equivale al conjunto de transformaciones que llevan la figura C hasta la figura A.

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, dos estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2
Si una figura cambia de tamaño, entonces también cambia su forma.	Cualquier transformación que cambie la orientación de una figura también modifica su forma.

a. ¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

b. ¿Puede una figura transformarse y conservar sus propiedades (forma, tamaño u orientación)? Justifica tu respuesta considerando al menos dos propiedades geométricas y una figura del diseño.

Evalúa tus progresos

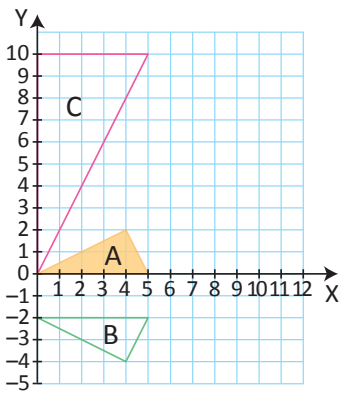
- Resuelve problemas orientados a diseños de figuras que involucran transformaciones geométricas y sus combinaciones.
- Explica los efectos de las transformaciones, y describe las condiciones de conservación del sentido y las características que definen las isometrías (traslación y rotación).
- Emplea procedimientos que involucran la secuencia de transformaciones (traslación, rotación y homotecia), y determina la posición final de la figura en el plano.
- Justifica con ejemplos la conservación o modificación del tamaño, forma u orientación de las figuras transformadas, y verifica la validez de las transformaciones aplicadas.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

A partir de la figura A, se han obtenido las figuras B y C aplicando transformaciones geométricas. Observa el gráfico adjunto.

¿Qué transformaciones ha sufrido la figura A para obtener las figuras B y C? Justifica tu respuesta.



FORMALIZAMOS



Analiza los ejemplos matemáticos, discútelos, reflexiona sobre ellos y formaliza tus conclusiones para comprender mejor los retos propuestos.

SISTEMA DE INECUACIONES Y REGIÓN FACTIBLE

Sistema de inecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Situación: Organización de un evento

En un evento se vende entradas por S/5 para estudiantes y S/10 para adultos. Se busca recaudar al menos S/500 y el auditorio admite como máximo 80 personas. ¿Qué combinaciones de entradas hacen posible la recaudación?

Definamos las incógnitas, condiciones del problema y las formas de recaudación.

- x: número de entradas para estudiantes
- y: número de entradas para adultos
- Recaudación mínima: $5x + 10y \geq 500$
- Aforo máximo: $x + y \leq 80$

Estudiantes	Adultos	Total recaudado	Total de personas	¿Es posible el evento?
20	30	5(20) + 10(30) = 400	50	No alcanza la recaudación.
20	40	5(20) + 10(40) = 500	60	Sí, cumple ambas.
10	60	5(10) + 10(60) = 650	70	Sí, cumple ambas.
70	15	5(70) + 10(15) = 500	85	Supera el aforo.

Por tanto, para recaudar al menos S/500, se pueden vender entradas a 20 estudiantes y 40 adultos, o bien a 10 estudiantes y 60 adultos.

La experiencia anterior permite reconocer que un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** (x e y) es un conjunto de desigualdades de este tipo:

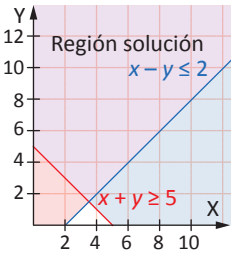
$a_i x + b_i y \; R \; c_i$, $i = 1; 2; \ldots; n$; $R \in \{<, \leq, >, \geq\}$; y a_i, b_i, c_i son números reales.

Cada inecuación representa una región del plano, y la solución del sistema es la región donde estas se intersecan. A esta región se le llama región solución.

Situación: Zona segura

Una municipalidad delimita un área de seguridad con las siguientes condiciones:

- El punto de monitoreo debe cumplir $x + y \geq 5$.
- Debe estar a la izquierda $x - y \leq 2$ y encima de la línea $x + y \geq 5$.



Se afirma: "La región solución está en el primer cuadrante". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.

Como se trata de distancias desde el origen de coordenadas, no pueden ser negativas.

En ese sentido, el punto de monitoreo debe estar en la región solución que se indica en la gráfica, entendida esta como la intersección de la región solución de cada inecuación. Si no se indican, deben asumirse $x \geq 0$ y $y \geq 0$, ya que representan distancias reales. Por lo tanto, la afirmación es correcta.

¿Sabías que...?

Los sistemas de inecuaciones se utilizan para analizar y resolver situaciones con restricciones productivas, representando límites de recursos y condiciones sostenibles para optimizar procesos, reducir desperdicios, y promover decisiones equitativas y responsables en el uso de los sistemas productivos.

Recuerda

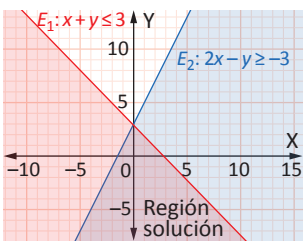
Una desigualdad lineal divide el plano en dos regiones.

Cuando el signo es ≥ o ≤, la recta forma parte de la solución y se representa con una línea continua.

En cambio, si el signo es > o <, la recta no se incluye en la solución y se dibuja con una línea discontinua.

Ten en cuenta

Representación gráfica de la región solución



Tipos de soluciones en sistemas de inecuaciones

Situación: Clima ideal para un paseo

Un grupo de estudiantes quiere salir al campo bajo estas condiciones:

- Probabilidad de lluvia menor al 30 %
- Temperatura entre 20 °C y 25 °C

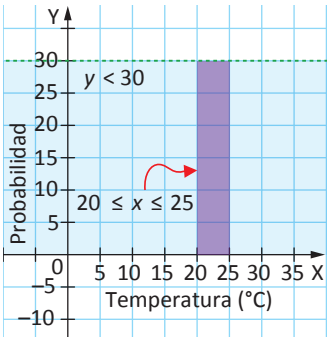
Además, grafican estas condiciones. ¿Existe una región en la gráfica que cumpla ambas? ¿Qué puedes anticipar sobre la zona que cumple ambas condiciones?

Probabilidad de lluvia menor a 30 %: representa los puntos bajo la recta $y = 30$.

Temperatura entre 20 °C y 25 °C: corresponde a la franja entre $x = 20$ y $x = 25$.

Intersección: zona común, donde $x \in [20; 25]$ e $y < 30$.

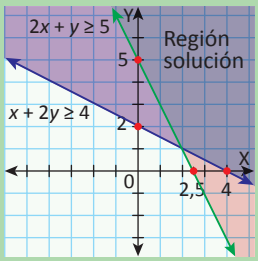
La intersección representa las temperaturas y la probabilidad de lluvia necesarias para días que los estudiantes saldrían al campo.



La representación gráfica muestra la región factible, donde ambas condiciones se cumplen al mismo tiempo.

Observando la explicación previa, notamos que la **solución del sistema de inecuaciones** es la región que satisfacen todas las inecuaciones simultáneamente; además, gráficamente, es su intersección. Por ejemplo, la región solución en la gráfica corresponde al sistema de inecuaciones:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 4 \end{cases}$$



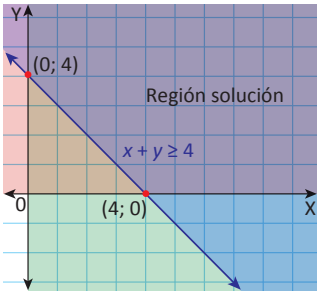
Situación: Región acotada

Un estudiante afirma que el sistema $x + y \geq 4$, $x \geq 0$ y $y \geq 0$, tiene una solución no acotada. ¿Ello es correcto? Explica qué tipo de región forma realmente.

Analizamos la región que se forma.

- La inecuación $x + y \geq 4$ representa la región por encima de la recta $x + y = 4$, que corta a los ejes en (4; 0) y (0; 4).
- Las condiciones $x \geq 0$ y $y \geq 0$ restringen la región al primer cuadrante.

  La intersección de estas tres condiciones es la zona del primer cuadrante situada sobre la recta $x + y = 4$.



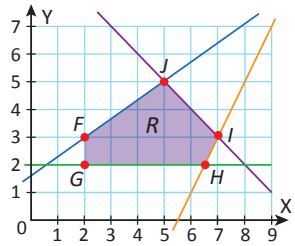
- La región no está acotada porque se extiende indefinidamente en el primer cuadrante por encima de la recta $x + y = 4$.

Por tanto, la región solución es no acotada, porque no tiene un límite superior: puede crecer infinitamente en las direcciones donde $x + y \geq 4$, con $x, y \geq 0$.

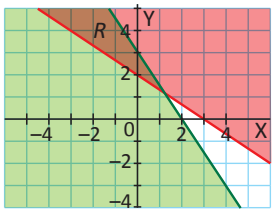
Recuerda

Tipos de región de solución (R) en sistemas de inecuaciones

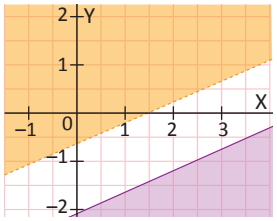
Región acotada. La intersección está limitada en todas las direcciones.



Región no acotada. La solución se extiende indefinidamente.



Sin solución. No hay intersección entre las regiones.



¿Sabías que...?

Aunque el enfoque gráfico es el más usado, los métodos algebraicos de eliminación y sustitución permiten lo siguiente:

- Reducir el sistema para analizar qué restricciones aparecen sobre una variable.
- Hallar los puntos de intersección de las rectas que representan las restricciones, los cuales corresponden a los vértices de la región factible.

Método de resolución y su representación gráfica

Situación: El terreno

Se va a sembrar paltos (x) y duraznos (y) en un terreno de 40 m². Cada planta requiere 4 m² y 2 m² de terreno, respectivamente, y se desea sembrar como máximo 15 plantas en total. ¿Cuál es la cantidad de plantas de cada tipo que se pueden sembrar en el terreno?

De la información, consideramos las siguientes restricciones:

- Área total: $4x + 2y \leq 40$
- N.º de plantas: $x + y \leq 15$
- $x \geq 0, y \geq 0$

Buscamos las combinaciones $(x; y)$ que cumplan lo señalado.

Paltos (x)	Duraznos (y)	Área usada ($4x + 2y$)	Total de plantas ($x + y$)	¿Cumple?
0	15	30	15	Sí
5	5	30	10	Sí
6	6	36	12	Sí
7	7	42	14	No

Las combinaciones válidas forman parte de la región factible del sistema.

El análisis previo nos muestra el **método gráfico** para resolver un sistema de inecuaciones, que consiste en identificar la intersección de las regiones del plano que satisfacen cada inecuación.

Pasos del método gráfico:

- Expresa cada inecuación en la forma $ax + by \leq c$, $ax + by \geq c$, etc.
- Traza la recta asociada reemplazando el signo de desigualdad por "=".
- Dibuja la recta con línea discontinua si la desigualdad usa los signos < o >.
- Dibuja la recta con línea continua si los signos son ≤ o ≥.
- Determina el semiplano solución de cada inecuación (probando con un punto de referencia, como el origen).
- Identifica la región común a todas las inecuaciones: esa es la solución del sistema.

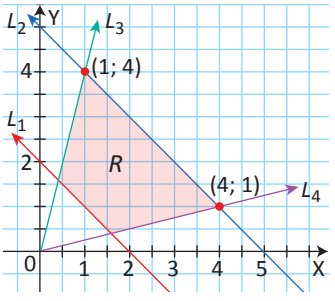
Ten en cuenta

Muchos sistemas de inecuaciones modelan situaciones reales: aforo máximo, presupuesto mínimo, área disponible, tiempo límite, etc.

Representarlas gráficamente permite comparar restricciones y tomar mejores decisiones.

Situación: El sistema de inecuaciones

A partir de la gráfica, determina el sistema de inecuaciones lineales que describa la región R.



En la gráfica, vemos las rectas que delimitan la región R.

Tomando en cuenta la posición de la región R, observemos el sistema que la describe.

$$\begin{cases} L_1: x + y \geq 2 \\ L_2: x + y \leq 5 \\ L_3: y \leq 4x \\ L_4: y \geq \frac{x}{4} \end{cases}$$

Por lo tanto, cada punto que pertenece a R satisfacen las inecuaciones del sistema que contienen los signos ≤ o ≥.

Método de optimización: la región factible

Situación: El agua por hectárea

Una comunidad tiene 1500 m³ de agua por semana para dos cultivos:

- Tradicionales: 300 m³/ha
- Tecnificados: 150 m³/ha

¿Cuál es la cantidad de hectáreas para cada tipo de cultivo que se puede regar sin superar el agua disponible?

Planteamos restricción de agua: $300x + 150y \leq 1500$, donde

- x: la cantidad de hectáreas de cultivo tradicional
- y: la cantidad de hectáreas de cultivo tecnificado

La tabla muestra la cantidad de hectáreas que respetan el límite hídrico.

x	y	Agua total usada (m³)	¿Cumple con el límite?	Total de hectáreas
0	10	300(0) + 150(10) = 1500	Sí	10
2	6	300(2) + 150(6) = 1500	Sí	8
3	5	300(3) + 150(5) = 1650	No	8
4	4	300(4) + 150(4) = 1800	No	8

Por tanto, se puede abastecer dos hectáreas tradicionales y seis tecnificadas, o cualquier otra combinación que cumpla $2x + y \leq 10$ en el primer cuadrante.

De acuerdo con lo analizado, se tiene lo siguiente:

Función objetivo: $f(x; y) = ax + by$ es una expresión matemática que representa aquello que se desea maximizar o minimizar (ganancia, costo, y otros).

Restricciones: Condiciones dadas por inecuaciones (recursos, tiempo).

Región factible: Conjunto de puntos que cumplen todas las restricciones. Puede ser acotada (forma cerrada) o no acotada (abierta).

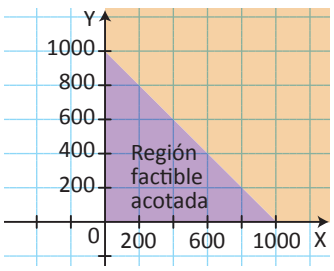
Solución óptima: Se halla en un vértice de la región factible (si está acotada).

Situación: Abastecedor de agua

Un camión reparte como máximo 1000 L de agua en dos pueblos x, y.

Las restricciones son $x + y \leq 1000$; $x \geq 0$; $y \geq 0$.

Además, se afirma: "Solo los puntos con coordenadas enteras representan soluciones válidas". ¿Es cierta esta afirmación?



La región factible representa todas las combinaciones $(x; y)$ que cumplen lo siguiente:

$x + y \leq 1000$ (total de agua disponible)

$x \geq 0$; $y \geq 0$ (no se aceptan cantidades negativas)

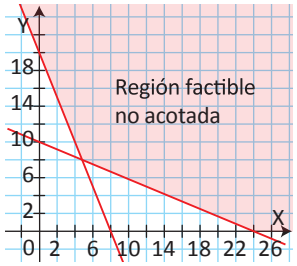
Como se trata de litros, se consideran valores decimales. Por tanto, la solución no está limitada a puntos enteros, sino que abarca infinitos puntos reales.

Por ejemplo, (259,5; 740,5) ⇒ 259,5 L + 740,5 L = 1000 L.

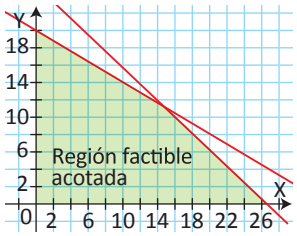
Recuerda

Tipos de regiones factibles

Región no acotada. Se extiende indefinidamente. No tiene un límite definido.



Región acotada. Está completamente cerrada por las restricciones. Es limitada.

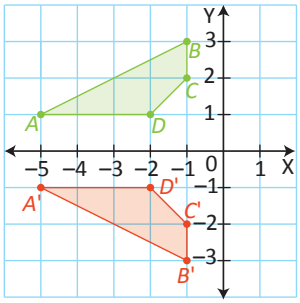


Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas de restricciones (ejemplo: producción de muebles) y represéntalos en un sistema de inecuaciones para maximizar o minimizar el recurso.
- Representa las rectas de las inecuaciones y la región factible, y explica el significado de la zona de intersección y de sus vértices.
- Halla la región factible y de los vértices para determinar el punto óptimo según el contexto.
- Sustenta, con ejemplos, la validez de la solución encontrada.

Recuerda

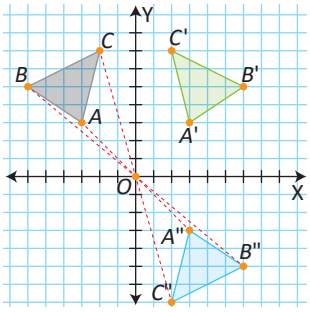
La simetría axial respecto al eje X



Punto original $(x; y)$	Punto reflejado $(x'; y')$
$A(-5; 1)$	$A'(-5; -1)$
$B(-1; 3)$	$B'(-1; -3)$
$C(-1; 2)$	$C'(-1; -2)$
$D(-2; 1)$	$D'(-2; -1)$

Ten en cuenta

¿Es simetría axial o central?



Practica valores

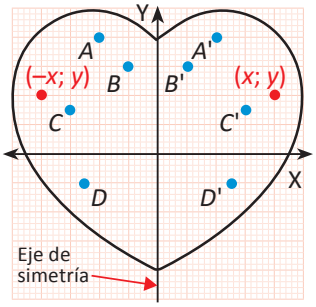
- Muestra disposición para reconocer resultados distintos y buscar puntos comunes priorizando convivencia justa.
- Dialoga basándote en información referida al cuidado del ambiente.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS ISOMÉTRICAS

Simetría axial y central

Situación: El corazón doblado

En una hoja cuadriculada se dibuja un corazón con una línea de doblez vertical (eje Y). ¿Cómo puedes comprobar que las mitades son simétricas?



En la figura, cada punto tiene un reflejo simétrico al otro lado del doblez: la coordenada *y* permanece igual, mientras que la coordenada *x* cambia de signo. Esto significa que ambos puntos están a la misma distancia del eje de simetría.

El análisis anterior nos lleva a definir las **transformaciones isométricas** como transformaciones que conservan la forma y el tamaño (ángulos y longitudes) de las figuras, tales como las siguientes:

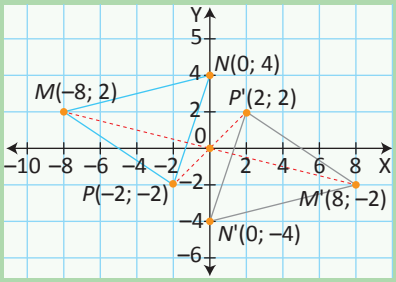
a. Simetría axial. Refleja una figura respecto de un eje.

- En Y, se cumple que $(x; y) \rightarrow (-x; y)$.
- En X, se cumple que $(x; y) \rightarrow (x; -y)$.

En ambos casos, la figura conserva su forma y tamaño, pero se invierte su orientación con respecto al eje de simetría. Observa la caja **Recuerda**.

b. Simetría central. Refleja los puntos respecto de un centro fijo.

Si el centro es el origen (0; 0), se cumple que $(x; y) \rightarrow (-x; -y)$. Cada punto queda a igual distancia del centro, pero en direcciones opuestas.



Punto original $(x; y)$	Punto reflejado $(x'; y')$
$M(-8; 2)$	$M'(8; -2)$
$N(0; 4)$	$N'(0; -4)$
$P(-2; -2)$	$P'(2; 2)$

Situación: Análisis de transformaciones compuestas

En la gráfica de la caja **Ten en cuenta**, se afirma lo siguiente:

- "El triángulo $A''B''C''$ se obtiene aplicando solamente una simetría axial respecto a un eje".
- "La simetría central es siempre el resultado de dos simetrías axiales".

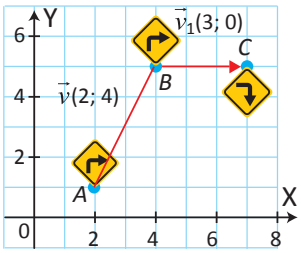
¿Cuál o cuáles de las afirmaciones son correctas? Justifica tu respuesta.

De las afirmaciones, la primera es falsa, porque el triángulo no se forma con una sola simetría, sino con dos reflejos en ejes perpendiculares, lo que equivale a una simetría central en *O*. Del mismo modo, la segunda también es falsa, porque una simetría central solo puede obtenerse de dos reflejos si los ejes son perpendiculares y se cruzan en el centro; en realidad, se define como una rotación de 180° alrededor de un punto fijo.

Traslaciones y rotaciones

Situación: La señal de tránsito

Una señal de tránsito ubicada inicialmente en *A* es trasladada a *B* mediante el vector $\vec{v}(2; 4)$. Luego, se traslada a *C* y se rota 90° en sentido horario.



¿Cómo cambia su ubicación y orientación?

Sabemos que la señal experimenta dos transformaciones:

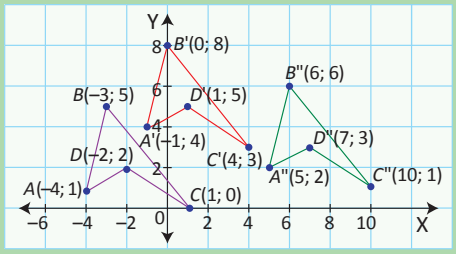
a. Traslación: Se mueve dos unidades hacia la derecha y cuatro unidades hacia arriba. Luego, se desplaza tres unidades hacia la derecha. En ambos casos, la figura conserva su forma y tamaño, solo cambia de lugar.

b. Rotación: Gira 90° en sentido horario con centro en *C*. Cambia la orientación de la figura sin alterar su forma ni tamaño.

En resumen, la traslación cambia la posición y la rotación cambia la orientación, pero ambas conservan la forma y el tamaño de la figura.

A partir de lo trabajado, presentamos los siguientes movimientos:

a. Traslación. Movimiento que desplaza todos los puntos de una figura en una misma dirección y distancia sin girarla ni deformarla mediante un vector de traslación, que se denota por $\vec{v}(a; b)$.



Si un punto $(x; y)$ se traslada en la dirección de vector $\vec{v}(a; b)$, su nueva posición será $(x + a; y + b)$.

Ejemplo: En la gráfica y tabla se muestra la traslación del cuadrilátero *ABCD*, en la dirección de los vectores $\vec{v}(3; 3)$ y $\vec{v}_1(6; -2)$.

Vértice inicial $(x; y)$	Primer vector de desplazamiento $(\vec{v})$	Vértice desplazado	Segundo vector de desplazamiento $(\vec{v}_1)$	Vértice desplazado
$A(-4; 1)$	$(3; 3)$	$A'(-1; 4)$	$(6; -2)$	$A"(5; 2)$
$B(-3; 5)$	$(3; 3)$	$B'(0; 8)$	$(6; -2)$	$B"(6; 6)$
$C(1; 0)$	$(3; 3)$	$C'(4; 3)$	$(6; -2)$	$C"(10; 1)$
$D(-2; 2)$	$(3; 3)$	$D'(1; 5)$	$(6; -2)$	$D"(7; 3)$

b. Rotación. Movimiento en el cual la figura gira alrededor de un punto fijo (centro de rotación) en sentido horario o antihorario. Como conserva las distancias y los ángulos, mantiene su forma y tamaño, aunque cambia su orientación.

Cuando el centro de rotación es el origen (0; 0), las coordenadas de un punto $(x; y)$ cambian según el ángulo de giro.

Ángulo	Sentido	Transformación
90°	Antihorario	$(x; y) \rightarrow (-y; x)$
90°	Horario	$(x; y) \rightarrow (y; -x)$
180°	Ambos sentidos	$(x; y) \rightarrow (-x; -y)$

Ten en cuenta

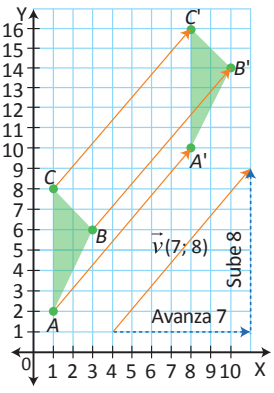
Una isometría es un movimiento de una figura en el plano que conserva su forma y su tamaño. Al aplicar una isometría, la figura no se deforma, solo cambia de lugar u orientación. Ejemplos de isometría: traslación, rotación y reflexión.

TIC

Recuerda

En una traslación, la longitud de los lados, los ángulos y la orientación de la figura no varían.

Ejemplo:



El vector (7; 8) indica que el triángulo *ABC* se movió siete unidades a la derecha y ocho unidades hacia arriba.

¿Sabías que...?

Si el ángulo de rotación es negativo, el giro es hacia la derecha, en sentido de las agujas del reloj (horario).



Negativo

Si el ángulo de rotación es positivo, el giro es hacia la izquierda, en sentido contrario a las agujas del reloj (antihorario).



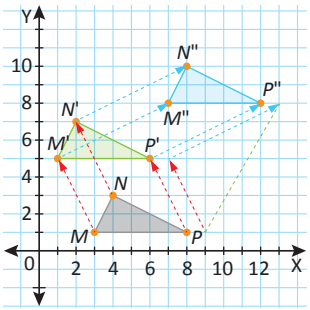
Positivo

Recuerda

Composición de traslaciones

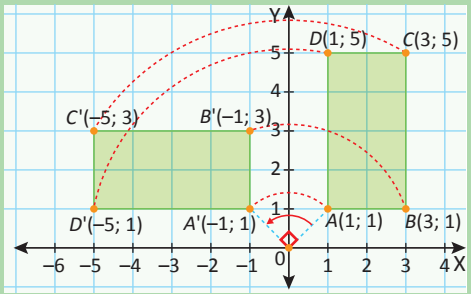
Cuando se aplican dos traslaciones sucesivas a un punto, se suman los vectores uno a uno.

Si aplicamos primero el vector $\vec{v}_1(-2; 4)$ y luego $\vec{v}_2(6; 3)$, el desplazamiento total es el siguiente: $\vec{v}_{total}(4; 7)$.



Para entender mejor la rotación, observemos cómo cambian las coordenadas cuando el centro es el origen (0; 0) girando 90° en sentido antihorario, como se muestra en la gráfica.

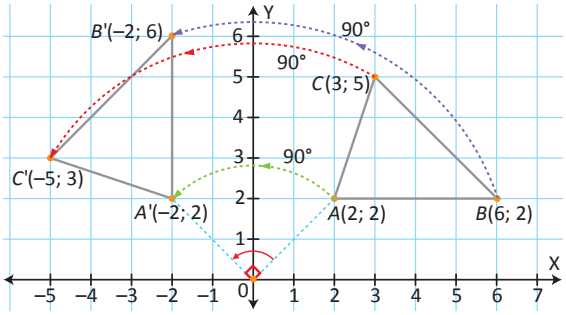
Punto original (x; y)	Punto rotado 90 ° (x'; y')
$A(1; 1)$	$A'(-1; 1)$
$B(3; 1)$	$B'(-1; 3)$
$C(3; 5)$	$C'(-5; 3)$
$D(1; 5)$	$D'(-5; 1)$
(0; 0)	Centro de giro



Situación: Mismo giro, diferente dirección

Juliana rota un triángulo 90° con respecto al origen en sentido antihorario. Su compañero afirma: "No todos los puntos hacen el mismo recorrido". Juliana responde: "Sí, todos giran en el mismo sentido". ¿Quién tiene la razón? Sustenta tu respuesta con ejemplos.

Graficamos según la situación.



Como muestra la imagen, en una rotación de 90° respecto del origen, todos los puntos...

- giran en el mismo sentido (antihorario).
- recorren un ángulo de 90° exactos, sin importar su posición.
- siguen trayectorias curvas: los puntos más alejados describen arcos más largos, pero no cambia la dirección de giro.

Tabla de análisis: Giro de 90° y dirección de rotación

Aspectos	Descripción
Tipo de transformación	Rotación de 90° en sentido antihorario respecto del origen
Trayectoria de los puntos	Todos describen un arco circular en el mismo sentido.
Diferencia en recorrido	Depende de la distancia al centro: puntos más lejanos recorren trayectos mayores.
Ángulo de giro	Todos giran 90° sin importar su posición.

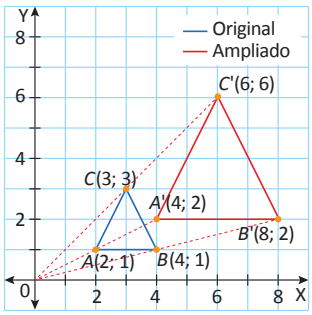
Por lo tanto, su compañero tiene razón. Todos los puntos giran con el mismo ángulo y en el mismo sentido, pero el recorrido varía. Juliana confundió recorrido con dirección de giro, un error común al interpretar rotaciones.

TRANSFORMACIONES GEOMÉTRICAS

Homotecia directa

Situación: Ampliando sin deformar

Julia quiere ampliar una figura sin cambiar su forma. Para ello, toma el origen de un plano cartesiano (0; 0) como centro de homotecia y usa un factor de escala $k = 2$. ¿Cómo será la nueva figura respecto de la original?, ¿cómo se representa en el plano cartesiano?



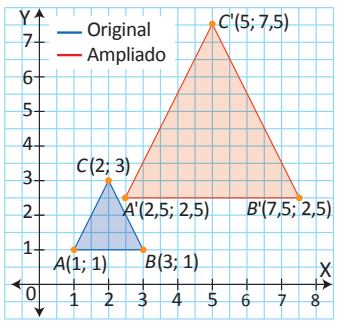
En la imagen, el triángulo *ABC* es el original y el *A'B'C'* su ampliación desde el origen. Conserva su forma y orientación, pero cambia de tamaño. Los vértices están alineados con el origen y sus coordenadas se duplican. Por ejemplo, el punto *A*(2; 1) se convierte en *A'*(4; 2).

De acuerdo con lo analizado, la **homotecia directa** es una transformación que amplía o reduce una figura desde un centro fijo (*O*) manteniendo su forma y orientación, pero cambiando el tamaño. Se define mediante dos elementos clave:

- Centro de homotecia (*O*): Punto desde el cual se aplica la transformación.
- La razón de homotecia es el número *k* que indica cuánto se amplía o reduce una figura al aplicar una homotecia respecto a un punto fijo llamado centro.
  - Si $k > 1$, la figura se agranda.
  - Si $0 < k < 1$, la figura se reduce.
  - Si $k = 1$, la figura no cambia.

Situación: Un crecimiento sin referencia

Valeria amplió una figura multiplicando sus coordenadas por $k = 2{,}5$. Al compararla con la figura original, nota que no están alineadas. ¿Qué error cometió y por qué su figura está mal posicionada? Justifica tu respuesta.



Valeria aplicó una homotecia con razón $k = 2{,}5$, pero usó mal el centro: multiplicó como si el origen fuera el centro cuando no lo era.

Por eso, el triángulo *A'B'C'* quedó mal alineado, aunque mantuvo su forma y orientación. No coincidió con la posición del diseño original (triángulo *ABC*).

Recuerda

Multiplicar las coordenadas solo funciona cuando el centro de homotecia está en el origen de coordenadas. Si el centro se ubica en otro punto, la figura puede cambiar de posición y perder la relación original con la figura base.

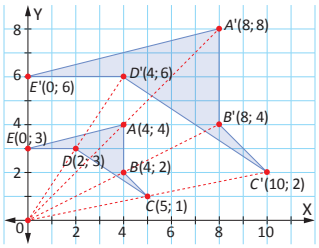
El centro de homotecia es el punto desde donde "crecen" o "se encogen" todos los vértices.

Un error común es creer que toda ampliación proporcional es una homotecia, aunque solo lo es si se realiza desde un centro fijo.

Ten en cuenta

Homotecia directa de razón $k = 2$

Por ejemplo, la gráfica y la tabla señalan que las coordenadas de los puntos se duplican.

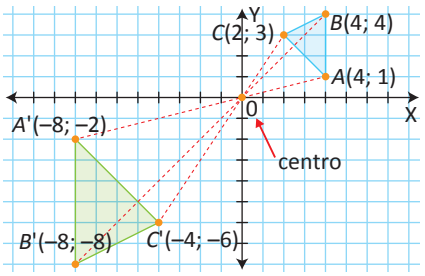


Punto original	Razón $k = 2$	Punto imagen
E(0; 3)	2 × (0; 3)	*E'*(0; 6)
D(2; 3)	2 × (2; 3)	*D'*(4; 6)
C(5; 1)	2 × (5; 1)	*C'*(10; 2)
B(4; 2)	2 × (4; 2)	*B'*(8; 4)
A(4; 4)	2 × (4; 4)	*A'*(8; 8)

Homotecia inversa

Situación: Crecer hacia el otro lado

Claudia aplica un factor $k = -2$ con centro en el origen. El triángulo resultante es más grande, está en el lado opuesto del plano (ver gráfica) y mantiene forma y proporciones. ¿Qué tipo de transformación aplicó? ¿Por qué cambió de posición si conserva la forma?

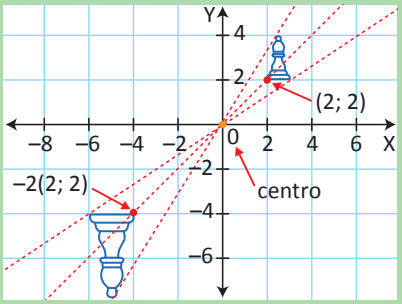


Claudia multiplicó cada coordenada por –2, y obtuvo lo siguiente:

$A(4; 1) \rightarrow A'(-8; -2)$, $B(4; 4) \rightarrow B'(-8; -8)$, $C(2; 3) \rightarrow C'(-4; -6)$

Por tanto, la figura conserva su forma y sus proporciones. Se refleja y amplía en el lado opuesto con respecto al centro de homotecia; como $k < 0$, se trata de una homotecia inversa, que invierte la orientación.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que la **homotecia inversa** es una transformación que conserva la forma y las proporciones de la figura, pero invierte su orientación respecto a un punto fijo llamado centro de homotecia (O).



- Razón de homotecia: $k < 0$, la magnitud $|k|$ indica el grado de ampliación o reducción y el signo negativo invierte la orientación.
- Si $O(0; 0)$, un punto $(x; y)$ se transforma en $(x'; y') = (k \cdot x; k \cdot y)$.

En la gráfica, el alfil original se transforma mediante una homotecia inversa.

Situación: Ampliar e invertir

Una figura se transforma con una homotecia directa con razón $k = 2$ y otra inversa con razón $k = -\frac{1}{2}$, ambas con centro en el origen. Carlos dice: "La figura queda igual". María responde: "Queda invertida y del mismo tamaño que la original". ¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.

En la caja **Recuerda**, observa la primera transformación ($k = 2$):

- El cuadrado $ABCD$ se amplía manteniendo su forma y orientación.
- Las coordenadas se duplican: $(x; y) \rightarrow (2x; 2y)$.

Segunda transformación $k = -\frac{1}{2}$:

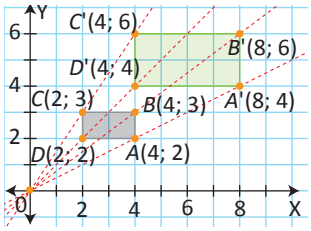
- El cuadrado $ABCD$ se reduce y se invierte respecto del origen.
- Coordenadas finales: $(2x; 2y) \rightarrow (-x; -y)$.

Por tanto, la figura final tiene el mismo tamaño que la original, pero está invertida. María tiene razón: hay inversión, no cancelación de transformaciones.

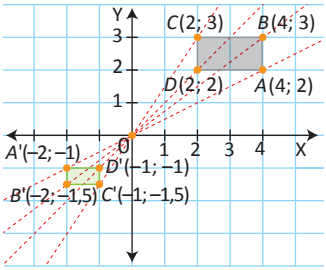
Recuerda

Homotecia directa con $k = 2$ y $k = -\frac{1}{2}$

Homotecia directa ($k = 2$)



Homotecia inversa $\left(k = -\frac{1}{2}\right)$



Combinaciones de isometrías y homotecias

Situación: Ubicación de jardines

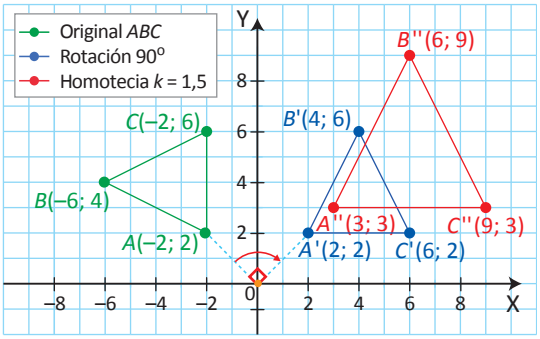
En un parque se instalarán tres jardines, cuyas formas cumplen lo siguiente:

- La primera tiene forma triangular.
- La segunda es una copia idéntica de la primera, girada –90°, en sentido horario respecto a (0; 0).
- La tercera es una ampliación de la segunda con un factor k = 1,5 y centro en el origen (0; 0).

¿Cuál es la posición del segundo y tercer triángulo si el primer jardín triangular ABC tiene vértices en $A(-2; 2)$, $B(-6; 4)$ y $C(-2; 6)$?

Del gráfico, tenemos lo siguiente:

- El triángulo $A'B'C'$ es una copia rotada de ABC. Se conservan distancias y ángulos; por lo tanto, es una isometría.
- El triángulo $A''B''C''$ es una ampliación de la anterior. Mantiene la forma, pero cambia el tamaño multiplicando todas las distancias por k = 1,5.



La resolución de la situación anterior evidencia lo siguiente:

- Isometría (rotación antihoraria 90° con centro en el origen): $(x; y) \rightarrow (-y; x)$
- Homotecia de centro $O(0; 0)$ y factor k $(x; y) \rightarrow (kx; ky)$

Si combinamos ambas transformaciones, el orden de aplicación se representa así:

- De rotación a homotecia: $(x; y) \rightarrow (-y; x) \rightarrow (-ky; kx)$.
- De homotecia a rotación: $(x; y) \rightarrow (kx; ky) \rightarrow (-ky; kx)$

Si el centro de ambas transformaciones es el origen, el resultado final coincide en forma y posición; si el centro de homotecia es distinto, el orden cambia el resultado.

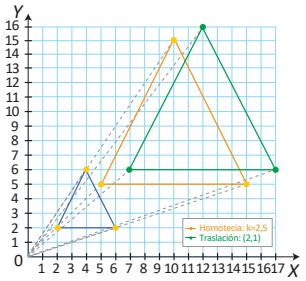
Situación: Homotecia y traslación

José afirma: "Si aplicamos una homotecia con centro en el origen y luego una traslación, obtendremos el mismo resultado que si realizamos primero la traslación y luego la homotecia". ¿Es correcto? Justifica tu respuesta.

En el gráfico de la caja **Ten en cuenta**, se muestra que la afirmación es falsa. La homotecia agranda o reduce respecto a su centro (aquí, el origen). Si trasladamos, cambia ese referente y el desplazamiento también se agranda o achica según el factor de homotecia. Por eso, los triángulos (naranja y verde) quedan en lugares distintos. Por lo tanto, el orden de homotecia y traslación sí cambia el resultado.

Ten en cuenta

El orden de homotecia y traslación sí altera el resultado.



Evalúa tus progresos

- Representa transformaciones geométricas (isometrías y homotecias) de una situación que permiten pasar de una figura original a una figura transformada.
- Expresa las transformaciones (isometrías y homotecias) y sus propiedades.
- Emplea procedimientos para hallar las coordenadas de una figura final luego de una traslación, simetría, rotación o una homotecia con centro en el origen de una figura inicial.
- Justifica, con ejemplos, las propiedades que se conservan o modifican en cada tipo de transformación (isométrica o no isométrica).

Recuerda

Tipos de muestreo

Aleatorio simple: Todos los elementos tienen la misma probabilidad de ser elegidos. Se seleccionan al azar.

Sistemático: Se elige un punto de inicio y luego cada enésimo elemento. Puede tener sesgo si hay periodicidad.

Estratificado: Se divide la población en grupos homogéneos (estratos) y se toma una muestra proporcional de cada uno.

Por conglomerados: Se agrupan los elementos por ubicación o características, y se eligen algunos grupos completos al azar.

Ten en cuenta

La **tabla de frecuencias para datos no agrupados** se usa principalmente con datos cuantitativos discretos, aunque también puede aplicarse a continuos cuando hay pocas observaciones.

x_i	f_i	h_i	h_i %
0	3	0,10	10
1	7	0,24	24
2	9	0,30	30
3	11	0,36	36
Total	30	1,00	100

Practica valores

- Evita interrumpir a quien explica, espera tu turno y formula preguntas con respeto.
- Reflexiona cómo se vería una solución respecto a un problema ambiental dentro de diez años.

ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE DATOS

Tablas de frecuencias para datos agrupados y no agrupados

Situación: Diámetro de los pernos

Los datos corresponden al diámetro (en milímetros) de 60 pernos producidos por una máquina.

9,3; 9,6; 10,1; 9,0; 8,9; 10,3; 9,4; 9,8; 9,1; 10,0; 9,2; 10,2; 9,7; 9,5; 10,4; 9,6; 9,3; 9,0; 9,1; 9,8; 9,2; 9,6; 10,1; 9,3; 9,7; 8,8; 9,9; 10,2; 9,5; 9,2; 10,0; 9,6; 9,8; 9,1; 10,3; 9,2; 9,3; 10,1; 9,4; 9,0; 9,7; 9,9; 9,1; 8,9; 10,4; 9,2; 9,5; 9,8; 9,6; 9,3; 9,0; 9,4; 10,0; 9,7; 9,2; 10,3; 9,1; 9,5; 10,1; 9,4

Elabora una tabla de frecuencias para 60 datos agrupados.

Para elaborar una tabla de frecuencias, seguimos estos pasos:

1. Identificamos el valor mínimo (8,8) y el máximo (10,4) del conjunto de datos.
2. Calculamos el rango (recorrido): $R = 10,4 - 8,8 = 1,6$.
3. Número de intervalos: $k = \sqrt{60} \approx 7,75 \approx 8$
4. Amplitud: $A = \frac{R}{k} = \frac{1,6}{8} = 0,2$
5. Construimos los intervalos y contamos las frecuencias.

Intervalo	Marca de clase	f_i	F_i	h_i (%)
[8,8; 9,0[	8,9	3	3	5,0
[9,0; 9,2[	9,1	9	12	15,0
[9,2; 9,4[	9,3	11	23	18,3
[9,4; 9,6[	9,5	8	31	13,3
[9,6; 9,8[	9,7	9	40	15,0
[9,8; 10,0[	9,9	6	46	10,0
[10,0; 10,2[	10,1	7	53	11,7
[10,2; 10,4]	10,3	7	60	11,7

Como observamos, agrupar los datos en intervalos y construir una tabla permite ver de forma clara en qué rangos se concentran los diámetros.

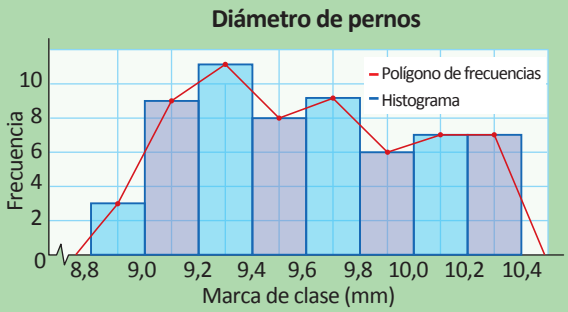
De acuerdo con lo analizado, las **tablas de frecuencias para datos agrupados en intervalos** se utilizan para las variables cuantitativas continuas (y para discretas con muchos valores distintos). Organizan datos numéricos en intervalos para resumir información cuando hay muchos valores diferentes. Su construcción incluye lo siguiente:

- **Número de datos (*n*).** Es la cantidad total de observaciones o valores que conforman un conjunto de datos.
- **Rango o recorrido (*R*).** Es el campo de variación de la variable y se obtiene restando el mayor valor (V) con el menor de los datos: $R = V_{máx} - V_{mín}$.
- **N.º de intervalos (*k*).** Se calcula su valor extrayendo la raíz cuadrada del total de datos y aproximando el valor al entero más cercano: $k \approx \sqrt{n}$.
- **Amplitud (*A*) de cada intervalo.** Es el cociente entre el recorrido y el número de intervalos: $A = \frac{R}{k}$.

Gráficos estadísticos: histograma y polígono de frecuencias para datos agrupados

El **histograma** agrupa datos en intervalos con barras contiguas cuya altura indica la frecuencia. Permite analizar distribución, modas y sesgos. **El polígono de frecuencias**, trazado sobre marcas de clase, muestra la tendencia de la distribución.

Juntos facilitan visualizar la distribución y la evolución de los datos con claridad. Por ejemplo, en la situación del diámetro de los pernos, se muestran su histograma y su polígono de frecuencias.



Situación: Análisis de frecuencias

Un estudiante presenta esta tabla con datos de producción semanal de palta en 80 parcelas. Su profesor le indica que hay, al menos, dos errores. Identifica los errores, justifica tu respuesta y explica cómo corregirlos en cada caso.

Intervalo (kg)	f_i	F_i	h_i
[400; 420[	5	5	0,063
[420; 440[	25	30	0,313
[440; 460[	30	60	0,375
[460; 480[	12	72	0,150
[480; 420]	8	78	0,099

Observamos que hay inconsistencias en los valores del último intervalo (es 500), frecuencia acumulada (F_i) y frecuencia relativa (h_i). Vamos a verificar y corregir estos datos.

1. La **frecuencia acumulada** se obtiene sumando progresivamente las frecuencias absolutas.

   $F_1 = 5$

   $F_2 = 5 + 25 = 30$

   $F_3 = 30 + 30 = 60$

   $F_4 = 60 + 12 = 72$

   $F_5 = 72 + 8 = 80$

   El estudiante cometió un error en el último valor, pues consignó 78 en lugar de 80.

2. La **frecuencia relativa** se obtiene dividiendo cada frecuencia absoluta entre el total de datos (80).

   $h_1 = \frac{5}{80} = 0{,}0625$

   $h_2 = \frac{25}{80} = 0{,}3125$

   $h_3 = \frac{30}{80} = 0{,}375$

   $h_4 = \frac{12}{80} = 0{,}15$

   $h_5 = \frac{8}{80} = 0{,}10$

   El valor consignado en la última fila fue 0,099, pero el correcto es 0,10.

Notamos que, aunque la tabla presentada por el estudiante parecía estar completa, contenía errores en algunos valores de la frecuencia acumulada y la frecuencia relativa. Estos errores, aunque pequeños, pueden alterar las conclusiones sobre la distribución de los datos.

Recuerda

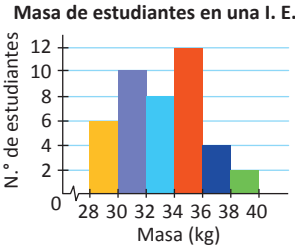
Las **escalas de medición** permiten clasificar, ordenar o cuantificar las variables según su naturaleza:

- **Nominal:** categorías sin orden (ej.: estado civil).
- **Ordinal:** categorías con orden (ej.: nivel educativo).
- **Discreta:** valores enteros (ej.: número de hijos).
- **Continua:** cualquier valor en un rango (ej.: temperatura).

Ten en cuenta

Gráficos estadísticos para variables cuantitativas

Histograma. Representa datos cuantitativos continuos agrupados en intervalos, con barras adyacentes que muestran la frecuencia dentro de cada rango definido.



Polígono de frecuencias. Une los puntos medios superiores de las barras del histograma para mostrar tendencias y comparar distribuciones de frecuencia numérica.



Ten en cuenta

La **media aritmética** de datos agrupados se calcula con la fórmula siguiente:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k}(x_i \cdot f_i)}{n}$$

donde

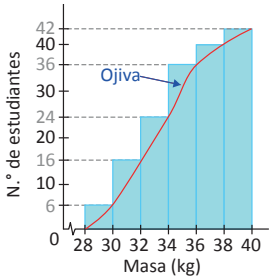
- $\bar{x}$: media aritmética
- x_i: marca de clase
- f_i: frecuencia absoluta
- n: número total de datos
- k: número de clases

Ten en cuenta

Gráficos estadísticos para variables cuantitativas

Ojiva o curva de frecuencias acumuladas. Muestra la frecuencia acumulada de los datos, indicando cuántos valores son menores o iguales a un valor determinado.

Frecuencia acumulada de la masa en estudiantes en una I. E.



Recuerda

La **media aritmética** es el promedio de los datos. Se obtiene sumando todos los valores y dividiendo entre la cantidad total.

La **mediana** es el valor que ocupa el centro cuando los datos están ordenados; deja el 50 % por debajo y el 50 % por encima.

La **moda** es el valor más frecuente de una muestra.

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Medidas de tendencia central: media aritmética, mediana y moda para datos agrupados

Situación: Atención médica

La tabla registra casos de enfermedades respiratorias, según grupo etario. Un doctor pregunta lo siguiente: "¿Podemos resumir esta información en un solo valor que oriente la priorización en la atención?".

Edad (años)	N.° de casos
[0; 5[	4
[5; 10[	12
[10; 15[	20
[15; 20[	16
[20; 25[	10
[25; 30]	6

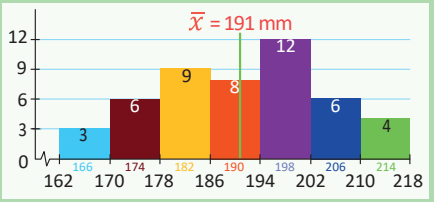
De la información, el número de casos (frecuencia absoluta) es 4 + 12 + 20 + 16 + 10 + 6 = 68.

- El grupo [10; 15[concentra 20 casos, equivalente al 29,4 % del total.
- El grupo [15; 20[contiene 16 casos (23,5 %).
- Si se agrupan los intervalos de 5 a menos de 20 años [5; 20[, se tienen 12 + 20 + 16 = 48 casos, es decir, el 70,6 % del total.

En resumen, aunque el grupo [10; 15[concentra la mayor frecuencia individual, la mayoría de los casos (más del 70 %) se encuentra entre los 5 y menos de 20 años. Esto sugiere focalizar la atención en este grupo.

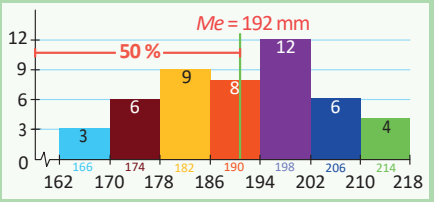
A partir de lo trabajado, podemos afirmar que las **medidas de tendencia central** son valores que representan el centro de un conjunto de datos, como la media, la mediana y la moda.

Media aritmética ($\bar{x}$). Estima el promedio. En tablas de frecuencias, se calcula con las marcas de clase y frecuencias.



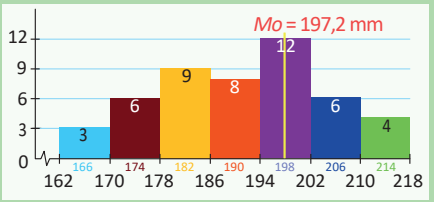
Mediana (*Me*). Se obtiene interpolando en la clase que contiene el 50 % acumulado en la tabla.

Por ejemplo, si *Me* = 192 mm, significa que el 50 % de la muestra tiene una medida inferior a 192 mm, y el otro 50 % tiene una medida superior a 192 mm.



Moda (*Mo*). En datos agrupados, se ubica en el intervalo con mayor frecuencia y puede estimarse con interpolación.

Por ejemplo, si el intervalo modal es [194; 202[y *Mo* = 197,2 mm, se interpreta que la medida más frecuente en la muestra es aproximadamente 197,2 mm.



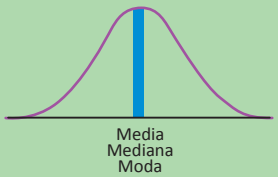
Medidas de tendencia central: análisis de sesgo en las medidas

El sesgo en las medidas de tendencia central indica cuánto se aleja una distribución respecto de la simetría perfecta. Afecta principalmente a la media, mediana y moda.

a. Distribución simétrica (sin sesgo)

Ocurre si media ≈ mediana ≈ moda.

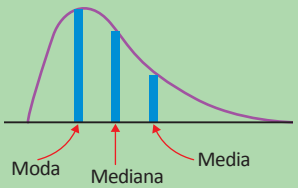
Por ejemplo, la altura promedio de adultos en una población donde la mayoría mide entre 165 cm y 175 cm. Las tres medidas están centradas.



b. Distribución con sesgo positivo (asimetría a la derecha)

Ocurre si moda < mediana < media.

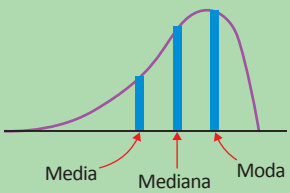
Por ejemplo, los sueldos que gana la mayoría está entre 2000 y 3000 soles, pero unos pocos ganan más de 10 000 soles. La media se eleva por esos valores extremos altos.



c. Distribución con sesgo negativo (asimetría a la izquierda)

Ocurre si media < mediana < moda.

Por ejemplo, la edad de jubilación en una empresa donde la mayoría se retira entre 60 y 65 años, pero hay algunos casos de retiro anticipado a los 45 o 50 años. La media baja por los valores atípicamente pequeños.



Recuerda

Para estimar la **mediana** a partir de una tabla de frecuencias agrupadas, se emplea lo siguiente:

$$Me = L_i + \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right) \cdot c$$

donde

- L_i: límite inferior del intervalo mediano
- n: número total de datos
- F_{i-1}: frecuencia acumulada anterior al intervalo mediano
- f_i: frecuencia absoluta del intervalo mediano
- c: amplitud del intervalo

Situación: Medida más representativa

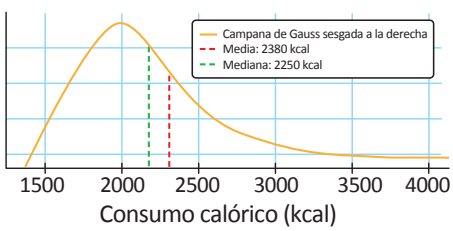
En una exposición grupal sobre el consumo calórico, se presentan dos posturas:

- Grupo A: La media es más representativa porque considera todos los datos de la muestra.
- Grupo B: La mediana representa mejor el comportamiento de los datos.

¿Con cuál postura estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.

Medimos el consumo calórico diario (en kcal) de 10 adolescentes: 1800; 1900; 2000; 2100; 2200; 2300; 2400; 2500; 2600; 4000. Los resultados son:

- Media: 2380 kcal
- Mediana: 2250 kcal
- Moda: distribución amodal



El valor extremo (4000 kcal) genera un sesgo (asimetría a la derecha) elevando el valor de la media. En este caso, se cumple lo siguiente:

Moda < mediana < media

La mediana, al no verse afectada por valores atípicos, representa mejor el centro; por ello, la postura del grupo B resulta más adecuada desde un enfoque estadístico y contextual.

Ten en cuenta

Para obtener la **moda** a partir de una tabla de frecuencias agrupadas, se emplea lo siguiente:

$$Mo = L_i + \left(\frac{d_1}{d_1 + d_2} \right) \cdot c$$

donde

- L_i: límite inferior del intervalo moral
- $d_1 = f_i - f_{i-1}$: diferencia entre la frecuencia modal y la anterior
- $d_2 = f_i - f_{i+1}$: diferencia entre la frecuencia modal y la siguiente
- c: amplitud del intervalo

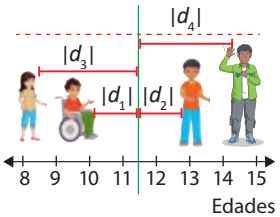
¿Sabías que...?

La **desviación estándar** se usa en estudios estadísticos para comparar la regularidad de resultados. Por ejemplo, si quieres determinar qué establo tiene vacas más uniformes, esta medida es más útil que considerar únicamente el promedio.

Recuerda

La **desviación media** permite saber qué tan alejados, en promedio, están los datos de su media.

Si las distancias son pequeñas, los datos están más agrupados; si son grandes, los datos están más dispersos o variados.



La desviación media para datos agrupados se calcula así:

$$DM = \frac{\sum_{i=1}^{k} |x_i - \bar{x}| \cdot f_i}{n}$$

donde

- x_i: marca de clase
- f_i: frecuencia absoluta
- $\bar{x}$: media aritmética
- n: total de datos
- k: número de clases

Medidas de dispersión: rango, desviación media y estándar, coeficiente de variación

Situación: Producción de tornillos

Una fábrica emplea dos máquinas para producir tornillos de 5 cm de largo. Ambas tienen el mismo promedio de longitud, pero con distintas variaciones.

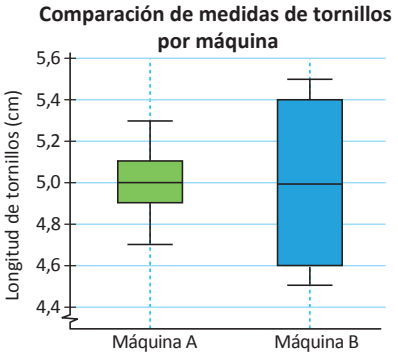
Un técnico afirma: "No basta con saber el promedio, necesitamos saber cuál máquina es la más precisa". ¿Cómo podrías ayudarlo a tomar una decisión? Justifica tu respuesta.

Aunque ambas máquinas tienen una media de 5 cm, esto no garantiza la misma precisión. La precisión depende de qué tan cercanos están los datos entre sí, no solo del promedio.

Ejemplo: Los siguientes valores representan la medida de 5 tornillos (en cm) tomadas al azar de cada máquina.

- Máquina A = 4,7; 4,9; 5,0; 5,1; 5,3
- Máquina B = 4,5; 4,6; 5,0; 5,4; 5,5

Ambas tienen la misma media, pero difieren en términos de dispersión.



El diagrama de caja muestra que la máquina A tiene valores más concentrados, sin valores alejados. Mientras que la máquina B presenta mayor dispersión, presentando valores extremos, como 4,5 y 5,5 cm.

Por tanto, la máquina A es más precisa, lo que garantiza mejor calidad y confiabilidad en la producción.

El análisis anterior nos muestra que las **medidas de dispersión** indican qué tan alejados están los datos de la media y permiten evaluar la variabilidad de un conjunto de datos agrupados en intervalos.

Rango (R). Es la diferencia entre el límite superior del último intervalo y el límite inferior del primero.

Rango (R) = límite superior final − límite inferior inicial

Desviación media (DM). Indica cuánto se alejan, en promedio, los valores de su media aritmética sin considerar el signo.

Por ejemplo se muestra esta tabla:

Intervalo	x_i	f_i
[40; 50[	45	4
[50; 60[	55	5
[60; 70]	65	1

$R = 70 - 40 = 30$

Calculamos la media.

$$\bar{x} = \frac{45 \cdot 4 + 55 \cdot 5 + 65 \cdot 1}{10} = \frac{180 + 275 + 65}{10} = \frac{520}{10} = 52$$

Calculamos la desviación media.

$$DM = \frac{|45 - 52| \cdot 4 + |55 - 52| \cdot 5 + |65 - 52| \cdot 1}{10} = \frac{28 + 15 + 13}{10} = \frac{56}{10} = 5{,}6$$

De lo analizado, el rango muestra la amplitud general de los datos, mientras que la desviación media evalúa con mayor precisión cuánto se dispersan los valores con respecto a la media.

Coeficiente de variación (*CV*). Expresa la dispersión como porcentaje de la media. Es útil para comparar regularidad entre conjuntos con diferentes unidades o escalas. Para una muestra se tiene lo siguiente:

$$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\ \%$$

A mayor valor del coeficiente de variación, mayor heterogeneidad de los valores de la variable; a menor *CV*, mayor homogeneidad de los valores de la variable.

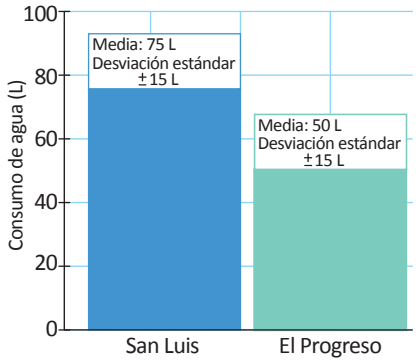
Situación: La medida que revela la regularidad

En una campaña sobre el uso eficiente del agua, se recolectaron datos de dos barrios:

- San Luis: media = 75 L, desviación estándar = 15 L
- El Progreso: media = 50 L, desviación estándar = 15 L

El gráfico muestra que ambos barrios tienen la misma dispersión, pero diferentes promedios. La municipalidad desea saber cuál presenta un consumo más regular, es decir, más homogéneo en proporción a su media. ¿Qué medida permite comparar la homogeneidad relativa?

Comparación del consumo semanal de agua por barrio



Cuando los conjuntos tienen distintas medias, no basta con comparar solo la desviación estándar. En estos casos, usamos el coeficiente de variación (*CV*), que expresa la dispersión relativa como porcentaje de la media.

En el gráfico se aprecia que, aunque ambos barrios tienen la misma desviación estándar, El Progreso presenta mayor dispersión relativa al tener una media menor.

Barrio	Media ($\bar{x}$)	Desviación estándar (S)	$CV = \frac{S}{\bar{x}} \times 100\ \%$
San Luis	75 L	15 L	$\frac{15}{75} \times 100\ \% = 20\ \%$
El Progreso	50 L	15 L	$\frac{15}{50} \times 100\ \% = 30\ \%$

$$CV = \frac{\text{desviación estándar}}{\text{media aritmética}} \times 100\ \%$$

Como el coeficiente de variación de San Luis es menor, su consumo es más regular y homogéneo. La municipalidad debería tomar San Luis como modelo al mostrar menor variabilidad relativa en el consumo.

Recuerda

Para datos agrupados tenemos:

Varianza muestral (S^2)

Mide cuánto se dispersan los datos respecto de su media, elevando al cuadrado las diferencias.

Para una muestra

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}$$

donde

- x_i: marca de clase
- f_i: frecuencia absoluta
- $\bar{x}$: media aritmética
- n: total de datos
- k: número de clases

Desviación estándar (S)

Es la raíz cuadrada de la varianza. Indica cuánto se separan los datos respecto al promedio.

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} f_i (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Evalúa tus progresos

- Resuelve un problema referido a un conjunto de datos agrupados (ejemplo: de producción tornillos) y exprésalo en medida de tendencia central o de dispersión.
- Interpreta el valor de las medidas de tendencia central y de dispersión en el contexto del problema.
- Emplea procedimientos referidos a las medidas de tendencia central y de dispersión.
- Sustenta tus conclusiones basadas en las medidas estadísticas.

Actividad lúdica



¡Valida tus ideas jugando! Usa las reglas del juego, evalúa tus estrategias y da sentido matemático a tus acciones.

El patrón secreto: transformaciones geométricas

Tu propósito de aprendizaje

Interpreta patrones basados en transformaciones geométricas empleando secuencialmente isometrías (simetría axial, traslación y rotación) y sus composiciones, utilizando instrumentos y coordenadas en un plano cartesiano para reconstruir un diseño, y justificar los procedimientos y la exactitud de cada transformación realizada.

1. Situación

En los restos de un antiguo templo, se halló un fragmento que oculta un patrón de transformaciones. Solo quedó un fragmento visual: se deben descifrar y aplicar traslación, rotación, simetría y composición para reconstruir el diseño. Al completar los cuatro desafíos, tu equipo descubrirá las cuatro partes de un símbolo ancestral. Al unirlas, revelarán un mensaje secreto. Empecemos, ¡tú puedes!



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

Equipos de cuatro personas que tendrán los siguientes roles:

- Geómetra: aplica las transformaciones con las figuras.
- Registrador: anota pasos, arma tablas y registra hipótesis.
- Analista gráfico: usa plano cartesiano, ejes y coordenadas.
- Validador: identifica errores y revisa justificaciones.

Materiales por equipo:

- Figuras modelo variadas, hoja cuadriculada o papelógrafo con plano cartesiano, piezas recortables en papel manteca, tarjetas de transformaciones y hoja de registro para cada desafío.

Reglas de juego:

- La pieza recortable puede usarse las veces necesarias.
- Cada figura debe replicarse con exactitud mediante una o más transformaciones.
- Por cada desafío superado, ganan una de las cuatro claves del patrón.
- Si la justificación es incorrecta o hay errores, esa clave se bloquea.

Practica valores

- Participa en debates, escucha y argumenta la posición a favor o en contra sin imponerlas a los demás.
- Cuida los recursos del aula utilizando el papel y demás materiales con responsabilidad para evitar desperdicios.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: Simetría axial (espejo)

Meta: Obtener la copia reflejada de la forma.

Usa el recortable así:

- Dibuja el eje.
- Marca tres puntos clave en la pieza (*A*, *B*, *C*).

- Voltea la pieza al otro lado del eje (como espejo) y colócala donde creas que va.
- Ahora justifica en el papel: traza la perpendicular del eje por *A* y marca *A*' a la misma distancia; repite con *B*, *C* y une.

Evidencia: Eje de simetría trazado, un par de puntos correspondientes (*A* y *A*') y la anotación de que el eje es la mediatriz del segmento *AA*'.

Desafío 2: Traslación (copiar y pegar)

Meta: Desplazar la forma por un vector $\vec{v} = (a; b)$ conservando la orientación.

Usa el recortable así:

- Dibuja la flecha de movimiento, *a* cuadritos a la izquierda/derecha y *b* hacia arriba/abajo (vector (*a*; *b*)).
- Desliza la pieza contando *a* cuadritos en X y *b* en Y; no la gires.
- Marca dos puntos *A* y *B*, registra sus coordenadas (*x*; *y*) y trasládalos a (*x* + *a*; *y* + *b*).

Evidencia: Flecha del vector más dos registros (*x*; *y*) se traslada a (*x* + *a*; *y* + *b*).

Desafío 3: Rotación (giro 90°/180°)

Meta: Girar una figura alrededor de un punto fijo (centro de rotación) un ángulo determinado.

Usa el recortable así (elige *A* o *B*):

- Para *A*: emplea chinche o clip. Marca el centro en el papel; pincha la pieza ahí y gira 90°/180°. Traza el contorno nuevo.
- Para *B*: marca el centro y dos o tres puntos (*A*, *B*, *C*); con transportador gíralos 90°/180°, y marca *A*', *B*', *C*'; y luego únelos.

Evidencia: Centro y ángulo; verifica $|CA| = |CA'|$ en al menos dos puntos.

Desafío 4: Composición (dos pasos)

Meta: Aplicar dos transformaciones en orden (por ejemplo, traslación-giro, reflexión-traslación).

Usa el recortable así:

- Mueve, gira o refleja la pieza y marca el intermedio.
- Desde ese intermedio, aplica el segundo cambio y dibuja el final.
- Esquema 1-2: dibuja el antes y después de la figura y anota los datos: flecha (vector), línea (eje) o centro más ángulo.

Evidencia: Incluye el esquema 1-2 y una frase que diga por qué va en ese orden.

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué estrategia del equipo facilitó resolver con precisión las transformaciones y cómo podrían mejorar la comunicación para lograr una mejor coordinación en el proceso?

b. ¿En qué contextos reales usarían estas ideas (logos, arte, diseño, gráficos)?

Evalúa tus progresos

- Representa los desafíos del oráculo (situación lúdica) mediante el uso de transformaciones geométricas (simetría, traslación y rotación) para replicar y mover el fragmento base.
- Establece los parámetros exactos (eje de simetría, vector de traslación o ángulo de rotación) para generar la pieza transformada.
- Expresa la composición de transformaciones indicando el orden y el tipo de movimiento aplicado para ir de la pieza inicial a la final.
- Emplea procedimientos para determinar la forma y la ubicación correctas de la pieza oculta y completar el diseño.
- Argumenta por qué el diseño final es la solución correcta del enigma, y evalúa si las transformaciones cumplen las propiedades de isometría para sustentar el éxito del juego.

UNIDAD

5

Diseñamos soluciones creativas y reforestamos para cuidar nuestro planeta



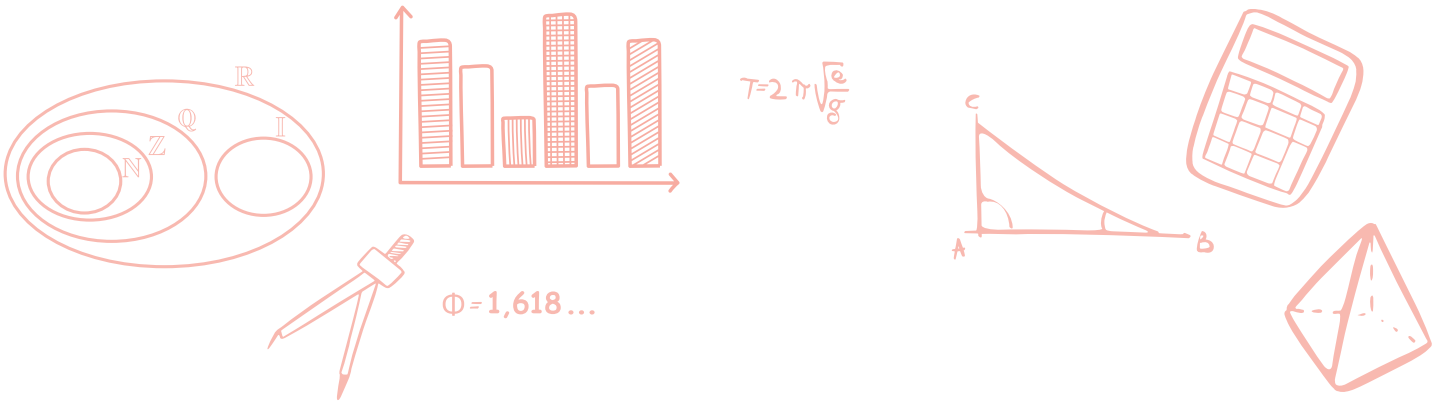
OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

15 VIDA DE ECOSISTEMAS TERRESTRES

Este objetivo busca proteger, restaurar y promover el uso de los ecosistemas terrestres gestionando de manera sostenible los bosques y frenando la pérdida de biodiversidad.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Reforestación de zonas degradadas con especies nativas
- Implementación de prácticas agrícolas sostenibles
- Sensibilización sobre el impacto del consumo y la deforestación



En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de regularidad, equivalencia y cambio
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión, datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Sistema de ecuaciones lineales

- Sistema de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas
- Métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción y gráfico

Formas bidimensionales

- Triángulos y cuadriláteros
- Triángulos: líneas y puntos notables
- Circunferencia: propiedades
- Cuadriláteros inscritos y circunscritos en una circunferencia

Medidas de formas bidimensionales

- Polígonos irregulares: área y perímetro

Medidas de formas tridimensionales

- Sólidos compuestos: área y volumen

Medidas estadísticas

- Medidas de localización: cuantiles
- Medidas de correlación entre dos variables y diagramas de dispersión



Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Solidaridad planetaria y equidad intergeneracional
- Enfoque orientación al bien común
  - Equidad y justicia
  - Solidaridad

Fuente: Shutterstock

Investigamos



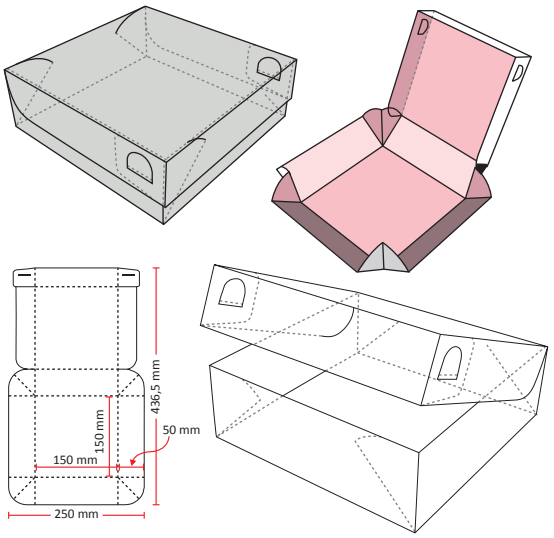
Examina cada situación, asume un rol, resuelve usando la información del anexo y sustenta tu respuesta y tus ideas matemáticas.

SITUACIÓN

Diseño de un empaque creativo

En el Perú, el mercado de empaques crecerá un 13 % anual hasta el año 2025 (Mercado Negro, 2022). Sin embargo, el desafío radica en equilibrar la sostenibilidad, los costos y la ergonomía, ya que un alto impacto ambiental puede afectar la viabilidad económica.

Como ingeniero industrial, tu misión es crear soluciones que optimicen protección, funcionalidad, conservación, transporte y estética minimizando el impacto ambiental y maximizando la eficiencia de recursos.



¿Qué criterios debes considerar para diseñar un empaque eficiente que responda a las demandas del mercado sin comprometer el ambiente ni los costos de producción?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Explora** las tendencias del mercado de empaques en el Perú. Analiza su crecimiento reciente, identifica factores que lo impulsan y proyecta su evolución aplicando medidas estadísticas (localización). Concluye por qué estas tendencias exigen innovar en diseño.
- **Compara** distintos materiales de empaque analizando sus propiedades como costo, impacto ambiental y resistencia. A partir de los datos del anexo A, selecciona el material más apropiado para un diseño eficiente y sostenible. Organiza la información en una tabla, aplica medidas de localización (como media y rango), representa con un diagrama de caja y sustenta tu elección.
- **Diseña** un empaque con forma de sólidos geométricos compuestos, incluyendo prismas, cilindros y figuras de revolución para obtener su volumen y área de superficie. Evalúa su eficiencia considerando cuántos empaques pueden almacenarse en un espacio dado. Justifica tu elección a partir de su funcionalidad.
- **Estima** el costo del empaque a partir de combinaciones posibles de materiales mediante la resolución de sistemas de ecuaciones con los datos dados. Interpreta los resultados y justifica cuál combinación resulta más eficiente y económica.
- **Compara** tres diseños de empaque usando criterios, como costo, sostenibilidad y funcionalidad. Asigna puntajes a cada criterio, organiza los resultados en una tabla o gráfica, y justifica cuál diseño es más equilibrado para responder al mercado.
- **Presenta** tu propuesta final de empaque integrando los análisis realizados. Describe su diseño, materiales, costo y eficiencia. Justifica por qué es la mejor opción considerando las demandas del mercado, la sostenibilidad y la funcionalidad del producto.

SITUACIÓN

Planificación de un proyecto de reforestación

Según el Banco Mundial, entre 2005 y 2015, el Perú perdió más de 134 000 ha de cobertura forestal, principalmente en la Amazonía. La deforestación y la degradación de ecosistemas han acelerado el cambio climático, lo cual afecta la biodiversidad y reduce la capacidad de captura de CO_2.



Como ingeniero forestal, tu misión es diseñar un plan de reforestación que maximice los beneficios ecológicos y sociales, que asegure la viabilidad económica y que permita organizar estratégicamente las zonas de plantación. Con tal fin, deberás tomar decisiones fundamentadas en datos cuantitativos y criterios de sostenibilidad.

¿Qué criterios y estrategias debes considerar para diseñar un plan de reforestación que sea ambientalmente sostenible, económicamente viable y territorialmente eficiente?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Reconoce** la pérdida de cobertura forestal en tu región y compárala con otras zonas del país. Aplica medidas de localización, como la mediana y cuartiles, para interpretar los datos y representarlos gráficamente. Identifica las regiones más afectadas por la deforestación.
- **Elabora** un gráfico de dispersión que relacione la pérdida de cobertura forestal y la biodiversidad en distintas regiones del país. Analiza si hay alguna relación entre estas variables y argumenta qué regiones requieren atención prioritaria.
- **Delimita** una zona prioritaria para reforestar, calcula su área y estima cuántos árboles sembrarías según el distanciamiento. Compara modelos de plantación y calcula el volumen de tierra a remover para preparar los hoyos de siembra.
- **Evalúa** la viabilidad económica de tu plan de reforestación planteando un sistema de ecuaciones que relacione la cantidad de árboles nativos y exóticos con el presupuesto total. Analiza distintas combinaciones posibles considerando el costo, la sostenibilidad y el impacto ambiental.
- **Evalúa** los beneficios ambientales de tu plan de reforestación considerando la captura de CO_2 y otras funciones ecológicas. Analiza la variabilidad con medidas estadísticas como el rango y la desviación media, y representa los resultados gráficamente para sustentar su importancia.
- **Diseña** un plan de reforestación teniendo en cuenta beneficios ambientales, costos estimados y uso eficiente del terreno. Sustenta con gráficos y argumentos cómo tu propuesta aporta al desarrollo sostenible de tu comunidad desde un enfoque integral.

Anexo A: Diseño de un empaque creativo

1. Crecimiento del mercado de empaques por regiones en el Perú (2019-2024)

Región	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Amazonas	222	244	266	289	311	333
Áncash	60	66	72	78	84	90
Apurímac	61	67	73	79	85	92
Arequipa	194	213	233	252	272	291
Ayacucho	206	227	247	268	288	309
Cajamarca	126	139	151	164	176	189
Callao	223	245	268	290	312	334
Cusco	200	220	240	260	280	300
Huancavelica	143	157	172	186	200	214
Huánuco	237	261	284	308	332	356
Ica	48	53	58	62	67	72
Junín	196	216	235	255	274	294
La Libertad	129	142	155	168	181	194
Lambayeque	54	59	65	70	76	81
Lima metropolitana	226	249	271	294	316	339
Lima provincias	241	265	289	313	337	362
Loreto	207	228	248	269	290	310
Madre de Dios	90	99	108	117	126	135
Moquegua	123	135	148	160	172	184
Pasco	77	85	92	100	108	116
Piura	151	166	181	196	211	226
Puno	143	157	172	186	200	214
San Martín	250	275	300	325	350	375
Tacna	235	258	282	306	329	352
Tumbes	111	122	133	144	155	166

Fuente: Adaptado de CIEN (2025).

2. Tabla comparativa de materiales utilizados en el empaque

Material	Costo por m^2 (S/)	Resistencia (1-5)	Reciclabilidad (sí o no)	Impacto ambiental (alto/medio/bajo)
Cartón reciclado	0,12	3	Sí	Bajo
Bioplástico	0,18	4	Sí	Medio
Vidrio	0,25	5	Sí	Alto
Plástico tradicional	0,10	4	No	Alto
Papel kraft	0,14	2	Sí	Bajo

Fuente: Adaptado de Ciencias Ambientales (2017).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Evaluación de materiales empleados en el empaque

Material	Costo por kg (S/)	Reciclabilidad (%)	Huella de carbono (kg CO_2e / unidad)
Polietileno reciclado	1,20	80	1,5
Papel con recubrimiento biológico	2,50	90	0,7
Polietileno de material único	1,80	100	1,0
Cartón de celulosa microfibrilada	2,20	85	0,9
Cartón reciclado compuesto	1,60	75	1,2
Plástico biodegradable	2,70	70	0,8

Fuente: Adaptado de Ciencias Ambientales (2017).

4. Información técnica sobre el costo de materiales y las condiciones de diseño de empaques

Tipo de empaque	Material	Costo por m^2 (S/)	Área máxima permitida (dm^2)	Condición de diseño
Caja cúbica	Cartón reciclado	0,12	8	Debe tener tapa unida.
Cilindro	Plástico biodegradable	0,20	7	Debe ser apilable.
Caja hexagonal	Cartón kraft	0,15	9	Debe tener base reforzada.
Caja trapezoidal	Cartón reciclado	0,12	8	Debe incluir sistema de cierre.

Fuente: Adaptado de Mincetur (2009).

5. Comparación técnica de propuestas de diseño de empaques

Nombre del diseño	Costo total (S/)	Área utilizada (m^2)	Sostenibilidad (1-5)	Funcionalidad (1-5)	Puntaje total
Caja cúbica reforzada	1,80	7,5	4	5	9
...	...	...	...	...	...

Anexo B: Planificación de un proyecto de reforestación

1. Pérdida de cobertura forestal por región (2019-2024)

Región	2019 (ha)	2020 (ha)	2021 (ha)	2022 (ha)	2023 (ha)	2024 (ha)
Amazonas	3500	4000	4200	4300	4500	4600
Áncash	1200	1300	1350	1400	1450	1500
Apurímac	900	950	1000	1050	1100	1150
Arequipa	1500	1600	1650	1700	1750	1800
Ayacucho	1000	1050	1100	1150	1200	1250
Cajamarca	2200	2400	2500	2600	2700	2800
Callao	300	320	330	340	350	360
Cusco	2800	3000	3100	3200	3300	3400
Huancavelica	800	850	900	950	1000	1050
Huánuco	1700	1800	1850	1900	1950	2000
Ica	600	650	670	690	710	730
Junín	2100	2200	2250	2300	2350	2400
La Libertad	1800	1900	1950	2000	2050	2100
Lambayeque	1100	1150	1180	1210	1240	1270
Lima	900	950	980	1000	1020	1050
Loreto	10 000	12 000	13 000	13 500	14 000	14 500
Madre de Dios	4000	4500	4700	4900	5100	5300
Moquegua	700	750	780	800	820	850
Pasco	1200	1300	1350	1400	1450	1500
Piura	3000	3500	3700	3900	4100	4300
Puno	1500	1600	1650	1700	1750	1800
San Martín	2500	2700	2800	2900	3000	3100
Tacna	600	650	670	690	710	730
Tumbes	500	550	570	590	610	630
Ucayali	8000	9500	10 000	10 500	11 000	11 500

Fuente: Adaptado de Ceplan (2022).

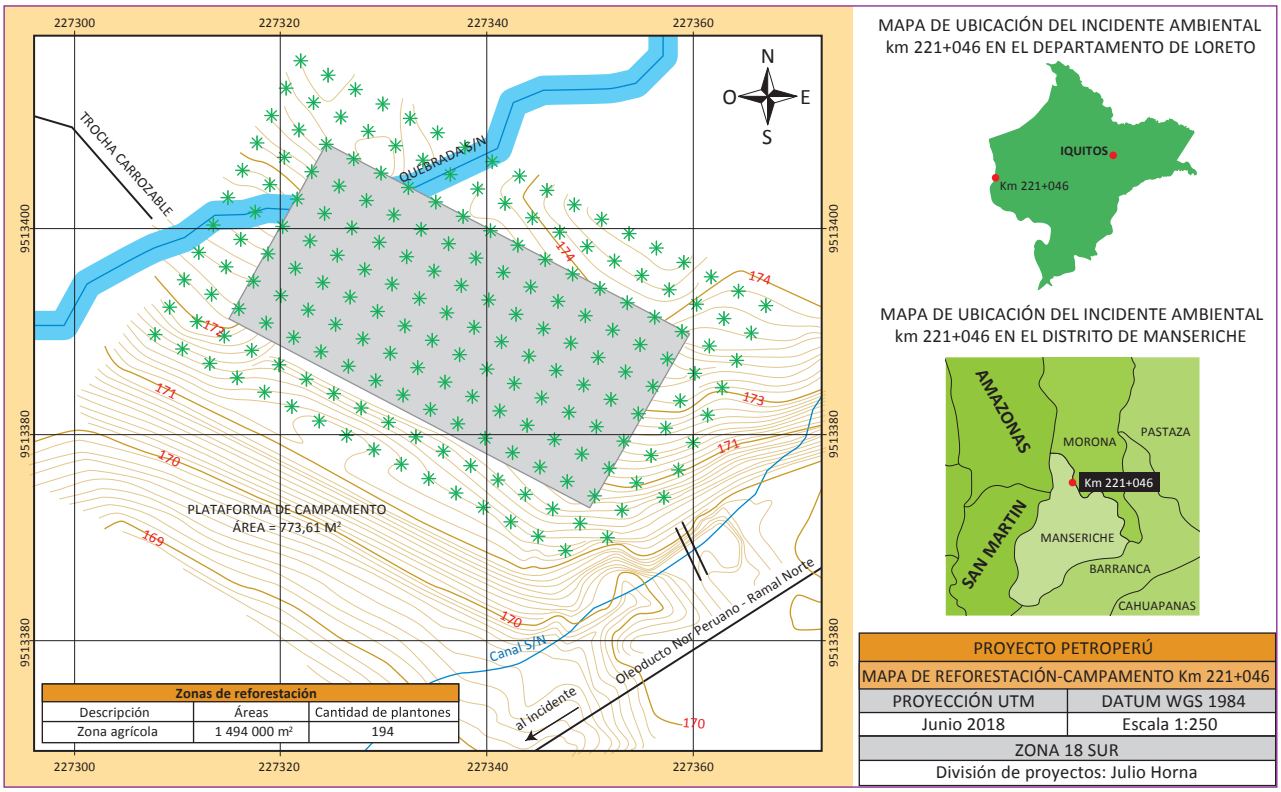
2. Comparación de modelos de plantación

Modelo de plantación	Distancia entre plantas (m)	Distancia entre hileras (m)	Fórmula usada	Densidad (plantas/ha)	Comentario técnico
Triangular	3	—	$10\,000 / (3^2 \times 0{,}866)$	1283	Buen aprovechamiento en pendientes
Cuadrado	2	2	$10\,000 / (2 \times 2)$	2500	Alta densidad inicial
Rectangular	2	4	$10\,000 / (2 \times 4)$	1250	Menor competencia, fácil mantenimiento

Fuente: Adaptado de InfoAgrónomo (2023).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Esquema de una zona prioritaria para reforestar (ejemplo referencial)



Fuente: Adaptado de Aguilar (s. f.).

4. Catálogo de especies

Especie	Tipo	Costo planta (S/)	CO_2 anual (kg/árbol)	Densidad (árbol/ha)	Volumen estimado (m^3/ha)	Beneficios adicionales
Capirona	Nativa	3,00-3,50	25	1100-1300	250-300	Alta biodiversidad, recuperación ecológica
Cedrela odorata	Nativa	2,50-3,00	22	1100-1300	200-250	Madera duradera, reguladora de ciclo hídrico
Caoba	Nativa	3,00-3,50	24	1000-1200	220-270	Valiosa, ecológica y económica
Pino	Exótica	1,20-1,80	15	1200-1600	180-220	Crecimiento rápido
Eucalipto	Exótica	1,00-1,50	14	1200-1600	170-210	Protección del suelo, recarga hídrica
Bolaina	Nativa	2,80-3,20	23	1100-1300	230-280	Adaptable a suelos degradados
Lupuna	Nativa	2,50-3,00	21	1000-1200	210-260	Alta captura de carbono

Fuente: Adaptado de Minam (2009).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

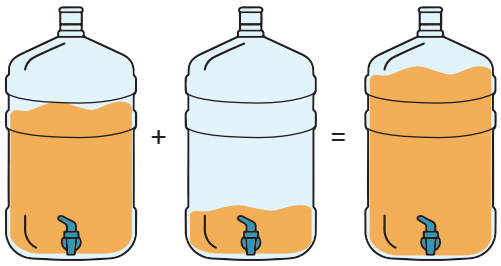
Exploramos



Tus aprendizajes son el impulso para enfrentar nuevos desafíos. Úsalos con creatividad y decisión.

1. Refresco de mejor pureza

Una empresa de bebidas enfrenta un desafío: los 900 galones de refresco que produce contienen solo un 5 % de zumo de naranja. Para cumplir con el nuevo reglamento, que exige un 10 % de concentración, la empresa decide añadir zumo de naranja puro.



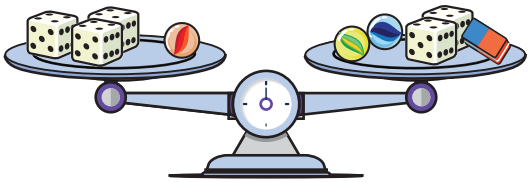
900 galones de refresco al 5 % de zumo de naranja | *x* galones de zumo de naranja puro (100 %) | (900 + *x*) galones al 10 %

a. Dada la necesidad de mezclar el zumo de naranja puro con los 900 galones de refresco, ¿cuál es la expresión que representa la distribución necesaria para alcanzar una concentración del 10 %?

b. Si se desea aumentar la concentración al 12 %, ¿cuánto zumo adicional debe agregarse? Justifica tu respuesta.

2. Equilibrio en una balanza

En la imagen se muestra una balanza con dos platillos equilibrados. En el platillo izquierdo hay tres dados y una canica; en el derecho, dos dados, dos canicas y un borrador de 30 g. Todos los dados tienen la misma masa y todas las canicas la misma masa. En conjunto, los cinco dados y las tres canicas pesan 500 g.



a. Respecto a esta información, propón una nueva disposición de los objetos en los platillos que permita mantener la balanza en equilibrio.

b. Se quiere enviar un kit de recursos que contenga estos objetos. Asimismo, se afirma que la suma de las masas de un dado, de una canica y del borrador de 30 g es de 120 g. ¿Es correcto ello? Justifica tu respuesta empleando propiedades.

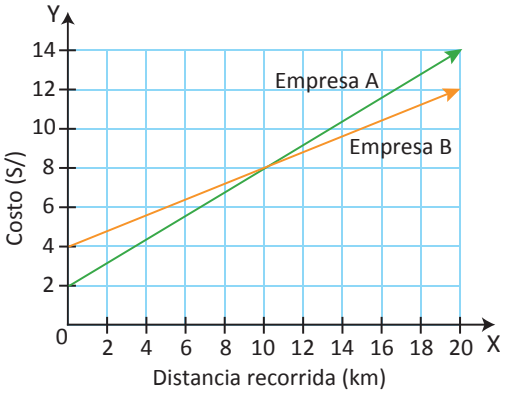
3. Costo en el servicio de taxi

La gráfica muestra el costo del servicio de dos empresas de transporte al recorrer cierto kilometraje.

a. Si necesitas realizar varios viajes durante el día (por ejemplo, 5), ¿cuál empresa te conviene más considerando que la tarifa base influye en cada viaje?

b. Para hacer un viaje corto de 5 km, ¿qué empresa de transporte te conviene más si tienes un presupuesto de treinta soles?

c. Con cada empresa, ¿cuántos kilómetros podrías recorrer sin pasarte de tu presupuesto?



4. Carrera de motocicletas

En el recuadro se observa la representación de la rapidez (v) en km/h de dos motocicletas A y B en una pista recta.

- Motocicleta A: $v_A(t) = \frac{t}{6} + 20;\ t \geq 0$
- Motocicleta B: $v_B(t) = \begin{cases} 10 + \frac{t}{3};\ 0 \leq t \leq 37 \\ 37;\ t > 37 \end{cases}$

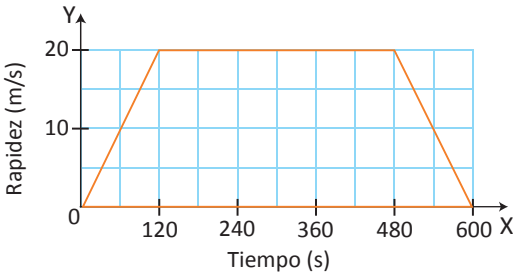
a. Completa la tabla en los tiempos indicados considerando que a la motocicleta B se le da una ventaja de 10 km.

Tiempo (min)	$v_A(t)$	$v_B(t)$
0	20	
3		
6	21	
9		13
15		
60		

b. Si ambas motocicletas se encuentran en sus trayectos, expresa el tiempo y la rapidez en dicho momento.

5. Velocidad y estrategia

Para comprobar la rapidez de un atleta, un preparador físico registra la ida y el retorno al punto de prueba.



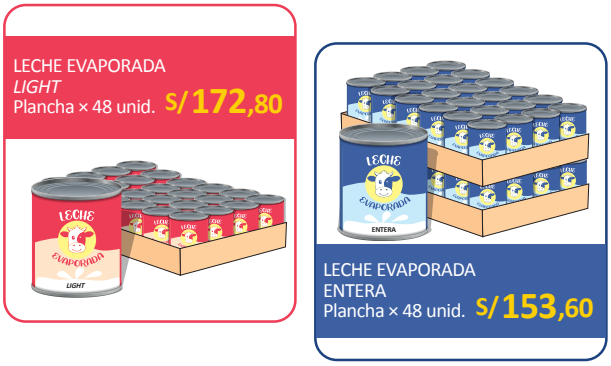
a. La rapidez del atleta aumenta linealmente desde los 120 segundos hasta los 480 segundos. ¿Es correcto lo afirmado?

b. Para tomar decisiones, el preparador físico quiere reconocer la velocidad que lleva el atleta en toda la prueba. ¿Cómo podrá analizar el cambio de velocidad en los tramos característicos?

c. Otro atleta corre a una velocidad constante de 18 m/s durante 600 s. ¿Cuál de los dos atletas recorre mayor distancia en ese tiempo y cuál es la diferencia?

6. Optimización de la compra de leche

Una tienda vende leche evaporada *light* y entera. Cada plancha contiene 48 latas de leche de 400 g cada una, con precios de S/172,80 y S/153,60, respectivamente. María necesita al menos 5700 g de leche para preparar tortas y busca minimizar el gasto total combinando ambos tipos.



a. ¿Cuál es el precio unitario de cada tipo de leche?

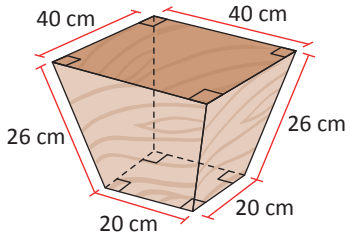
b. ¿Cómo debe organizar la compra de manera que el costo total sea el menor posible? Sustenta tu respuesta con ejemplos.

c. Con S/37,5 determina cuántas latas puede comprar y si su compra es viable, asumiendo que se venden de forma individual.

d. Si cuenta con un presupuesto de S/55, manteniendo la condición de al menos 20 % *light*, ¿cuál es la máxima cantidad de gramos que puede conseguir? Indica cuántas latas de cada tipo compraría.

1. Contenedor de madera

La figura corresponde al diseño de un contenedor compuesto por una base y caras laterales:



a. Si todas las medidas del contenedor se reducen a la mitad, el área total también se reduce a la mitad. ¿Es correcta la afirmación?

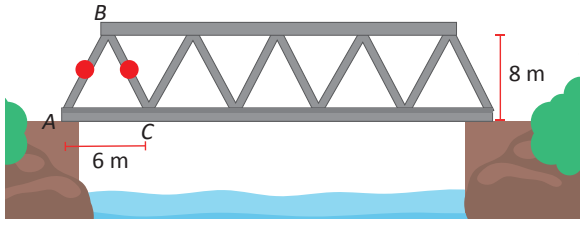
b. Considera un nuevo diseño con estas características:

- Base: forma hexagonal regular con lados de 20 cm.
- Caras laterales: cuadriláteros con una altura de 26 cm, perpendiculares a la base.

¿Cómo sería este nuevo diseño? Representa el nuevo diseño y estima si este tiene mayor capacidad que el diseño anterior.

2. Diseño de un puente metálico

Una empresa constructora diseña un puente metálico que cubrirá el ancho de un río. Se sabe que las barras horizontales y de soporte son del mismo tipo.



a. La empresa emplea ese diseño para cubrir el ancho de 90 m de un río, considerando las mismas características del diseño original. Se afirma que al triplicarse el ancho del puente, la longitud total de barras también se triplica. ¿Es correcta la afirmación?

b. En el diseño del puente se usan triángulos isósceles. ¿Crees que estos triángulos deben tener siempre un ángulo obtuso?

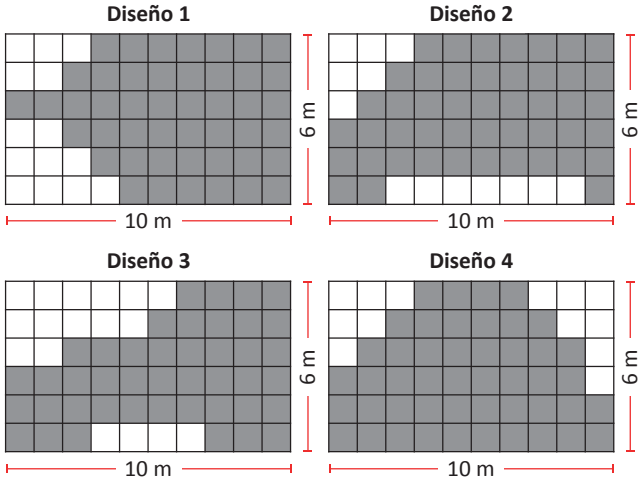
Justifica tu respuesta empleando propiedades geométricas con ejemplos o contraejemplos.

3. Diseño de mosaicos

A continuación, se muestran cuatro diseños de distribución para la zona de comercio (parte gris) y para los servicios complementarios (parte blanca) en un centro comercial:

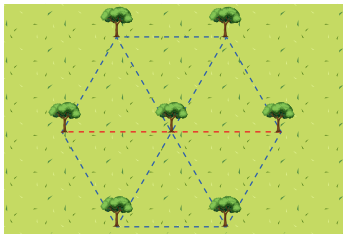
a. Es posible que dos de los diseños tengan la misma superficie para la zona de comercio y requieran la misma medida de cerco perimetral (considerar cercar todo el contorno). ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica tu respuesta con propiedades geométricas.

b. Selecciona el diseño que tiene una mejor distribución de las zonas destinadas al comercio y a los servicios complementarios considerando criterios como ocupación de espacio, simetría, etc.



4. Diseño de una plantación

A continuación se observa un sistema de plantación de paltos, donde los árboles están colocados a distancias iguales:

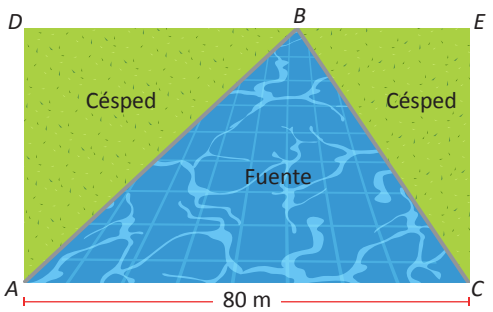


Completa la tabla.

N.º de diagonales que pasan por el centro	
Nombre del triángulo que conforma el hexágono	
Área de cada triángulo que conforma el hexágono	
Área del hexágono (nota: $\sqrt{3} = 1{,}7$)	
Relación entre el área del triángulo y del hexágono	

5. Fuente triangular en el parque

La figura muestra el diseño de un parque de forma rectangular organizado por áreas verdes y una fuente.



a. La relación entre las áreas verdes del parque y las de la fuente siempre es de 1 a 2. ¿Es correcta la afirmación?

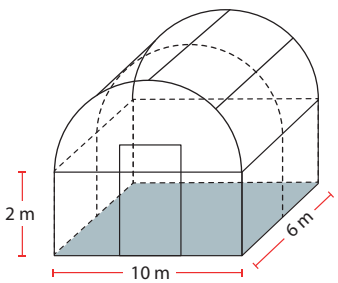
b. Si se mueve el punto *B* a lo largo del lado *DE*, la superficie de la fuente siempre será el 50 % de la superficie del parque. ¿Es correcto lo afirmado?

Responde las preguntas anteriores empleando propiedades geométricas, así como ejemplos o contraejemplos.

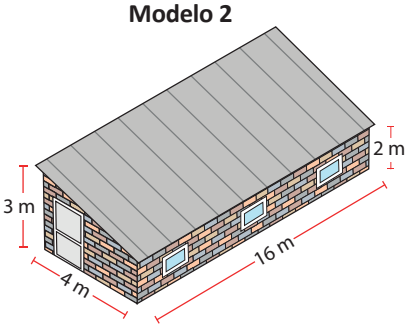
6. Diseño de fitotoldos

Se muestran dos modelos de invernadero con diferentes estructuras y dimensiones. Observa con atención cada modelo.

Modelo 1



Modelo 2



a. Si cada modelo se recubre en su totalidad con plástico en su interior, sin descontar áreas de puertas y ventanas, ¿qué modelo demandará mayor cantidad de material? Justifica tu respuesta. Considera que la parte superior de la puerta forma un semicírculo. El piso no forma parte del recubrimiento.

b. Si se cuenta con 1100 m^2 de plástico, ¿cuántos invernaderos del modelo 1 y del modelo 2 se podrían construir? Propón una combinación que permita aprovechar al máximo el material disponible y evitar que se origine un excedente.

1. Referéndum comunitario

A continuación, se presenta la tabla de resultados elaborada por el comité electoral:

Referéndum por grupo etáreo

Edad	A favor	En contra	Indeciso
18-25	56	47	77
26-40	85	85	50
41-60	64	70	36
61 a más	53	24	63
Total	258	226	226

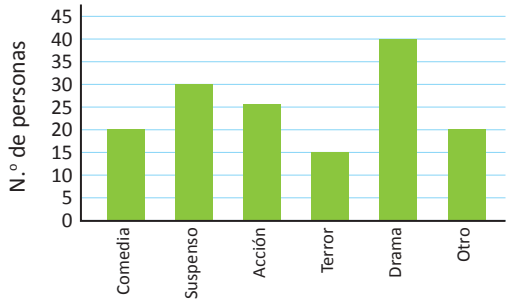
a. El comité requiere conocer la relevancia del aporte al total y de cada opción (a favor, en contra e indecisos) dentro del grupo de 41 años a más en el referéndum. Explica tu respuesta empleando porcentajes.

b. El comité necesita analizar la participación de jóvenes adultos (18-40 años) y cómo ello influye en el resultado del referéndum. Explica tu respuesta.

2. Cine a la carta

Una empresa de cine analiza los resultados de una encuesta sobre la preferencia del tipo de película de los clientes.

Encuesta de películas



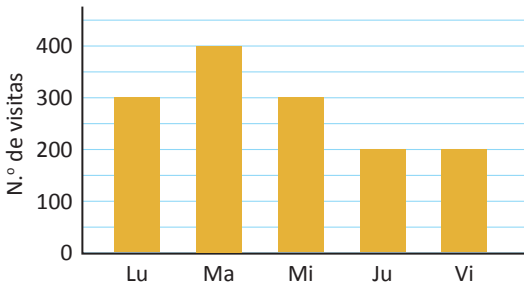
a. ¿Cuál es el porcentaje de preferencia de cada tipo de película? Explica cómo aprovechar estos datos para influir en la selección de películas.

b. Si es necesario que al menos el 60 % de las películas programadas sean de las más populares, ¿qué combinación de tipos de películas recomendarías incluir en la programación? Explica tu respuesta.

3. Visitas turísticas a una región

La gráfica muestra el número de turistas que visitaron una región durante los cinco primeros días de una semana de un mes.

Visitantes por semana



a. Para comprender mejor la frecuencia de las visitas, ¿es suficiente el promedio en la semana o sería más útil considerar también el día con más visitas y el día con menos visitas? Sustenta tu propuesta empleando las medidas de tendencia central.

b. Se afirma que, para conocer el comportamiento de las visitas en un día cualquiera de la referida semana, la mediana es más representativa que la media. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta usando los datos de la gráfica.

4. Tamaño de las tortugas

La tabla muestra los registros del tamaño de una especie de tortugas.

Tabla 1

Tamaño (cm)	Frecuencia
$190 \leq T < 210$	5
$210 \leq T < 230$	8
$230 \leq T < 250$	11
$250 \leq T < 270$	7
$270 \leq T < 290$	5
$290 \leq T \leq 310$	4

a. Se desea construir un refugio para las tortugas. Elige un rango de tamaño que incluya la mayor cantidad posible de tortugas. Considera que el rango debe ser el más corto. Justifica tu elección.

b. Con los datos de la tabla 1, realiza una nueva agrupación y completa la tabla 2.

Tabla 2

Tamaño (cm)	Frecuencia
$190 \leq T < 230$	13
$230 \leq T < 270$	
$270 \leq T < 310$	

5. Análisis del desempeño

La gráfica muestra las calificaciones de las prácticas de un estudiante.



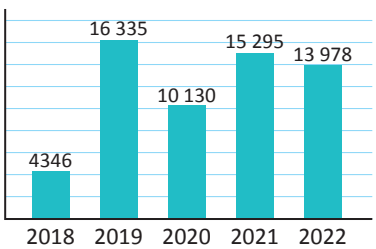
a. El estudiante menciona que su promedio se ve afectado por las calificaciones más bajas y que sería más justo usar la mediana para reflejar su verdadero desempeño. ¿Tiene razón en su argumento? Justifica tu respuesta usando la información de la gráfica.

b. Para mejorar su promedio, el estudiante calcula que se deben eliminar las tres calificaciones más bajas. ¿Cómo afecta esto en la calificación final?

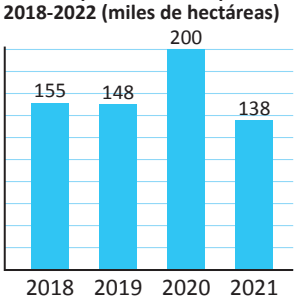
6. Reforestación y pérdida de bosques

Se observa en las gráficas la reforestación y la pérdida de bosques en el país, lo que afecta a la biodiversidad.

Perú: superficie reforestada anualmente 2018-2022 (hectáreas)



Perú: pérdida de bosques 2018-2022 (miles de hectáreas)



a. Explica por qué la media puede diferir de la mediana y qué indica esta diferencia acerca de la presencia de valores atípicos. Usa las medidas de tendencia central y explica la situación con los datos del gráfico.

b. Para implementar mejoras en la reforestación, es necesario analizar la tendencia de la superficie reforestada. Según la gráfica, ¿cuál es el promedio de superficie reforestada y cuál para la pérdida de bosques?

Fuentes: Servicio Nacional Forestal y de Fauna Silvestre (SERFOR) / Ministerio del Ambiente (MINAM), Programa Nacional de Conservacieon de Bosques para la Mitigación del Cambio Climático (PNCBMCC)

Desarrollamos



Evalúa situaciones, muestra resoluciones, explica ideas matemáticas y profundiza tus aprendizajes.

Tu propósito de aprendizaje

Establece relaciones en situaciones que involucran el área y el perímetro de regiones basados en polígonos irregulares descomponiéndose en figuras conocidas.

Emplea y comunica procedimientos expresando el área y el perímetro de figuras irregulares en unidades cuadradas y lineales, y argumenta la validez y pertinencia de los métodos utilizados.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Promueve la gestión de los recursos de la clase de Matemática minimizando el desperdicio (como, por ejemplo, el uso de las hojas) para proteger el ambiente.
- Participa en acuerdos que beneficien a tu equipo cuando surgen conflictos.

Pensamos y actuamos

Observa atentamente las siguientes figuras irregulares y analiza las medidas de cada uno de sus lados. Luego, determina si se trata de figuras completas o recortadas con respecto a una figura geométrica conocida.

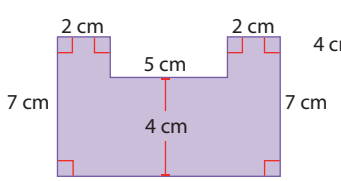


Figura 1

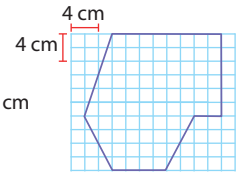


Figura 2

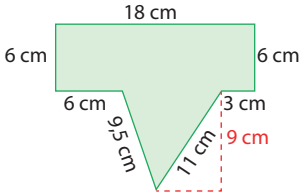


Figura 3

1. Completa la tabla con la información correspondiente a las figuras anteriores y luego responde.

Figura	¿Figura completa o recortada?	Formas involucradas	Área (cm^2)	Perímetro (cm)	Estrategia para encontrar el área y el perímetro
1	Recortada	Rectángulos	48		
2					
3					

a. ¿Qué figuras geométricas reconociste en cada caso?

b. ¿Qué estrategia usaste: descomposición (separar en figuras) o composición (unir figuras)? Explica por qué te resultó útil.

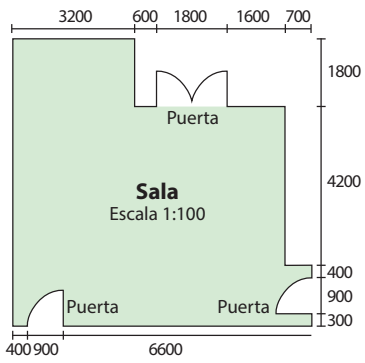
c. ¿Qué dificultades encontraste para hallar el perímetro?

2. Analiza el plano de la sala multifuncional y luego responde.

a. Determina el área total de la sala descomponiéndola en figuras simples.

b. Calcula el perímetro total considerando todos los tramos rectos visibles.

c. Usa estrategias de descomposición para justificar tus cálculos.



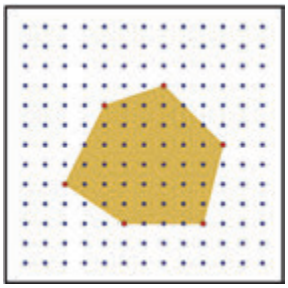
d. Completa la siguiente tabla respecto al plano anterior:

Parte del plano	Figura	Área (m^2)	Perímetro (m)	Estrategia para encontrar el área y el perímetro
Rectángulo mayor (sala)				
Recorte 1				
Recorte 2				
Total				

e. Responde las siguientes preguntas:

- ¿Qué partes del plano complicaron más los cálculos?, ¿por qué?
- ¿Cómo ayudó la escala a resolver el problema?
- ¿Crees que el perímetro te da una idea real del material necesario para cercar la sala?

3. En la cuadrícula de puntos mostrada, se puede hallar el área de la región poligonal contando los puntos interiores (*i*) y los puntos del perímetro (*b*).



El teorema de Pick establece lo siguiente:

$$\text{Área} = i + \frac{b}{2} - 1$$

a. Calcula el área de la figura usando el teorema de Pick y empleando estrategias conocidas (por ejemplo, descomposición). Compara tus resultados.

b. ¿Obtuviste el mismo valor de área con ambos métodos?, ¿a qué crees que se deba? ¿Cuál método te pareció más claro o más fácil de aplicar?

c. ¿En qué situaciones crees que sería más útil usar el teorema de Pick?

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, tres estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Las figuras irregulares pueden descomponerse en figuras simples para hallar el área, pero no siempre esta estrategia sirve para calcular el perímetro.	Si una figura tiene recortes o huecos, conviene usar la composición para estimar su área.	El teorema de Pick permite hallar el área de figuras sobre cuadrículas usando solo los puntos del borde e interiores.

a. ¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

b. Justifica tu posición con base en lo trabajado en las actividades anteriores.

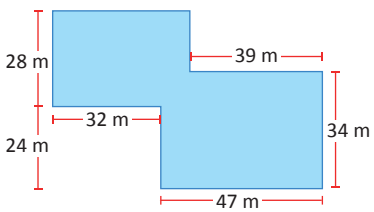
Evalúa tus progresos

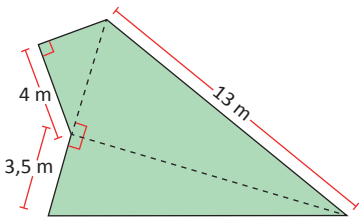
- Establece relaciones al resolver un problema que involucra polígonos irregulares y los expresa en polígonos conocidos.
- Expresa los polígonos conocidos en la descomposición de los polígonos irregulares e interpreta los resultados en unidades de medida.
- Emplea procedimientos, como la suma en las áreas, para hallar el perímetro y el área de polígonos irregulares.
- Argumenta con ejemplos que el área de la figura irregular es igual a la suma de las que la componen.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

Observa las siguientes figuras irregulares:





a. Explica cómo puedes descomponer cada figura en formas más simples para calcular el área total.

b. Estima el perímetro y el área de cada figura. ¿Qué dificultades encuentras al calcularlos? ¿Qué datos adicionales serían útiles para mejorar tu estimación?

Tu propósito de aprendizaje

Organiza datos en situaciones (ingresos, distancias, entre otros) que involucran la posición de datos referidos a cuantiles (cuartiles, deciles, percentiles) y al rango intercuartílico.

Comunica e interpreta la distribución y dispersión usando ojivas y diagramas de caja, y justifica conclusiones sobre la concentración o dispersión de los datos, evaluando la representatividad de estos indicadores para tomar decisiones.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

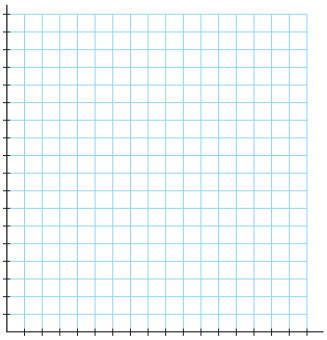
- Colabora en campañas ambientales recopilando información sobre prácticas y preferencias de manejo de residuos.
- Realiza actividades colaborativas escuchando con empatía, intercambiando estrategias y valorando los progresos individuales.

Pensamos y actuamos

1. Una empresa registró el tiempo (en minutos) que sus técnicos demoran en instalar un servicio de internet a domicilio. La siguiente tabla resume los datos:

Tiempo (min)	[10; 20[	[20; 30[	[30; 40[	[40; 50[	[50; 60]
Frecuencia	2	5	8	3	2

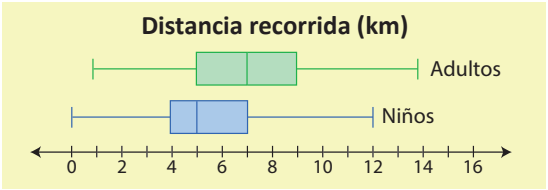
a. Construye la frecuencia acumulada y represéntala en el plano cartesiano y traza la ojiva.

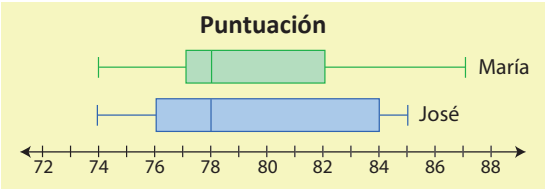


b. El segundo cuartil indica el tiempo máximo en que se completa la mitad de las instalaciones. ¿Qué concluye la empresa sobre el desempeño de sus técnicos?

c. El rango intercuartílico (RIC = $Q_3 - Q_1$) muestra el intervalo donde se concentra la mayoría de los tiempos. ¿Cómo ayuda este valor a la empresa a planificar y mejorar la atención al cliente?

2. Observa los diagramas de caja: el primero muestra la distancia recorrida (km) por niños y adultos en una actividad deportiva; y el segundo, las puntuaciones de estudiantes en una evaluación. Reflexiona y responde.





a. Observa la posición de la mediana dentro de cada caja. ¿Está centrada o desplazada hacia un extremo? ¿Qué nos indica esto sobre la distribución de los datos?

b. Compara la dispersión entre cuartiles de cada grupo. ¿Cuál grupo presenta menor dispersión y, por lo tanto, resultados más homogéneos?

c. ¿Qué conclusiones puedes sacar sobre el rendimiento o desempeño de las personas o grupos de personas comparadas?

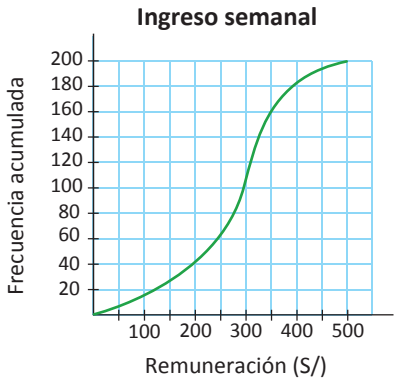
d. ¿Cómo cambiarían tus interpretaciones si alguno de los valores extremos (mínimo o máximo) de un grupo se modificara?

3. Un grupo de 200 personas fue encuestado para conocer cuánto ganaban semanalmente. Los resultados se representaron en la gráfica.

a. ¿Qué información nos permite conocer la representación sobre la distribución de los ingresos?

b. ¿En qué tramo de ingresos parece agruparse la mayoría de personas? ¿Qué parte de la curva te ayuda a justificar tu idea?

c. Una estudiante afirma: "La mayoría de las personas gana entre S/100 y S/200, porque ahí la curva es más empinada". ¿Estás de acuerdo con su afirmación? Indica qué elementos de la gráfica te permiten justificar tu respuesta.



¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, tres estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
El rango intercuartílico se puede hallar solo con la ojiva sin necesidad de calcular todas las frecuencias.	Si dos grupos tienen la misma mediana, necesariamente tienen una distribución similar.	Si la pendiente de la ojiva es pronunciada en un tramo, significa que en ese intervalo se concentra un mayor número de personas.

a. ¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

b. Justifica tu posición a partir de lo trabajado en las actividades anteriores.

c. ¿Qué parte del gráfico te ayuda a justificar tu respuesta?

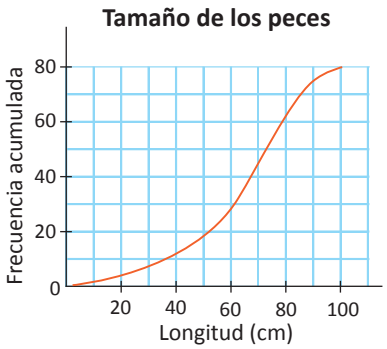
Evalúa tus progresos

- Establece relaciones de orden y posición en la distribución de datos mediante el diagrama de caja y la ojiva.
- Expresa tu comprensión del cuartil, decil, percentil y RIC como, por ejemplo, al dividir la población en cuatro partes.
- Emplea procedimientos referidos a la tabla de frecuencias, la ojiva y el diagrama de caja para ubicar los cuartiles y hallar el RIC al medir la dispersión.
- Argumenta tendencias de concentración o dispersión, y evalúa la homogeneidad del conjunto de datos.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

En una piscigranja, se analizan las longitudes (en cm) de los peces en uno de sus estanques. El siguiente diagrama de frecuencia acumulada muestra un resumen de los datos:



a. Según la gráfica, ¿cuántos peces hay en la muestra?, ¿qué indicios visuales te permiten afirmarlo?

b. Estima la longitud mediana de los peces. ¿Qué características observas en la gráfica que justifican tu estimación?

c. Calcula el rango intercuartílico. ¿Qué te dice este valor sobre la variedad de longitudes? ¿Crees que los peces tienen tamaños parecidos o muy distintos? Explica tu opinión.

Tu propósito de aprendizaje

Establece relaciones entre dos variables y emplea diagramas de dispersión al resolver una situación, comunica si existe correlación (positiva, negativa o nula) y analiza visualmente su fuerza y valores atípicos. Argumenta si una variable influye en otra, y evalúa la validez de las predicciones basadas en la recta de regresión.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Aporta ideas innovadoras para el acopio y reciclaje de botellas para el cuidado del planeta.
- Organiza la intervención brindando tiempos suficientes para la participación de todos.

Pensamos y actuamos

1. Completa la tabla analizando cada situación.

Situación	¿Hay correlación? (Sí o no)	Justificación
Número de libros leídos y puntaje en comprensión lectora		
Horas de sueño por noche y nivel de concentración en clases		
Estatura de una persona y talla de pantalón		
Antigüedad de un vehículo y costo de mantenimiento mensual		
Número de estudiantes por aula y promedio del aula en prueba nacional		
Tamaño de una muestra y margen de error en una encuesta		
Longitud de un lado de un cuadrado y su área		
Número de goles en una temporada y posición en la tabla		

2. Analiza los gráficos A, B, C y D. Cada uno representa una correlación distinta.

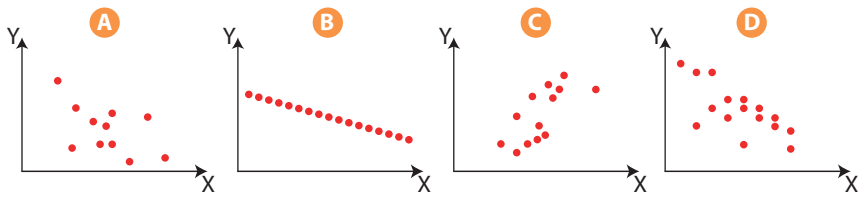
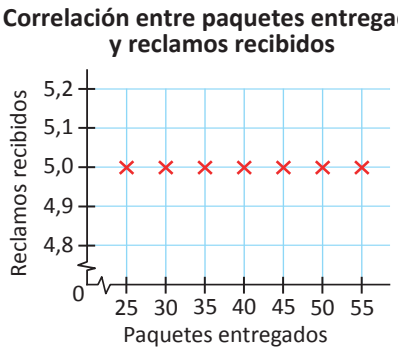


Gráfico	¿Tipo de correlación? (Positiva, negativa o nula)	Valor aproximado de *r*	Justificación de la elección del valor de *r*
A			
B			
C			
D			

Nota: Si consideras que uno de los gráficos no corresponde a ninguno de los valores que conoces, explica por qué.

3. Una empresa de reparto registró cuántos paquetes entregó por día y cuántas llamadas de reclamo recibió ese mismo día. Por eso, algunos creen que si mañana se entregan 60 paquetes, también habrá cinco reclamos.



a. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?, ¿por qué?

b. ¿Qué sentido tendría representar gráficamente una recta con estos datos?, ¿sería útil para realizar predicciones?

c. ¿Crees que es posible hacer predicciones en este caso? ¿Qué se necesita para que una predicción sea confiable?

¿Qué construimos?

Luego de trabajar las actividades, dos estudiantes comparten sus ideas.

Estudiante 1	Estudiante 2
Como los puntos están alineados, aunque sean horizontales, el valor de r debería ser alto porque hay poco error de predicción.	Si los valores de y en la recta no cambian, entonces $r = 0$; es decir, no hay correlación estadística entre x e y.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que representan la distribución conjunta de los datos mediante un diagrama de dispersión.
- Interpreta la fuerza y la dirección de la correlación de dos variables a partir de la forma del diagrama de dispersión en una situación.
- Emplea procedimientos para obtener la tendencia de los puntos y halla el tipo de correlación (positiva, negativa o nula).
- Argumenta que la correlación no implica causalidad, y evalúa si la relación es suficiente para realizar predicciones confiables en el contexto analizado.

Profundizamos

Para la resolución del siguiente problema, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

Una bióloga estudia la correlación entre la altitud y el número de especies de plantas en parcelas de 100 m². La tabla muestra cuántas especies se encontraron a distintas alturas (sobre el nivel del mar).

Altura (metros)	0	100	200	450	500	700	900	1000
N.° de especies	1	2	5	8	8	10	12	13

a. Representa los datos en un diagrama de dispersión (ejes rotulados).

b. ¿Cómo describirías la correlación entre la altura y las especies?, ¿es lineal?, ¿es útil para predecir?

c. Si a 1100 m se hallan 15 especies, ¿este dato confirma o contradice el patrón observado?, ¿por qué?

FORMALIZAMOS



Analiza la lógica de los ejemplos, interpreta representaciones, dialoga y reflexiona para dar sentido a las ideas matemáticas en tus desafíos.

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Situación: Soluciones que coinciden

Durante una clase, un docente pidió a sus estudiantes completar tablas de valores (como las mostradas) para comparar dos relaciones lineales; luego, preguntó: "Si dos ecuaciones comparten los mismos pares ordenados $(x; y)$, ¿qué se puede concluir si coinciden en un solo punto, en todos los puntos o en ninguno?

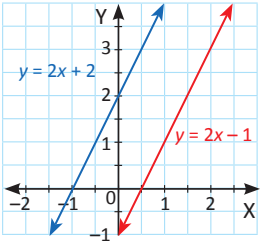
x	$y = 2x - 1$	$y = 2x + 2$	Observación
0	$2(0) - 1 = -1$	$2(0) + 2 = 2$	No coinciden.
1	$2(1) - 1 = 1$	$2(1) + 2 = 4$	No coinciden.
2	$2(2) - 1 = 3$	$2(2) + 2 = 6$	No coinciden.
3	$2(3) - 1 = 5$	$2(3) + 2 = 8$	No coinciden.
4	$2(4) - 1 = 7$	$2(4) + 2 = 10$	No coinciden.

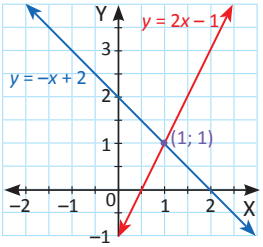
x	$y = 2x - 1$	$y = -x + 2$	Observación
0	$2(0) - 1 = -1$	$-(0) + 2 = 2$	No coinciden.
1	$2(1) - 1 = 1$	$-(1) + 2 = 1$	Coinciden.
2	$2(2) - 1 = 3$	$-(2) + 2 = 0$	No coinciden.
3	$2(3) - 1 = 5$	$-(3) + 2 = -1$	No coinciden.
4	$2(4) - 1 = 7$	$-(4) + 2 = -2$	No coinciden.

Al completar las tablas, observamos lo siguiente:

- En la primera comparación, ambas ecuaciones tienen la misma pendiente ($m = 2$), pero distintas ordenadas al origen. Esto significa que nunca se intersecan porque son rectas paralelas. Por tanto, no existe solución para el sistema de ecuaciones.
- En la segunda comparación, ambas ecuaciones coinciden en el punto (1; 1). Esto indica que se intersecan en un solo punto.

Por tanto, en un sistema de dos ecuaciones, se pueden presentar una solución, ninguna o infinitas soluciones (cuando las dos ecuaciones representan la misma recta).

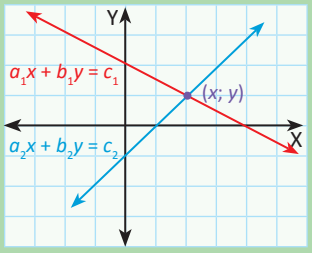




A partir de lo trabajado, podemos afirmar que un **sistema de ecuaciones lineales de dos incógnitas** es un conjunto de dos ecuaciones lineales que contienen las mismas incógnitas x e y, y se presenta en forma general:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

donde a_1, a_2, b_1, b_2 son coeficientes; c_1, c_2 son términos independientes, todos pertenecientes a $\mathbb{R}$ y x e y son las incógnitas.



Una solución de un sistema es un par ordenado $(x; y)$ que satisface simultáneamente las dos ecuaciones.

¿Sabías que...?

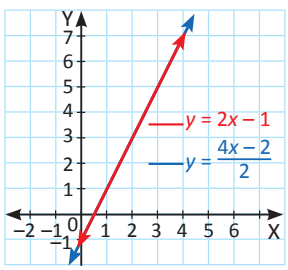
Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para representar y resolver problemas sobre la reforestación y el uso sostenible del suelo, como equilibrar áreas cultivadas y zonas forestales. Con ello, se pueden tomar decisiones informadas, analizar recursos limitados y promover el cuidado responsable de los ecosistemas y la biodiversidad desde la ciudadanía.

Ten en cuenta

Algunas ecuaciones tienen infinitas soluciones porque son equivalentes (una es múltiplo o simplificación de la otra).

x	$y = 2x - 1$	$y = \frac{4x - 2}{2}$
0	−1	−1
1	1	1
2	3	3
3	5	5
4	7	7
⋮	⋮	⋮

Gráficamente, las rectas se superponen.



Métodos de resolución: sustitución, igualación, reducción y gráfico

Situación: Empaque de espárragos

Una empresa debe empacar 400 cajas de espárragos para exportar a EE. UU. y Europa sin superar un límite de 2000 kg. Cada caja con destino a EE. UU. pesa 4 kg, y para Europa, 5,5 kg. El equipo propone algunas combinaciones posibles. ¿Cuál de ellas permite aprovechar al máximo el peso sin exceder el límite?

Cajas para EE. UU. (4 kg)	Cajas para Europa (5,5 kg)
150	250
140	260
135	265
133	267
130	270

Todas las combinaciones propuestas suman 400 cajas. Analiza los datos de la siguiente tabla para verificar si alguna combinación sobrepasa los 2000 kg o no utiliza todo el peso disponible.

Cajas para EE. UU. (4 kg)	Cajas para Europa (5,5 kg)	Total de cajas	Peso total (kg)
150	250	400	150(4) + 250(5,5) = 1975
140	260	400	140(4) + 260(5,5) = 1990
135	265	400	135(4) + 265(5,5) = 1997,5
134	266	400	134(4) + 266(5,5) = 1999
133	267	400	133(4) + 267(5,5) = 2000,5
130	270	400	130(4) + 270(5,5) = 2005

Solo una opción cumple ambas condiciones: 134 cajas de 4 kg (EE. UU.) y 266 cajas de 5,5 kg (Europa). Esta combinación optimiza el uso del peso disponible y respeta el total de cajas.

Este tipo de problema puede resolverse con un sistema de ecuaciones lineales, que permite hallar la combinación óptima sin probar diversas opciones.

La experiencia anterior permite reconocer que existen distintos métodos para resolver un sistema de ecuaciones con dos incógnitas:

a. **Método de igualación.** Se despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones y se igualan. Después se resuelve la ecuación resultante y se reemplaza el valor hallado en cualquiera de las ecuaciones originales. Finalmente, se verifica la solución del sistema.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ 2x + 3y = 13 \end{cases}$

Paso 1: Despejamos y en ambas ecuaciones.

De la primera ecuación

$3x + 2y = 12$

$2y = 12 - 3x$

$y = \dfrac{12 - 3x}{2}$

De la segunda ecuación

$2x + 3y = 13$

$3y = 13 - 2x$

$y = \dfrac{13 - 2x}{3}$

Paso 2: Igualamos ambas expresiones.

$\dfrac{12 - 3x}{2} = \dfrac{13 - 2x}{3}$

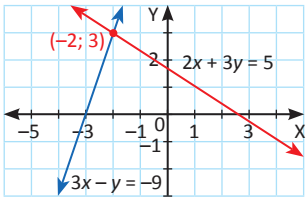
$36 - 9x = 26 - 4x$

$10 = 5x \Rightarrow x = 2$

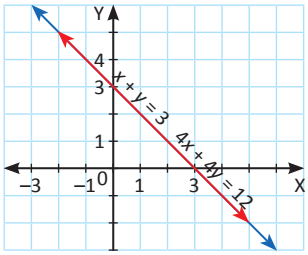
Recuerda

Tipos de sistemas de ecuaciones

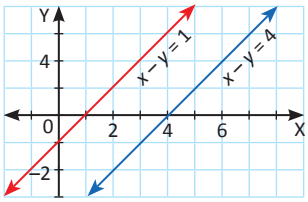
Sistema compatible determinado. Solución única, rectas secantes.



Sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones, rectas coincidentes.



Sistema incompatible. No tiene solución, rectas paralelas.



TIC

Recuerda

Métodos de solución

Resuelve el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$$

Por sustitución, despejamos una variable.

$y = 5 - x$

Sustituimos en la otra ecuación.

$2x - (5 - x) = 1$

$3x - 5 = 1$

$3x = 6 \Rightarrow x = 2$

Resolvemos la ecuación y hallamos el valor de la otra incógnita.

$x + y = 5$

$2 + y = 5 \Rightarrow y = 3$

La solución de un sistema de ecuaciones se enuncia como par ordenado C. S. = {(2; 3)}.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre situaciones que involucran cantidades desconocidas, representándolas mediante un sistema de ecuaciones lineales.
- Expresa tu comprensión del sistema de ecuaciones e interpreta el significado de la solución $(x; y)$ en el contexto del problema.
- Emplea estrategias de resolución (tabulación, representación gráfica, sustitución, igualación) para hallar la solución del sistema identificando el punto de intersección.
- Justifica la validez de la solución y evalúa si satisfacen simultáneamente ambas ecuaciones planteadas en la situación.

Paso 3: Sustituimos x en cualquiera de las ecuaciones.

$3x + 2y = 12 \Rightarrow 3(2) + 2y = 12$

$2y = 6 \Rightarrow y = 3 \therefore$ C. S. = {(2; 3)}

Así, el sistema tiene como solución el par ordenado {(2; 3)}.

b. Método gráfico. Se representan gráficamente ambas ecuaciones. El punto de intersección es la solución del sistema.

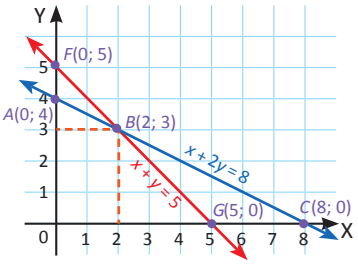
Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + 2y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$

Paso 1: Tabulamos algunos valores de ambas ecuaciones, como se muestra a continuación:

x	$y = \frac{8 - x}{2}$	Par ordenado	$y = 5 - x$	Par ordenado	¿Son iguales los pares ordenados?
0	4	(0; 4)	5	(0; 5)	No
1	3,5	(1; 3,5)	4	(1; 4)	No
2	3	(2; 3)	3	(2; 3)	Sí
3	2,5	(3; 2,5)	2	(3; 2)	No
4	2	(4; 2)	1	(4; 1)	No
5	1,5	(5; 1,5)	0	(5; 0)	No
6	1	(6; 1)	–1	(6; –1)	No
8	0	(8; 0)	–3	(8; –3)	No

Paso 2: Graficamos ambas ecuaciones. El punto donde se intersecan representa la solución del sistema.

En la gráfica se observa que las rectas se intersecan en el punto de coordenadas (2; 3). Por lo tanto, la solución es C. S. = {(2; 3)}.



c. Método de eliminación o reducción. Consiste en eliminar una incógnita sumando o restando ambas ecuaciones. Sus coeficientes deben ser iguales o se busca igualarlos multiplicando o dividiendo por una constante en ambos miembros de una ecuación. Esto simplifica el sistema para resolver una ecuación con una sola variable.

Ejemplo: Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 2x + 3y = 16 & \text{(I)} \\ 4x - y = 18 & \text{(II)} \end{cases}$

Paso 1: Igualamos los coeficientes de y. Multiplicamos (II) por 3.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 4x - y = 18 \quad (\times 3) \end{cases}$$

Paso 2: Sumamos las ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 12x - 3y = 54 \end{cases}$$

$14x = 70 \Rightarrow x = 5$

Paso 3: Sustituimos x en (I).

$2(5) + 3y = 16$

$3y = 6 \Rightarrow y = 2$

Por lo tanto, la solución es el par ordenado (5; 2), perteneciente al conjunto solución.

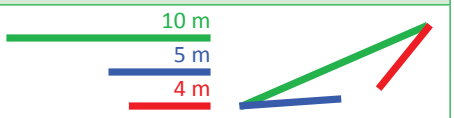
FORMAS BIDIMENSIONALES

Triángulos y cuadriláteros

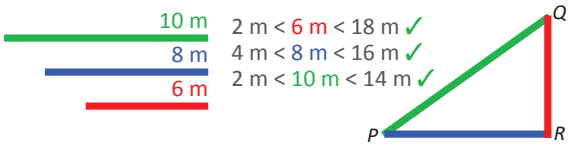
Situación: Cerca para un terreno

Un jardinero quiere cercar un jardín que tiene forma de triángulo. Tiene tres rollos de alambre que miden 4 m, 5 m y 10 m. Si no quiere cortar ninguno de los rollos, ¿podrá usarlos para cercar el terreno? Justifica tu respuesta.

Al verificar si es posible formar un triángulo con esas medidas, notamos que con cada uno de los lados se cumple lo siguiente:

Verificación de los lados del triángulo	¿Se formará el triángulo?
10 m – 5 m < 4 m < 10 m + 5 m 5 m < 4 m < 15 m ⇒ 5 < 4 (falso)	 De lo observado, concluimos que el triángulo no se puede construir o no existe; por tanto, no se podría cercar.
10 m – 4 m < 5 m < 10 m + 4 m 6 m < 5 m < 14 m ⇒ 6 < 5 (falso)	
5 m – 4 m < 10 m < 5 m + 4 m 1 m < 10 m < 9 m ⇒ 10 < 9 (falso)	

Ahora, hagamos el mismo análisis con rollos de alambre de 6; 8 y 10 metros.

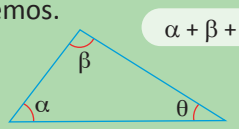


En este caso, sí es posible construir el triángulo; por tanto, se podría cercar.

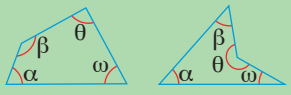
De lo analizado, concluimos que un triángulo existe si la diferencia entre dos lados es menor que el tercer lado y su suma es mayor que ese mismo lado.

De acuerdo con lo analizado, abordaremos los triángulos y los cuadriláteros.

Un **triángulo** es una figura geométrica plana, cerrada y poligonal, formada por tres segmentos de recta que intersecan de dos en dos en sus extremos.



Un **cuadrilátero** es el polígono de cuatro lados, donde cada par de lados consecutivos se une en un vértice formando un ángulo.

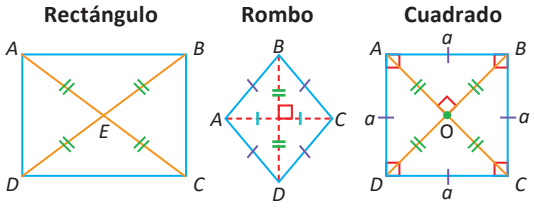


Situación: Identificación de cuadriláteros

Dos estudiantes observan algunos cuadriláteros y sus diagonales. Uno de ellos dice: "Si las diagonales se bisecan y son perpendiculares, el cuadrilátero es un cuadrado". ¿Es correcta esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Aunque en un rectángulo las diagonales se bisecan, no lo hacen de forma perpendicular.

En cambio, tanto el cuadrado como el rombo cumplen con la condición de que sus diagonales se bisecan perpendicularmente.



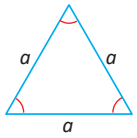
Sin embargo, el cuadrado se diferencia porque sus cuatro ángulos son rectos; por ello, la afirmación no es completamente correcta.

Recuerda

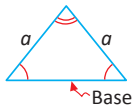
Clasificación de los triángulos

Según sus lados

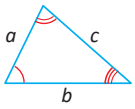
- **Equilátero:** tres lados y ángulos iguales (60°).



- **Isósceles:** dos lados y dos ángulos iguales.



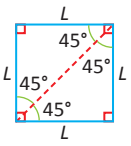
- **Escaleno:** todos los lados y ángulos tienen diferentes medidas.



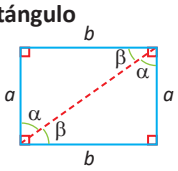
Ten en cuenta

Clasificación de los cuadriláteros

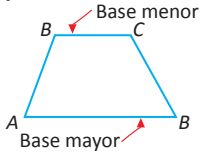
- **Cuadrado**



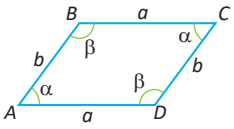
- **Rectángulo**



- **Trapecio**



- **Paralelogramo**



Ten en cuenta

Clasificación de triángulos por inclusión y exclusión

Tipo de clasificación	Relación (inclusión o exclusión)
Por inclusión	El triángulo **equilátero es un caso particular del isósceles**, pues tiene al menos dos lados iguales. Por tanto, un triángulo equilátero también es isósceles, pero no todos los isósceles son equiláteros.
	Los triángulos **rectángulos y obtusángulos** se incluyen dentro de los **oblicuángulos**, pues no son acutángulos. Por tanto, todo triángulo no acutángulo es oblicuángulo.
Por exclusión	Los triángulos **se excluyen entre sí**, si se considera el número exacto de lados iguales. Por tanto, un triángulo no puede ser equilátero e isósceles a la vez.
	Los triángulos **se excluyen entre sí**, ya que solo pueden tener **un tipo dominante de ángulo**. Por tanto, si un triángulo tiene un ángulo recto, no puede tener uno obtuso.

Practica valores

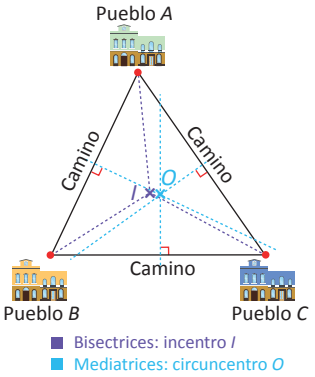
- Plantea actividades para reconocer la importancia del uso adecuado de los recursos.
- Participa en decisiones referidas a la equidad y la igualdad de condiciones.

Triángulos: líneas y puntos notables

Situación: Ubicación de una torre de señal

Tres pueblos forman un triángulo. Se quiere ubicar una torre de señal en un punto estratégico.

- Opción 1: Un punto equidistante a los tres pueblos busca que la señal llegue igual a todos.
- Opción 2: Un punto equidistante a las rutas que los une (lados del triángulo) busca cobertura uniforme en los caminos.



¿Dónde conviene instalar la torre para optimizar la cobertura: en el punto equidistante a los pueblos o al de igual distancia a las rutas? Justifica tu respuesta.

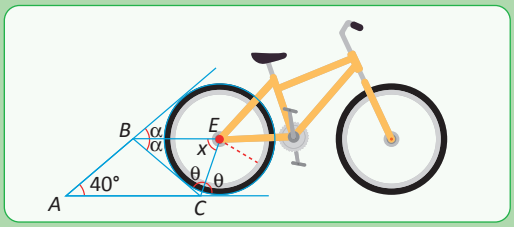
Analizamos cada opción.

Opción 1	Opción 2
• Es el circuncentro (intersección de mediatrices). • Puede estar dentro o fuera del triángulo. • Mejora la señal en los pueblos, no necesariamente en las rutas.	• Es el incentro (intersección de bisectrices). • Siempre está dentro del triángulo. • Mejora la señal en rutas, pero varía la distancia a cada pueblo.

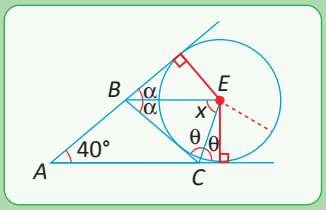
Por lo tanto, si se prioriza la cobertura en los pueblos, se elige el circuncentro; y si se priorizan rutas, el incentro.

Observando el ejemplo anterior, notamos que las **líneas notables de un triángulo** (mediana, bisectriz, mediatriz y altura) son los segmentos o rectas trazados desde los vértices o lados de un triángulo, que poseen propiedades geométricas especiales y que concurren en puntos característicos del triángulo denominados centros notables.

Por ejemplo, en la imagen se muestra la llanta apoyada en tres superficies.



Como E es el centro de la circunferencia exinscrita (tangente a un lado del triángulo y a las prolongaciones de los otros dos), entonces E es el excentro del triángulo ABC, tal como se observa en el gráfico.



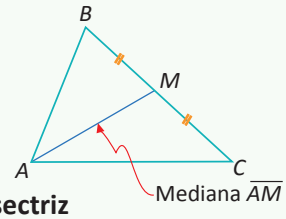
Entonces, BE y CE son bisectrices de los ángulos exteriores en B y C. Por la propiedad del ángulo formado por dos bisectrices exteriores, tenemos que

$$x = 90° - \frac{40°}{2} \Rightarrow x = 70°.$$

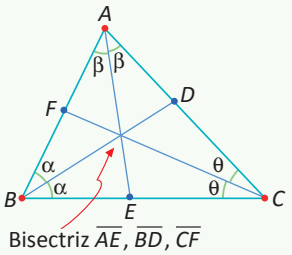
A continuación, se muestran las líneas y puntos notables en el triángulo.

Representación gráfica de las líneas notables

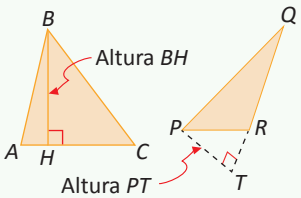
- **Mediana**



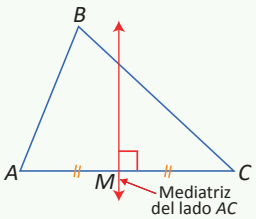
- **Bisectriz**



- **Altura**

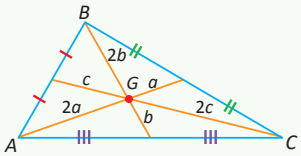


- **Mediatriz**

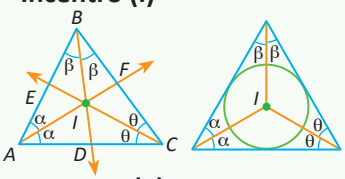


Representación gráfica de los puntos notables

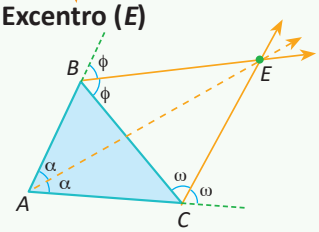
- **Baricentro (*G*)**



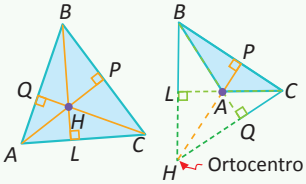
- **Incentro (*I*)**



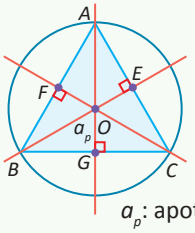
- **Excentro (*E*)**



- **Ortocentro (*H*)**



- **Circuncentro (*O*)**

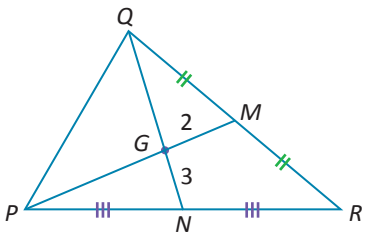


a_p: apotema del polígono

Ejemplo de aplicación

En un triángulo *PQR*, se trazan las medianas $\overline{PM}$ y $\overline{QN}$, cortándose en el punto *G*. Calcula la suma de $\overline{PG} + \overline{QG}$ sabiendo que $m\overline{GM} = 2$ y $m\overline{GN} = 3$.

Graficamos.



Por propiedad del baricentro, el baricentro divide cada mediana en razón 2:1. Es decir, la distancia del vértice al baricentro es el doble que del baricentro al lado opuesto.

$m\overline{PG} = 2 \times m\overline{GM} = 2 \times 2 = 4$

$m\overline{QG} = 2 \times m\overline{GN} = 2 \times 3 = 6$

$m\overline{PG} + m\overline{QG} = 10$

Ten en cuenta

Clasificación de cuadriláteros por inclusión y exclusión

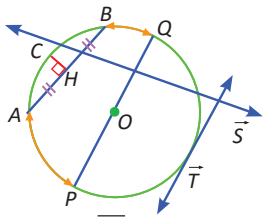
Tipo de clasificación	Relación (inclusión o exclusión)
Por inclusión	El cuadrado es un caso particular del rectángulo, pues tiene sus cuatro lados y ángulos iguales. Por tanto, todo cuadrado es rectángulo, pero no todo rectángulo es cuadrado.
	El rectángulo y el rombo son casos particulares del paralelogramo, porque en ambos los pares de lados opuestos son paralelos. Por lo tanto, todo rectángulo y todo rombo son paralelogramos.
Por exclusión	Los tipos de cuadrilátero se **excluyen entre sí** cuando se consideran sus propiedades específicas. Por tanto, un trapecio no puede ser paralelogramo, porque solo tiene un par de lados paralelos.
	Los **paralelogramos** también se distinguen entre sí: un rombo no puede ser **rectángulo**, ya que no tiene ángulos rectos; y un **rectángulo** no puede ser **rombo**, porque no tiene todos los lados iguales.

¿Sabías que...?

Los mandalas y los vitrales se diseñan usando circunferencias con figuras inscritas y circunscritas. Cada forma refleja armonía visual entre arte y geometría.

Recuerda

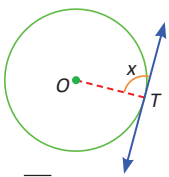
Elementos de la circunferencia



- Cuerda: $\overline{AB}$
- Diámetro: $\overline{PQ}$
- Radios: $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$
- Tangente: $\overleftrightarrow{T}$
- Secante: $\overleftrightarrow{S}$
- Flecha: $\overline{CH}$
- Arcos: $\overset{\frown}{BQ}$, $\overset{\frown}{AP}$

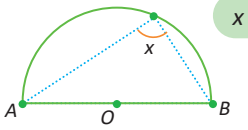
Propiedades

- Si O es centro y T es punto de tangencia.



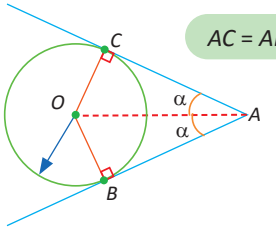
$x = 90°$

- Si $\overline{AB}$ es diámetro.



$x = 90°$

- Si $\overline{OA}$ es bisectriz.

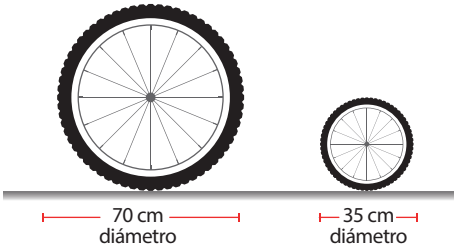


$AC = AB$

Circunferencia: propiedades

Situación: Cambio de llanta: ¿misma distancia?

Luis quiere cambiar la llanta de su bicicleta. La actual mide 70 cm de diámetro; la nueva, 35 cm. Él afirma: "Dos vueltas de la pequeña equivalen a una de la grande". ¿Es correcta la afirmación? Justifica tu respuesta.



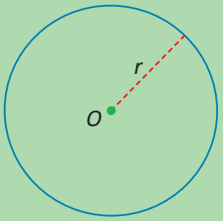
Hallamos el perímetro de cada una de las llantas de la bicicleta.

Longitud de la circunferencia: perímetro (P) = $2\pi r$

- En la llanta grande: $P = 2\pi\ (35) = 70\pi$ cm
- En la llanta pequeña: $P = 2\pi\ (17{,}5) = 35\pi$ cm

En consecuencia, dos vueltas con la llanta pequeña es $2(35\pi) = 70\pi$ cm; es decir, recorren la misma distancia que una vuelta de la grande. Por lo tanto, la afirmación es correcta.

De lo observado en la situación anterior, concluimos que una **circunferencia** es el conjunto de todos los puntos del plano que están a una misma distancia de un punto llamado centro. Posee diversos elementos y goza de propiedades como las mostradas en la caja Recuerda.



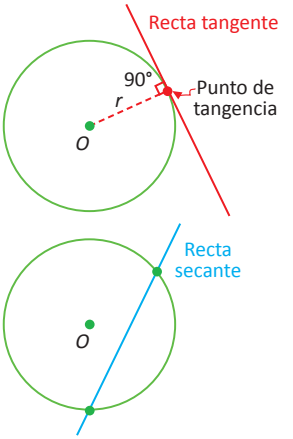
r: radio
O: centro

Situación: Tangente que atraviesa

Carla dibuja una recta tangente a una circunferencia y asegura esto: "La tangente corta a la circunferencia en dos puntos porque es una línea exterior". ¿Estás de acuerdo con lo que dice? Sustenta tu afirmación.

Sabemos lo siguiente:

- Una tangente toca la circunferencia en un solo punto, llamado **punto de tangencia**; además, este es perpendicular al radio. Por lo tanto, se pueden trazar infinitas rectas tangentes a la circunferencia.
- La recta que corta por dos puntos a la circuenferencia se llama recta secante; por ende, en una circunferencia se pueden trazar infinitas rectas secantes.



Finalmente, podemos afirmar que Carla ha confundido una recta tangente con una secante, y que el término "línea exterior" se usa para la recta que no interseca la circunferencia.

Cuadriláteros inscritos y circunscritos en una circunferencia

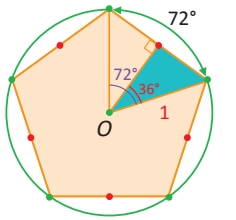
Situación: Trazo de una estrella

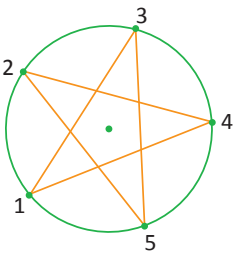
Un estudiante desea diseñar y trazar una estrella de cinco puntas, basada en un pentágono regular e inscrita en un disco de madera.

¿Qué procedimiento geométrico debe seguir para localizar los vértices sobre la circunferencia y, posteriormente, realizar el corte de la pieza?

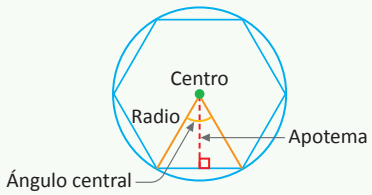
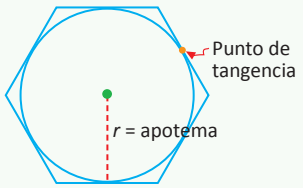
Para lograrlo, seguimos estos pasos:

- Paso 1: Trazamos la circunferencia y marcamos su centro O.
- Paso 2: Dividimos la circunferencia en cinco arcos iguales de 72° $\left(\frac{360°}{5} = 72°\right)$. Recordemos que esta medida es igual a la medida del ángulo central en la circunferencia (observemos el triángulo formado).
- Paso 3: Los cortes de esos cinco puntos con la circunferencia son los vértices del pentágono. Enumeramos del 1 al 5.
- Paso 4: Para formar la estrella, unimos en el orden 1-3-5-2-4-1.





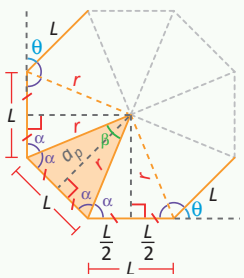
El problema resuelto ilustra que los **polígonos regulares** son llamados figuras fundamentales porque presentan simetría y propiedades métricas bien definidas. Cuando estos polígonos se relacionan con una circunferencia, pueden clasificarse en dos tipos:

Inscritos	Circunscritos
Todos sus vértices pertenecen a la circunferencia (circunscrita).	Todos sus lados son tangentes a la circunferencia (inscrita).
	

Para un polígono regular de n lados, se cumple lo siguiente:

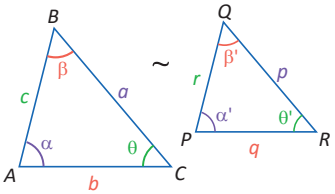
- Todo ángulo central β mide $\frac{360°}{n}$.
- Todo ángulo interno α mide $\frac{(n-2)180°}{n}$.
- Todo ángulo externo θ mide $\frac{360°}{n}$.
- Apotema (a_p): para polígono inscrito $a_p = r \cdot \cos\left(\frac{180°}{n}\right)$.

Polígono regular



Recuerda

Dos **triángulos son semejantes** si sus ángulos correspondientes son iguales y sus lados homólogos opuestos son proporcionales.

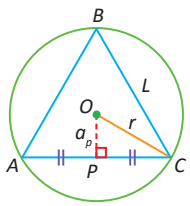


Si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\theta = \theta'$ y sus lados cumplen $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r} = k$, entonces $\triangle ABC \sim \triangle PQR$, donde $k > 0$ es la constante de semejanza.

Recuerda

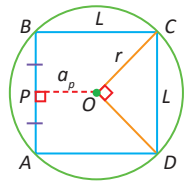
Polígonos regulares inscritos en una circunferencia

a. Triángulo equilátero



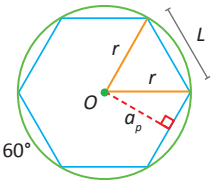
$L = r\sqrt{3}$;
$a_p = \frac{r}{2}$

b. Cuadrado



$L = r\sqrt{2}$;
$a_p = \frac{r\sqrt{2}}{2}$

c. Hexágono regular



$L = r$;
$a_p = \frac{r\sqrt{3}}{2}$

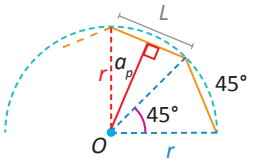
donde

L: lado del polígono

a_p: apotema del polígono

Ten en cuenta

Polígono regular inscrito: octógono regular



$L = r\sqrt{2-\sqrt{2}}$; $a_p = \dfrac{r\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

donde

L: lado del polígono

a_p: apotema del polígono

Evalúa tus progresos

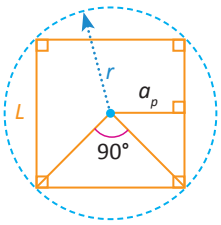
- Establece relaciones al resolver un problema que involucra medidas de formas bidimensionales conocidos.
- Expresa el perímetro y área de formas bidimensionales como polígonos y circunferencia e interpreta los resultados en unidades de medida.
- Emplea procedimientos para determinar el área y perímetro de formas bidimensionales como polígonos y circunferencia y su relaciones.
- Argumenta con ejemplos la relación entre perímetros y áreas de las figuras bidimensionales como polígono y cicunferencia.

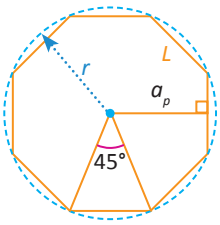
Situación: Diseño de un vitral decorativo

Juan y Larisa diseñan una ventana circular en la que se inscribe un octógono regular, como parte de un vitral decorativo. Durante la discusión, uno de ellos propone aplicar el mismo procedimiento que se utilizaría para inscribir un cuadrado en la circunferencia.

¿Es válida esta estrategia? ¿Qué ajustes o consideraciones adicionales deben tomarse en cuenta para asegurar un diseño correcto?

Aunque el cuadrado y el octógono pueden inscribirse en una circunferencia, no se construyen de igual forma, porque sus propiedades geométricas son distintas.



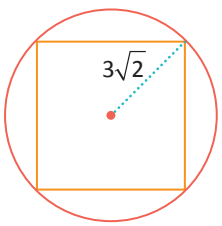


Característica \ Polígono	Cuadrado	Octógono regular
Número de lados	4	8
Ángulo central	360° ÷ 4 = 90°	360° ÷ 8 = 45°
Distribución angular	Cada vértice está separado por 90°.	Cada vértice está separado por 45°.
Triángulos que se forman	4 triángulos isósceles	8 triángulos isósceles
Uso del radio	Se trazan radios cada 90°.	Se trazan radios cada 45°.
Equidistancia	Garantizada por simetría	Garantizada por simetría
Simetría	4 ejes de simetría	8 ejes de simetría

La tabla destaca sus diferencias claves respecto al ángulo, número de lados y método de construcción. La construcción es válida; basta cambiar el ángulo de 90° a 45° y trazar radios adicionales para definir los vértices del octógono.

Situación: Diseño de una ventana circular

El diseño muestra una ventana redonda de $3\sqrt{2}$ m de radio. Un estudiante dice: "El lado del cuadrado mide $6\sqrt{2}$ m y su apotema es 3". ¿Es correcta su afirmación? Justifica con propiedades geométricas.



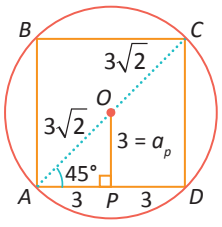
Sabemos que el radio es la mitad de la diagonal del cuadrado.

Además, en el $\triangle APO$, se cumple lo siguiente:

$m\overline{AO} = 3\sqrt{2}$, $m\overline{OP} = m\overline{AP} = 3$

Como P es punto medio de $\overline{AD}$, se tiene que la medida de $\overline{AD}$ es 6.

Por tanto, el estudiante confunde el lado con la diagonal. La apotema sí es 3, pero el lado es 6.



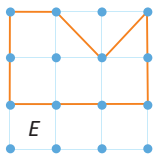
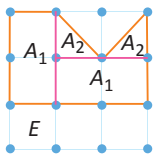
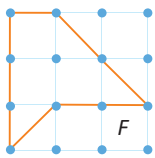
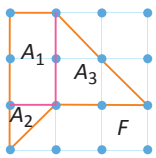
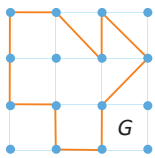
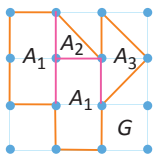
MEDIDAS DE FORMAS BIDIMENSIONALES

Polígonos irregulares: área y perímetro

Situación: Parcela agrícola con bordes irregulares

Un estudiante necesita conocer el área de cada parcela de forma irregular mostrada. ¿Cuál es el área de cada una de ellas?

Para hallar el área, descomponemos el polígono en formas conocidas, tal como se observa en el siguiente cuadro:

Polígonos irregulares	Descomposición en formas conocidas	Área (A)
		$2A_1 = 2(1 \times 2) = 4$ $2A_2 = 2\left(\frac{1 \times 1}{2}\right) = 1$ $A_T = 5\ u^2$
		$A_1 = 1 \times 2 = 2$ $A_2 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ $A_3 = \frac{2 \times 2}{2} = 2$ $A_T = 4{,}5\ u^2$
		$2A_1 = 2(1 \times 2) = 4$ $A_2 = \frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$ $A_3 = \frac{2 \times 1}{2} = 1$ $A_T = 5{,}5\ u^2$

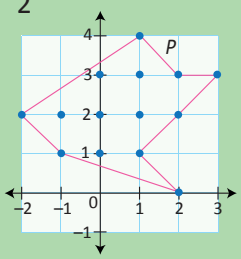
Teorema de Pick

Dado un polígono irregular, cuyos vértices se encuentran en una cuadrícula como las que se muestran. Su área A se puede calcular mediante la siguiente expresión:

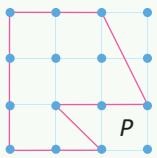
$$A = I + \frac{B}{2} - 1, \text{ donde}$$

- I: número de puntos interiores
- B: número de puntos sobre la frontera del polígono

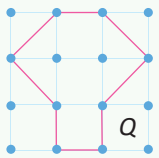
Por ejemplo, en la siguiente red poligonal, $I = 6$ y $B = 8$. Por lo tanto, $A = 6 + \frac{8}{2} - 1 = 9$.



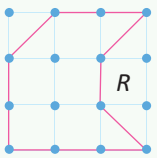
En los siguientes polígonos irregulares, determinamos su respectiva área.



$A = 2 + \frac{11}{2} - 1 = 6{,}5$



$A = 2 + \frac{8}{2} - 1 = 5$

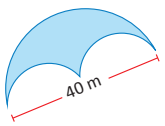


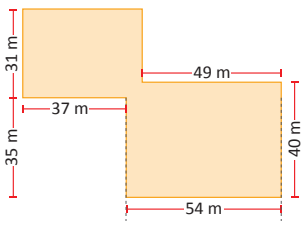
$A = 2 + \frac{11}{2} - 1 = 6{,}5$

Ten en cuenta

Una **figura compuesta** surge al unir formas geométricas, como rectángulos, triángulos o semicircunferencias, para crear diseños complejos.

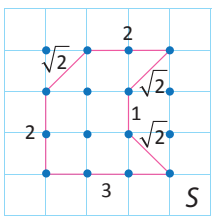
Su perímetro es la suma de los lados rectos y arcos que delimitan el contorno, recorriendo toda la línea externa de la figura; tal como se muestra en la figura curva y plana.





Recuerda

El perímetro (P) de un polígono irregular se obtiene sumando las longitudes de sus lados.



$P = 3 + 2 + 2 + 1 + 3\sqrt{2}$

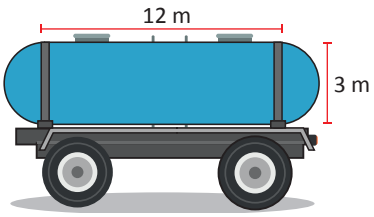
$P = 8 + 3\sqrt{2}$

MEDIDAS DE FORMAS TRIDIMENSIONALES

Sólidos compuestos: área y volumen

Situación: Volumen de un tanque

El tanque mostrado está formado por un cilindro y dos semiesferas en los extremos. Calcula el volumen y el área total del tanque.



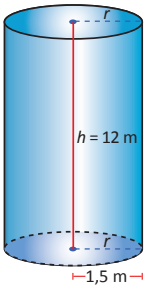
Para determinar el volumen del tanque, sumamos el volumen del cilindro y el de las dos semiesferas (que forman una esfera completa).

$V_{tanque} = V_{cilindro} + V_{esfera}$

Del gráfico, tenemos los datos del tanque.

Diámetro: $D = 3$ m $\Rightarrow$ radio: $r = 1{,}5$ m

Altura del cilindro: $h = 12$ m

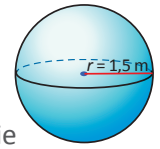


Hallamos el volumen de la esfera y el cilindro.

$V_{esfera} = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{4}{3}\pi(1{,}5)^3 = 14{,}13 \text{ m}^3$

$V_{cilindro} = \pi r^2 h = \pi(1{,}5)^2 \cdot 12 = 84{,}78 \text{ m}^3$

Entonces, $V_{tanque} = 14{,}13 + 84{,}78 = 98{,}91 \text{ m}^3$



El área total la conforman el lateral del cilindro y la superficie exterior de la esfera (las dos semiesferas).

- Área lateral del cilindro: $A_{cilindro} = 2\pi rh = 2(3{,}14)(1{,}5)(12) = 113{,}04 \text{ m}^2$
- Superficie de la esfera: $A_{esfera} = 4\pi r^2 = 4(3{,}14)(1{,}5)^2 = 28{,}26 \text{ m}^2$

Ahora, hallamos el área total: $A_{total} = 113{,}04 + 28{,}26 = 141{,}3 \text{ m}^2$

De acuerdo con lo analizado, ahora explicaremos sobre los **sólidos compuestos**.

	Descripción / ejemplo
¿Qué son?	Son cuerpos geométricos (tridimensionales) formados al combinar dos o más sólidos básicos (prismas, pirámides, cilindros, conos).
Tipos de combinación	**a. Unión:** Se suman sólidos. Ej.: cono sobre cilindro (cohete). **b. Diferencia:** Se recorta una parte. Ej.: cubo con agujero. **c. Intersección:** Es la zona común. Ej.: media esfera en un prisma.
Clasificación	**a. Aditivos:** suma de volúmenes. Ej.: torre de cubos. **b. Sustractivos:** con huecos o recortes. Ej.: bloque con récord piramidal.
¿Cómo hallar el volumen?	1. Identificamos partes simples. 2. Aplicamos fórmulas de volumen. 3. Sumamos o restamos según el caso.
Área lateral	Es la suma de las áreas de caras visibles externas.
Ejemplo	Lápiz sin goma: cuerpo = cilindro, punta = cono
Importancia	Permite modelar objetos reales y calcular medidas con precisión en contextos diversos.

¿Sabías que...?

Los sólidos compuestos calculan volúmenes y áreas para diseñar reservorios, terrazas agrícolas y espacios de reforestación. Apoya decisiones sostenibles en gestión de agua y suelo integrando ciencia y conocimiento de la ciudadanía para conservar la biodiversidad y optimizar los recursos en proyectos que restauran ecosistemas y frenan la deforestación.

Ten en cuenta

Al calcular la superficie de recubrimiento, no se incluyen las caras en contacto entre dos sólidos. Por ejemplo, la base del cilindro unida a una semiesfera no se pinta, ya que está cubierta.

Recuerda

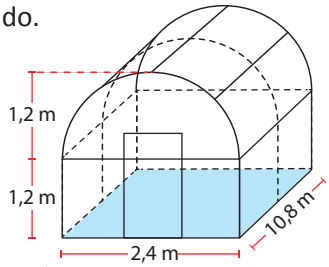
Al combinar cuerpos, como cilindros y semiesferas, se calcula el volumen y el área de cada parte por separado. Así se resuelven problemas reales, como el ensamblado de los tanques o su protección de la corrosión.

Practica valores

- Promueve la participación igualitaria escuchando todas las opiniones del equipo de trabajo.
- Apoya en actividades sobre el manejo adecuado de desechos.

En los siguientes sólidos compuestos, determinamos el volumen y el área.

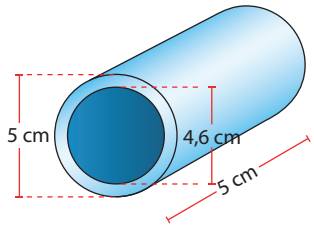
1. Halla el volumen total del invernadero mostrado.



Solución

- Datos del invernadero:
  Largo: $L = 10{,}8$ m Ancho: $A = 2{,}4$ m
  Radio del techo semicilíndrico: $r = 1{,}2$ m
  Altura de paredes: $h = 1{,}2$ m
- Volumen del prisma rectangular (paredes rectas)
  $V_{prisma} = (\text{ancho} \times L) \times h = (2{,}4 \times 10{,}8) \times 1{,}2 = 25{,}92 \times 1{,}2 = 31{,}10\ m^3$
- Volumen del semicilindro (techo)
  $V_{cilindro} = \pi r^2 L = 3{,}14(1{,}2)^2(10{,}8) = 48{,}83\ m^3$
  $V_{semicilindro} = 48{,}83/2 = 24{,}42\ m^3$
- Volumen total: $V_{prisma} + V_{semicilindro} = 31{,}10 + 24{,}42 = 55{,}52\ cm^3$

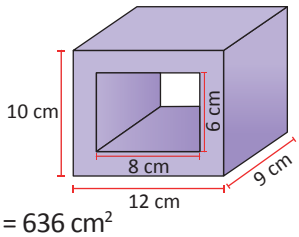
2. Halla el volumen de la pieza de forma cilíndrica hueca.



Solución

- Datos del cilindro hueco
  Radio exterior: $R = 2{,}5$ cm
  Radio interior: $r = 2{,}3$ cm
  Altura (longitud del tubo): $h = 5$ cm
- $V_{cilindro\ exterior} = 3{,}14 \times 5 \times (2{,}5)^2 = 98{,}13\ cm^3$
- $V_{cilindro\ interior} = 3{,}14 \times 5 \times (2{,}3)^2 = 83{,}05\ cm^3$
- $V_{sólido} = V_{cilindro\ exterior} - V_{cilindro\ interior} = 98{,}13 - 83{,}05 = 15{,}08\ cm^3$

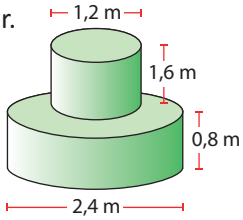
3. Se desea pintar todas las superficies visibles de la pieza mostrada. Calcula el área total a pintar.



Solución

- Prisma exterior completo
  $A_{exterior} = 2(ab + bc + ac) = 2[10(12) + 12(9) + 10(9)] = 636\ cm^2$
- Restamos la abertura en el frente y posterior.
  Cada abertura mide $8 \times 6 = 48\ cm^2$.
  Como son dos (frontal y posterior): $2 \times 48 = 96\ cm^2$
- Paredes internas del túnel: $2[8(9) + 6(9)] = 252\ cm^2$
- $A_{total} = A_{exterior} + A_{paredes\ internas} - A_{frontal\ hueca} = 636 + 252 - 96 = 792\ cm^2$

4. Se desea llenar de concreto en una zapata y columna de forma cilíndrica. Determina el volumen total de concreto a vaciar.



Solución

$V_{sólido\ superior} = \pi r^2 h = 3{,}14(0{,}6)^2(1{,}6) = 1{,}81\ cm^3$

$V_{sólido\ inferior} = \pi R^2 h = 3{,}14(1{,}2)^2(0{,}8) = 3{,}62\ cm^3$

$V_{sólido} = V_{sólido\ superior} + V_{sólido\ inferior} = 3{,}62 + 1{,}81 = 5{,}43\ cm^3$

Recuerda

Cilindro: Sólido con dos bases circulares iguales y paralelas.

Semiesfera: Mitad de una esfera.

Superficie lateral: Parte del sólido que lo rodea sin contar las bases.

Superficie total: Suma de todas las áreas exteriores visibles de un sólido.

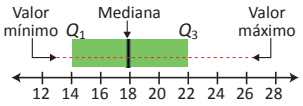
Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre las características de los sólidos compuestos (ej. tanque, invernadero) mediante el reconocimiento de sus componentes geométricos básicos (cilindro, prisma, semiesfera) y sus dimensiones (radio, altura, largo, ancho).
- Expresa con lenguaje geométrico su comprensión sobre las propiedades de los prismas, cilindros y esferas, para interpretar un problema según su contexto.
- Emplea estrategias, recursos o procedimientos para determinar el área o el volumen de formas tridimensionales compuestas sumando o restando los volúmenes parciales según el caso.
- Argumenta la elección de la estrategia para determinar el área total y volumen, basándose en la composición del sólido (unión de partes o pieza con hueco).

Ten en cuenta

El rango intercuartílico (RIC) es una medida de dispersión que indica cuánto se separan los datos del centro de una distribución. Se calcula como la diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil.

$$RIC = Q_3 - Q_1$$



Recuerda

- **Encuesta.** Técnica de recolección de datos que usa un cuestionario para obtener datos o características sobre variables específicas en una muestra.
- **Observación.** Técnica de recolección de información que registra sistemáticamente comportamientos o acciones en su entorno natural mediante una ficha de observación.
- **Tipo de preguntas**
  - Abiertas. Permiten responder libremente con palabras propias. Ejemplo: ¿Qué obras has leído en los últimos seis meses?
  - Cerradas dicotómicas. Se responden con "Sí" o "No". Ejemplo: ¿Trabajas actualmente? (Marca solo una opción). Sí ( ) No ( )
  - Cerradas de elección múltiple. Presentan varias opciones de respuesta para elegir una o más. Ejemplo: ¿Qué fruta es de tu agrado? (Marca una o varias).

    ☐ Pera ☐ Plátano ☐ Uva

MEDIDAS ESTADÍSTICAS

Medidas de localización: cuantiles

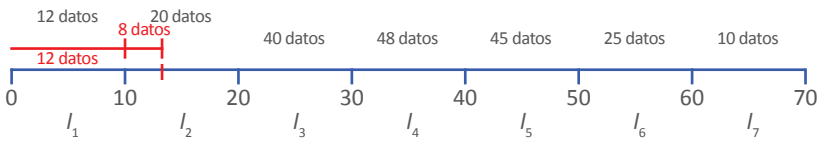
Situación: Jornada de vacunación

En una jornada de vacunación, se atendió a 200 personas. ¿Hasta qué edad se encuentran las 20 personas más jóvenes (10 % del total) según la tabla?

Intervalo de edad (años)	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
[0; 10[	12	12
[10; 20[	20	32
[20; 30[	40	72
[30; 40[	48	120
[40; 50[	45	165
[50; 60[	25	190
[60; 70]	10	200

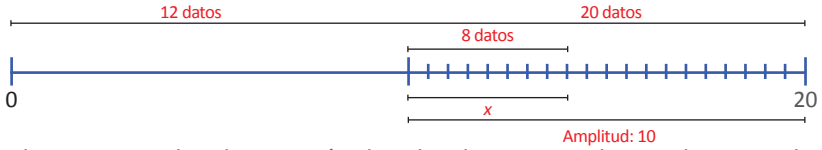
En el gráfico 1, observamos que el primer intervalo [0; 10[contiene 12 datos, y el segundo intervalo [10; 20[contiene los datos de las personas de 13 a la 32. Por tanto, el dato número 20 está en el segundo intervalo.

Gráfico 1



En el gráfico 2, el intervalo [10; 20[está dividido en 20 partes iguales (frecuencia = 20). Cada subdivisión representa una persona. El dato 20 ocupa la octava subdivisión.

Gráfico 2



Consideramos que los datos están distribuidos por igual en cada intervalo.

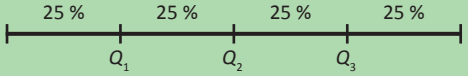
- Cada subdivisión representa $\frac{10}{20} = 0{,}5$ años.
- Ocho subdivisiones equivalen a $0{,}5 \times 8 = 4$.
- Edad estimada: $10 + 4 = 14$

Por lo tanto, las 20 personas más jóvenes tienen hasta 14 años, considerando que los datos están repartidos de forma pareja dentro del intervalo [10; 20[.

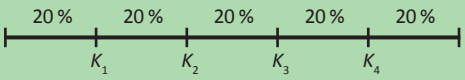
A partir de lo trabajado, podemos afirmar que las **medidas de localización**, también conocidas como medidas de tendencia no central, son indicadores estadísticos que se definen a partir de la frecuencia relativa acumulada en una distribución de datos.

Los **cuantiles** son medidas estadísticas que dividen un conjunto de datos ordenados en partes iguales. Nos permiten conocer la posición relativa de los datos. Entre ellos tenemos los siguientes:

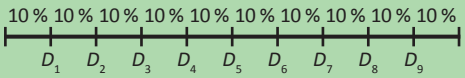
a. Cuartiles (Q). Dividen la distribución de los datos en cuatro partes iguales, es decir, 25 % cada una.



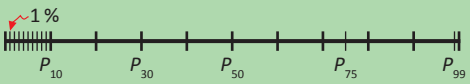
b. Quintiles (*K*). Dividen la distribución de los datos en cinco partes iguales, es decir, 20 % cada una.



c. Deciles (*D*). Dividen la distribución de los datos en diez partes iguales, es decir, 10 % cada una.



d. Percentiles (*P*). Dividen la distribución de los datos en cien partes iguales, es decir, 1 % cada una.



Situación: Comparación de resultados

Un docente pidió a sus estudiantes comparar los puntajes de lectura de jóvenes de dos regiones. Ambas tienen el percentil 25 igual a 48, pero difieren en los valores centrales y superiores.

En la región A, el percentil 50 (mediana) es 54,5 y el percentil 75 es 61; mientras que, en la región B, el percentil 50 es 59,1 y el percentil 75 es 70.

Juan propuso esto: "Sumé el percentil 25 con el percentil 75 en cada región:

Región A: 48 + 61 = 109

Región B: 48 + 70 = 118

Como 118 es mayor que 109, la región A tiene bajos resultados y necesita más apoyo". ¿Estás de acuerdo con este procedimiento? Justifica tu respuesta.

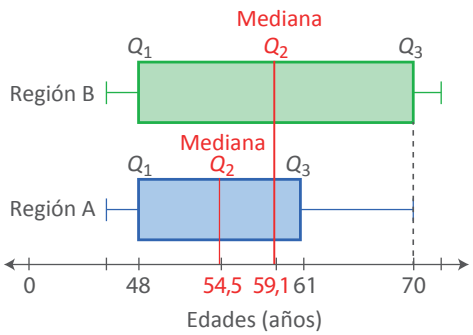
Los percentiles no se suman, porque indican posiciones en la distribución y no cantidades, entonces el procedimiento de Juan no es correcto.

La comparación debe hacerse considerando la mediana (P_{50}), que representa el valor central, y el rango intercuartílico (RIC = $P_{75} - P_{25}$), que mide la dispersión:

- En la región A: RIC = 61 – 48 = 13 y la mediana es 54,5.
- En la región B: RIC = 70 – 48 = 22 y la mediana es 59,1.

Esto significa que la región B tiene puntajes más altos y mayor variabilidad, mientras que la región A presenta valores más concentrados, tal como se presenta en el siguiente diagrama de cajas:

Comparación de puntajes de lectura por región



Por lo tanto, la región B tiene mayor variabilidad con estudiantes que alcanzan puntajes más altos. La región A está más concentrada, lo que sugiere mayor necesidad de apoyo.

Recuerda

Para encontrar un cuantil (cuartil, decil o percentil) para datos agrupados, se emplea la siguiente fórmula:

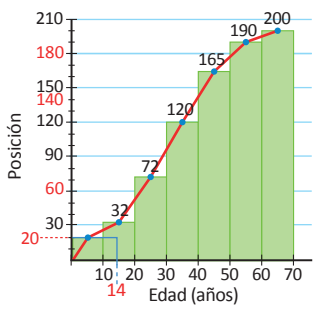
$$C_j = L_i + \left(\frac{j \cdot n}{N} - F_{i-1}\right) \cdot \frac{A}{f_i}$$

- L_i: límite inferior del intervalo que contiene el cuantil
- j: número del cuantil deseado
- n: número total de datos
- N: número de divisiones según el tipo de cuantil
- F_{i-1}: frecuencia acumulada antes del intervalo del cuantil
- f_i: frecuencia del intervalo que contiene el cuantil
- A: amplitud del intervalo

Ten en cuenta

A partir de la situación "Jornada de vacunación", una forma alternativa de representar los datos es mediante la frecuencia acumulada, la cual se puede visualizar utilizando histogramas y ojivas. En esta se observa que las 20 personas más jóvenes tienen hasta 14 años de edad.

Frecuencia acumulada de personas vacunadas



Reto matemático

Dos grupos de estudiantes tienen la misma mediana, pero uno tiene un percentil 75 mucho mayor que el otro; por eso, los grupos tienen la misma distribución. ¿Estás de acuerdo con dicha afirmación? Justifica tu respuesta con argumentos y un ejemplo que lo confirme o contradiga.

Medidas de correlación entre dos variables y diagrama de dispersión

Situación: La alimentación y la prevención de enfermedades

En un colegio se recopilaron datos de 10 estudiantes sobre lo siguiente:

- Número de veces que se enfermaron en los últimos seis meses
- Porciones diarias de frutas y verduras que consumen

¿Cómo representarías estos datos para saber si existe relación entre alimentación y enfermedades? ¿Esperas una relación directa, inversa o ninguna?, ¿por qué?

Identificamos las variables de estudio.

- *x*: porciones diarias de frutas y verduras
- *y*: número de veces que se enfermaron

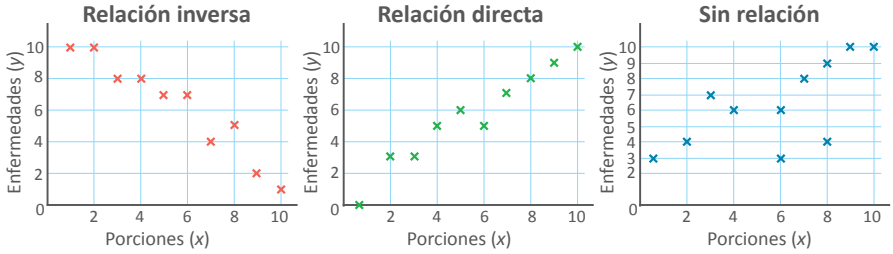
Ambas variables son cuantitativas discretas.

Hipótesis: A más frutas y verduras, menos enfermedades.

Exploración: Un gráfico de dispersión ayudará a ver si existe relación y de qué tipo es.

- Inversa: los puntos bajan.
- Directa: los puntos suben.
- Sin relación: los puntos quedan dispersos.

El gráfico confirmará o no la hipótesis.



Por tanto, representaríamos los datos en un gráfico de dispersión, donde observemos la relación entre el consumo de frutas y verduras (*x*) y las enfermedades (*y*). Espero una relación inversa, porque una alimentación saludable fortalece el sistema inmunológico y reduce las enfermedades.

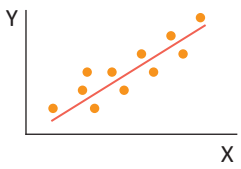
La resolución de la situación anterior evidencia que, para representar la **correlación entre dos variables**, se utilizan **diagramas de dispersión**, donde se representan pares de datos ordenados (*x*; *y*), y cada punto corresponde a un caso. Según el patrón que formen los puntos, podemos interpretar la dirección y la fuerza de la correlación entre las variables.

Dirección de correlación	Comportamiento de los puntos
Correlación directa	Nube de puntos que tienden a subir de izquierda a derecha. Por ejemplo, si en el eje X se representa la edad y en el eje Y la altura, la correlación directa se observa porque a mayor edad, mayor altura.
Correlación inversa	Nube de puntos que tienden a bajar de izquierda a derecha. Por ejemplo, si en el eje X se representa la temperatura ambiental y en el eje Y el consumo de bebidas calientes, la correlación es inversa: a mayor temperatura, menor consumo.
Sin correlación	No siguen patrón. Por ejemplo, si en el eje X se representa la cantidad de frutas en casa y en el eje Y la velocidad del internet, no hay correlación: una variable no afecta a la otra.

Recuerda

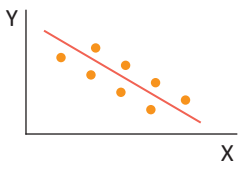
Diagrama de dispersión y tipo de correlación

Correlación directa



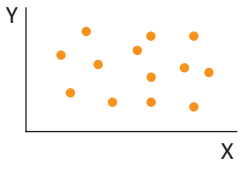
Al aumentar *x*, los valores de *y* también aumentan.

Correlación inversa



Al aumentar *x*, los valores de *y* disminuyen.

Sin correlación

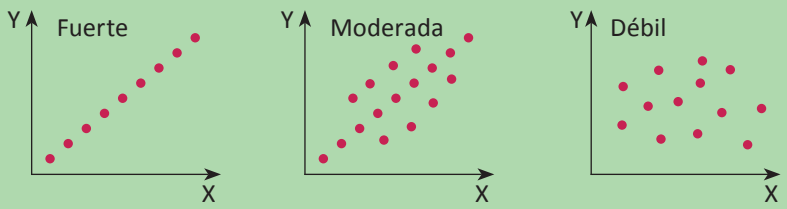


No hay relación entre las variables.

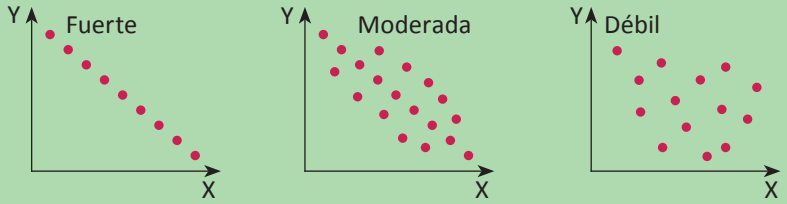
Además de la dirección, la correlación también puede analizarse según su fuerza. Esta indica qué tan agrupados se encuentran los puntos respecto de una tendencia lineal. Cuanto más juntos estén, la correlación será más fuerte; si están dispersos, más débil.

Observamos los siguientes gráficos:

Correlación positiva lineal



Correlación negativa lineal



Recuerda

El coeficiente de correlación de Pearson está representado por la letra r, cuyo valor varía entre -1 y 1:

- Si $r > 0$, la relación es directa.
- Si $r < 0$, la relación es inversa.
- Si $r = 0$, no hay relación lineal.

Ejemplo:

Valor de $\|r\|$	Correlación
$0 < r \leq 0{,}30$	Débil
$0{,}30 < r \leq 0{,}70$	Moderada
$0{,}70 < r \leq 1$	Fuerte

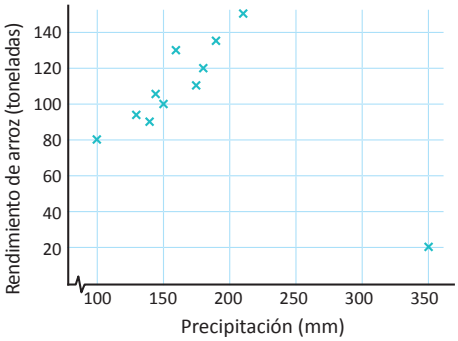
Situación: Rendimiento de la cosecha de arroz

La siguiente tabla muestra los datos de precipitación (en mm) y el rendimiento de arroz (en toneladas) cada año.

	Año										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Precipitación (mm)	130	150	140	180	350	210	190	100	160	175	145
Rendimiento (toneladas)	94	100	90	120	20	150	135	80	130	110	105

¿Qué tendencia observas? Identifica cualquier dato atípico y explica cómo afecta la relación entre precipitación y rendimiento.

Diagrama de dispersión: precipitación vs. rendimiento de arroz



Del gráfico, observamos una tendencia general positiva: a mayor precipitación, el rendimiento tiende a aumentar; sin embargo, hay un punto atípico (350 mm, 20 toneladas) que rompe la regularidad. Sin ese dato, la correlación sería claramente directa.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones entre dos variables cuantitativas (estatura/peso) y representa la distribución conjunta de los datos mediante un diagrama de dispersión.
- Expresa la relación entre variables e interpreta el significado de la correlación en el contexto del problema.
- Emplea procedimientos de análisis visual y estrategias para trazar una recta de regresión (tendencia), halla el tipo y la fuerza de correlación e identifica valores atípicos.
- Justifica las tendencias observadas en el diagrama de dispersión y evalúa la fiabilidad de las predicciones o la existencia de causalidad en la situación planteada.

Actividad lúdica



¡Evalúa tu juego! Revisa las reglas del juego, consolida una estrategia ganadora y expresa con sentido matemático tus descubrimientos.

La apuesta de Arquímedes: el juego del círculo perfecto

Tu propósito de aprendizaje

Aproximar experimentalmente la longitud de la circunferencia mediante el cálculo de los perímetros de polígonos regulares inscritos con un número creciente de lados, utilizando procedimientos para hallar el perímetro de cada polígono, y argumentar cómo la relación entre el número de lados y el perímetro permite expresar una tendencia hacia el valor de π.

1. Situación

Los sabios de Siracusa afirmaban que la circunferencia podía medirse sin conocer su fórmula, aproximándola con polígonos regulares inscritos. Esta técnica, propuesta por Arquímedes, permite acercarse a $L = 2\pi r$. En equipos, inscriban polígonos regulares en una circunferencia y comparen sus perímetros con la longitud del círculo. ¡Ahora, es momento que demuestren su destreza para este juego!



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

Equipos de cuatro: roles

- Constructor: dibuja o inscribe polígonos regulares.
- Calculista geométrico: calcula lados y perímetros.
- Comparador: contrasta el perímetro del polígono L y verifica errores.
- Cronista de Arquímedes: registra resultados y argumentos.

Materiales por equipo:

- Plantilla de circunferencia (radio fijo)
- Regletas/cartón con polígonos regulares inscribibles
- Tabla de registro
- Calculadora
- Hilo o cinta para medir (opcional)

Reglas del juego:

- Usen polígonos regulares inscritos en la misma circunferencia.
- Perímetro del polígono: $P_n = n \times L$ (L: longitud del lado)
- Comparen con la longitud real del círculo: $L = 2\pi r$.
- Objetivo: Reducir el error porcentual en al menos tres figuras.
- Cada resultado debe estar argumentado (cálculos y comparación).

Practica valores

- Interpreta diagramas sobre residuos y corrige hábitos personales valorando cómo pequeñas decisiones preservan múltiples formas de vida.
- Motiva a otros a actuar con honestidad y justicia dentro y fuera del entorno educativo.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: El triángulo inicial

Tema: Aproximación con pocos lados

- Consigna: Inscriban un triángulo equilátero y comparen su perímetro con L.
- Creencia a refutar (afirmación falsa): "Como el triángulo es equilátero e inscrito, su perímetro siempre será igual a L".
- ¿Están de acuerdo? Sustenten con cálculos y comparaciones.

Desafío 2: Más lados, más precisión

Tema: Hexágono y octógono

- Consigna: Inscriban hexágono y octógono; comparen con L.
- Creencia a refutar: "El perímetro del hexágono es más preciso que el del octógono, porque tiene menos lados y ocupa más espacio".
- ¿Qué papel cumple el número de lados en la aproximación?

Desafío 3: El círculo oculto

Tema: Generalización

- Consigna: Estimen el perímetro de un polígono de 50 lados inscrito.
- Creencia a refutar: "No importa cuántos lados tenga, su perímetro nunca se acercará a L".
- ¿Qué dicen sus cálculos? ¿Ven un patrón que contradiga la idea?

Desafío 4: El código final

Tema: Análisis gráfico

- Consigna: Grafiquen la relación número de lados vs. diferencia $|L - P_n|$.
- Creencia a refutar: "El gráfico será una línea horizontal, porque la diferencia no cambia".
- ¿Cómo se ve realmente el gráfico?, ¿qué representa su forma?

4. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué descubrieron sobre el comportamiento de P_n al aumentar los lados?

b. ¿Cuál es la importancia de comprender $L = 2\pi r$ y cómo ayuda a estimar cuando no podemos medir directamente?

Evalúa tus progresos

- Modela la longitud de una circunferencia inscribiendo polígonos regulares con un número creciente de lados, como triángulos, hexágonos y dodecágonos, observando cómo su perímetro se aproxima al del círculo.
- Expresa en una tabla los valores del número de lados y la diferencia con la longitud real de la circunferencia, representando luego esa relación en un gráfico.
- Emplea el método de Arquímedes para calcular el perímetro de los polígonos regulares inscritos y compara los resultados.
- Justifica, mediante el cálculo del error porcentual, cómo el aumento del número de lados mejora la precisión en la estimación de la longitud de la circunferencia.

UNIDAD

6

Proponemos soluciones para impulsar el turismo y emprender con sostenibilidad



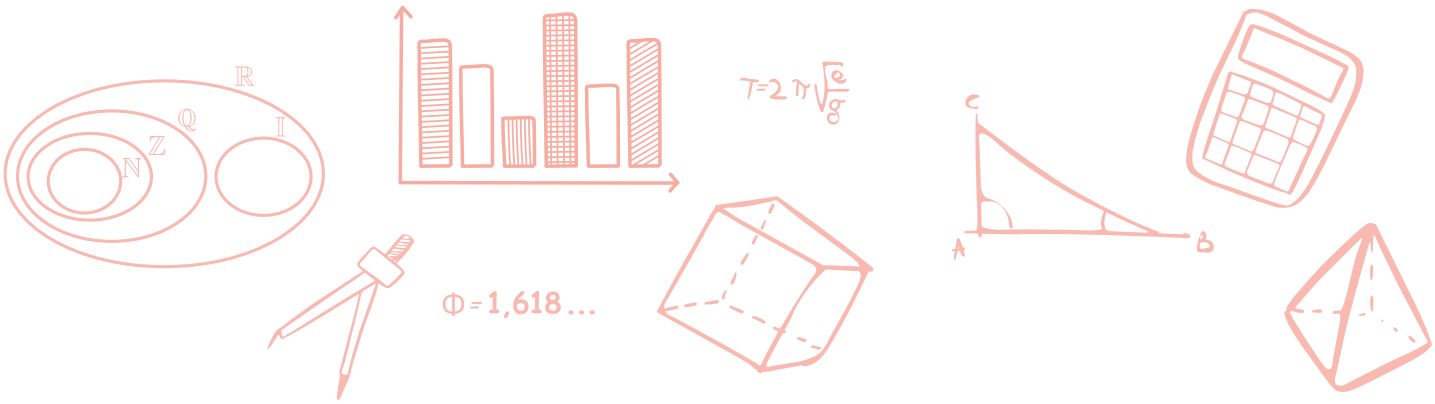
OBJETIVO DE DESARROLLO SOSTENIBLE

15 VIDA DE ECOSISTEMAS TERRESTRES

Este objetivo promueve el uso eficiente de los recursos, la reducción del desperdicio y la adopción de decisiones responsables que garanticen la sostenibilidad de los sistemas de producción y consumo. Fomenta prácticas alineadas con la economía circular y el bienestar colectivo.

Algunas acciones para promoverlo son las siguientes:

- Captación y almacenamiento de agua de lluvia para garantizar el acceso en zonas rurales
- Gestión eficiente y sostenible del recurso hídrico
- Promoción de soluciones hídricas adaptadas a contextos vulnerables



En esta unidad...

Desarrollo mis competencias

- Resuelve problemas de cantidad
- Resuelve problemas de forma, movimiento y localización
- Resuelve problemas de gestión, datos e incertidumbre

Construyo mis conocimientos

Variación porcentual, intereses, amortización y términos financieros

- Tasa de variación y variación porcentual, términos financieros
- Interés simple y compuesto
- Sistema de amortización con cuota constante

Formas tridimensionales

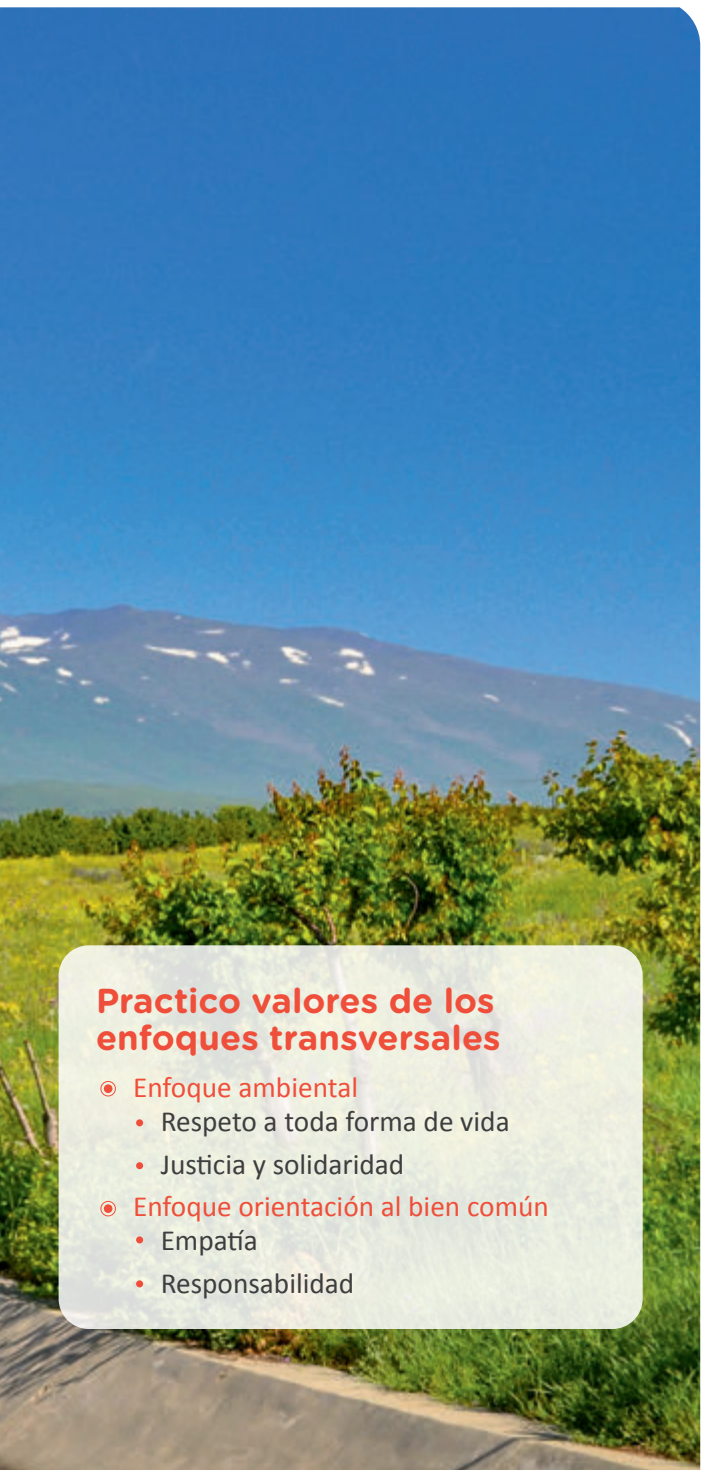
- Construcción de figuras a partir de proyecciones ortogonales

Localización y movimiento en el plano y el espacio

- Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, ordinaria y general

Eventos probabilísticos

- Probabilidad de sucesos equiprobables: regla de Laplace, propiedades
- Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes y no excluyentes: regla de la adición
- Probabilidad de sucesos independientes y dependientes



Practico valores de los enfoques transversales

- Enfoque ambiental
  - Respeto a toda forma de vida
  - Justicia y solidaridad
- Enfoque orientación al bien común
  - Empatía
  - Responsabilidad

Fuente: Malomuzh (2024).

INVESTIGAMOS

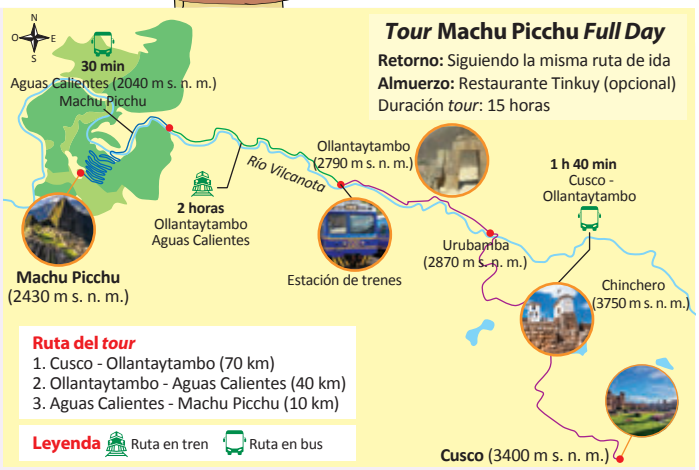


Reflexiona sobre cada situación, asume un rol, resuelve y argumenta tus ideas matemáticas con apoyo del anexo.

SITUACIÓN

Propuesta creativa para un proyecto de turismo sostenible

El Mincetur (2024) señala que más de un millón de turistas internacionales visita el Perú entre enero y abril cada año. Sin embargo, una gestión inadecuada del turismo puede generar impactos ambientales y sociales, como la sobreexplotación de recursos naturales y la presión sobre las comunidades locales.



Fuente: Adaptado de Machupicchu Terra (s. f.).

Como administrador turístico y hotelero, tu reto es crear una propuesta que equilibre el respeto por el entorno natural y social con la viabilidad económica promoviendo un desarrollo turístico responsable.

¿Cómo puedes diseñar un proyecto turístico sostenible que respete el ambiente, promueva el bienestar social y asegure su viabilidad económica contribuyendo así al desarrollo responsable de tu comunidad?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo A):

- **Reconoce** la cantidad de visitantes, los ingresos que genera el turismo y los lugares más visitados por región. Representa esta información gráficamente para ubicar tu región y obtener una visión inicial que fundamente tu futura propuesta.
- **Analiza** la tabla de visitas frecuentes a cinco destinos turísticos (según el anexo). Calcula probabilidades, clasifica los sucesos y determina qué escenarios representan mayor riesgo o estabilidad. Finalmente, explica de qué manera esta información puede ayudarte en el diseño de tu proyecto turístico, aun cuando los destinos de la tabla no se encuentren en tu región.
- **Diseña** un espacio turístico (como un módulo, sendero o mirador) utilizando líneas y perspectivas geométricas para representar su estructura. Justifica tu propuesta considerando su funcionalidad, accesibilidad y sostenibilidad.
- **Elabora** el presupuesto para implementar tu propuesta turística. Incluye costos, IGV e impuesto a la renta. Proyecta la inversión aplicando interés compuesto, y evalúa si es viable y sostenible financieramente.
- **Evalúa** los ingresos proyectados en función de la afluencia turística. Calcula las ganancias netas considerando los impuestos, y aplica conceptos de probabilidad y dependencia entre sucesos para tomar decisiones económicas sostenibles.
- **Diseña** tu propuesta turística considerando ingresos, afluencia, costos e infraestructura. Sustenta tus decisiones con los análisis previos demostrando que es viable, rentable y ambientalmente responsable para tu región.

SITUACIÓN

Desarrollando emprendimientos sostenibles

Según Produce (2024), en el Perú más de 3,27 millones de emprendedores lideran negocios, pero muchos fracasan por falta de planificación, manejo inadecuado de costos y baja proyección de ventas.

Como administrador de empresas, tu misión es diseñar un emprendimiento rentable, sostenible y socialmente responsable, que responda a las necesidades de la comunidad y minimice el impacto ambiental.



Fuente: Adaptado de Goonerua (s. f.).

¿Qué decisiones y estrategias puedes aplicar para lograr que tu propuesta sea viable económicamente, ambientalmente responsable y útil para tu comunidad?

Ten en cuenta las siguientes orientaciones (si es necesario, consulta el anexo B):

- **Reconoce** las características del emprendimiento en tu región: necesidades insatisfechas, tipos de negocios exitosos y públicos potenciales. Representa gráficamente la información y justifica tu elección de rubro.
- **Analiza** patrones de consumo o visitas frecuentes en negocios similares. Calcula probabilidades, clasifica sucesos y determina qué escenarios representan mayor riesgo o estabilidad para tu propuesta.
- **Usa** el modelo referencial del anexo, elige un componente del negocio (módulo, cartel o punto de atención) y representa sus vistas. Luego modela su trayecto o ubicación en el plano cartesiano con la ecuación de la recta.
- **Calcula** los costos de tu emprendimiento incluyendo IGV e impuesto a la renta. Proyecta la inversión aplicando interés compuesto y evalúa la rentabilidad a mediano plazo.
- **Estima** los ingresos bajo tres escenarios de afluencia. Calcula las ganancias netas y aplica conceptos de probabilidad y dependencia entre sucesos para tomar decisiones financieras sostenibles y realistas.
- **Integra** tus análisis en una propuesta de negocio viable, rentable y responsable. Justifica tus decisiones usando gráficos, cálculos y representaciones para demostrar el impacto positivo en tu comunidad.

Anexo A: Propuesta creativa para un proyecto de turismo sostenible

1. Visitantes, ingresos turísticos y lugares más visitados por región

Región	Visitantes anuales	Ingresos turísticos (S/)	Lugares más visitados
Amazonas	120 000	45 000 000	Kuélap, Gocta, Chachapoyas
Áncash	180 000	72 000 000	Huascarán, Chavín, Caraz
Apurímac	85 000	25 500 000	Sayhuite, Andahuaylas, Antabamba
Arequipa	650 000	195 000 000	Colca, Arequipa Centro, Salinas
Ayacucho	110 000	33 000 000	Pikimachay, Quinua, Huanta
Cajamarca	140 000	42 000 000	Ventanillas de Otuzco, Cumbemayo
Callao	320 000	96 000 000	Fortaleza Real Felipe, Isla San Lorenzo
Cusco	1 200 000	480 000 000	Machu Picchu, Valle Sagrado, Cusco
Huancavelica	65 000	19 500 000	Churcampa, Izcuchaca, Lircay
Huánuco	95 000	28 500 000	Tingo María, Kotosh
Ica	280 000	112 000 000	Nasca, Paracas, Huacachina
Junín	150 000	45 000 000	Huancayo, Tarma, Chanchamayo
La Libertad	420 000	168 000 000	Chan Chan, Huacas del Sol y de la Luna
Lambayeque	380 000	152 000 000	Señor de Sipán, Túcume, Pimentel
Lima	2 800 000	1 120 000 000	Centro Histórico, Miraflores, Barranco
Loreto	200 000	80 000 000	Iquitos, Pacaya Samiria
Madre de Dios	75 000	30 000 000	Manu, Tambopata, Puerto Maldonado
Moquegua	45 000	13 500 000	Cerro Baúl, Omate, Samegua
Pasco	80 000	24 000 000	Oxapampa, Pozuzo, Yanahuanca
Piura	220 000	88 000 000	Máncora, Catacaos, Ayabaca
Puno	450 000	135 000 000	Titicaca, Sillustani, Amantaní
San Martín	190 000	57 000 000	Tarapoto, Lamas, Moyobamba
Tacna	160 000	48 000 000	Tacna Centro, Campo de la Alianza
Tumbes	130 000	52 000 000	Punta Sal, Zorritos, Bocapán
Ucayali	100 000	40 000 000	Pucallpa, Yarinacocha, Contamana

2. Frecuencia de visitas y clasificación de riesgo por horario

Región	Mes	Visitantes totales	Mañana	Tarde	Noche	*P* (mañana)	*P* (tarde)	*P* (noche)
Cusco	Enero	120 000	48 000	60 000	12 000	0,40	0,50	0,10
Lima	Febrero	180 000	54 000	108 000	18 000	0,30	0,60	0,10
Arequipa	Marzo	85 000	34 000	42 500	8500	0,40	0,50	0,10
Ica	Abril	65 000	32 500	26 000	6500	0,50	0,40	0,10
Puno	Mayo	95 000	28 500	57 000	9500	0,30	0,60	0,10

P: probabilidad de visita según turno

Información propuesta y adaptada para fines educativos

3. Créditos de cajas municipales y bancos

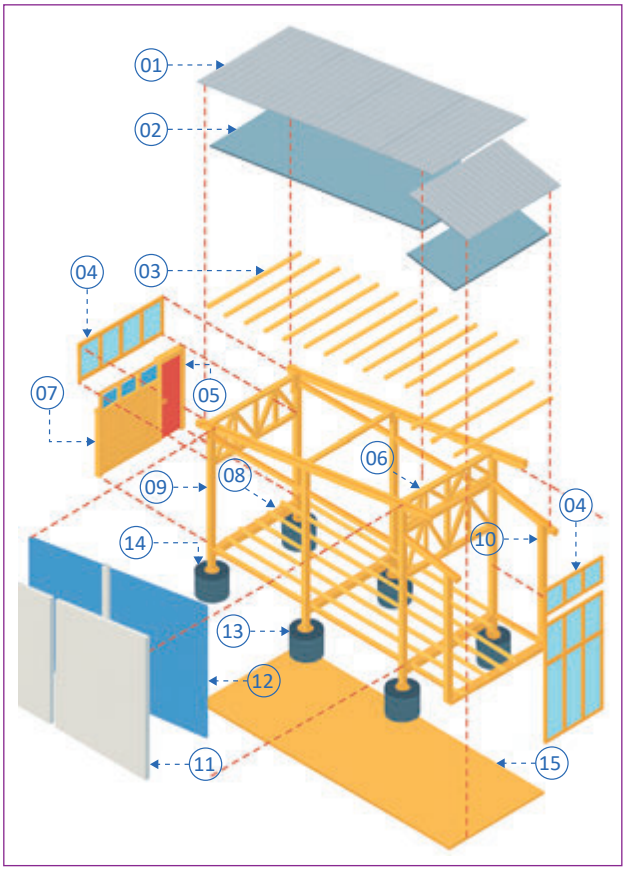
Tipo de crédito	Cajas municipales (%)	Bancos (%)
Préstamos a pequeñas empresas		
31 a 60 días	22,93	10,72
61 a 180 días	27,07	12,53
más de 360 días	26,87	15,74
Préstamos a medianas empresas		
31 a 60 días	18,19	11,62
61 a 180 días	21,87	12,22
más de 360 días	21,87	13,44

Fuente: Adaptado de Superintendencia de Banca, Seguros y AFP (2025).

4. Referente técnico: modelos de infraestructura para tu proyecto turístico

Observa atentamente la imagen del modelo técnico. Esta maqueta muestra la estructura desarmada de un espacio de descanso turístico. Cada pieza representa una parte funcional del diseño (como el techo, las paredes, las vigas o el piso).

- Analiza sus componentes: identifica las partes numeradas (techo, columnas, muros, piso, estructura, etc.).
- Imagina el conjunto armado: observa cómo las piezas se relacionan entre sí para formar un espacio coherente y estable.
- Toma una zona funcional como referencia (por ejemplo, el área de descanso, la recepción o la exposición).
- Dibuja las vistas geométricas (frontal, lateral y superior) de esa zona usando líneas rectas y proporciones simples.
- Traza un recorrido entre dos zonas funcionales (por ejemplo, del ingreso al área de descanso) y representa ese trayecto con una recta. Luego, modela su ecuación en el plano cartesiano.
- Adapta el diseño a tu propio proyecto turístico: puedes modificar dimensiones, materiales o ubicación siempre que mantengas criterios de funcionalidad, accesibilidad y sostenibilidad.



Información propuesta y adaptada para fines educativos

Anexo B: Desarrollando emprendimientos sostenibles

1. Distribución regional de emprendedores en el Perú (2023-2024)

Región	Emprendedores del total nacional	Número aproximado de emprendedores	Sectores predominantes
Amazonas	1,18 %	130 000	Agricultura, comercio local
Áncash	2,33 %	200 000	Agroindustria, minería artesanal
Apurímac	1,04 %	90 000	Agricultura, turismo comunitario
Arequipa	3,01 %	300 000	Comercio, servicios
Ayacucho	1,39 %	100 000	Textil, agricultura
Cajamarca	2,63 %	200 000	Agricultura, turismo
Callao	2,23 %	120 000	Comercio, transporte
Cusco	2,58 %	210 000	Turismo, comercio
Huancavelica	0,89 %	60 000	Agricultura, minería artesanal
Huánuco	1,67 %	130 000	Agroindustria, comercio
Ica	2,47 %	250 000	Agroexportación, turismo
Junín	2,79 %	180 000	Textil, agricultura
La Libertad	2,79 %	230 000	Agroindustria, comercio
Lambayeque	2,41 %	210 000	Agroindustrial, comercio
Lima	22,33 %	730 000	Comercio, servicios, agroindustria
Loreto	2,00 %	160 000	Pesca, comercio fluvial
Madre de Dios	0,68 %	70 000	Turismo, agricultura
Moquegua	0,74 %	60 000	Minería, servicios
Pasco	0,84 %	80 000	Minería, agricultura
Piura	3,01 %	235 000	Agroexportación, comercio
Puno	2,33 %	220 000	Agricultura, turismo cultural
San Martín	2,09 %	150 000	Agroindustria, ecoturismo
Tacna	1,20 %	100 000	Comercio, servicios
Tumbes	0,85 %	90 000	Agroexportación, turismo
Ucayali	1,56 %	120 000	Agricultura, comercio

Fuente: Adaptado de Comex Perú (2014).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

2. Coordenadas de ubicación de centro comercial

N.°	Centro comercial	Latitud, longitud
1	Mercado modelo de Huancayo	–12,071938228984813, –75,20541384791849
2	Grupo ferretero Huancayo	–12,0717935, –75,2051043
3	Real Plaza Huancayo	–12,065957963859582, –75,20543530562233

3. Referente técnico: modelo referencial de un local multiservicio

Observa la maqueta de un local multiservicio.

Identifica los espacios (recepción, zona de trabajo, atención, descanso, oficinas, etc.) y elige uno.

Dibuja sus vistas frontal, lateral y superior en tu cuaderno o plantilla.

Luego, traza un recorrido entre dos zonas funcionales y modela la ecuación de la recta que representa ese trayecto (por ejemplo, del ingreso al área de descanso).

Usa la maqueta como guía visual y ajústala al rubro de tu emprendimiento.



Fuente: Macrovector (s. f.).

Información propuesta y adaptada para fines educativos

Exploramos



¡Tú puedes! Enfrenta estos retos conectando tus ideas, justificando tus estrategias y pensando críticamente.

1. Pago por consumo eléctrico

El recibo de consumo de energía que se muestra incluye diversos conceptos de cobro como el cargo por energía, el cargo fijo, la reposición y mantenimiento, el alumbrado público, el IGV, los aportes, y el redondeo, entre otros.

N.º de suministro: 1234567-01

Total a pagar S/167,20

Detalle de importes

Concepto	Monto (S/)
Cargo por energía	124,35
Cargo fijo	2,39
Reposición y mantenimiento	1,71
Alumbrado público	12,50
Subtotal (sin impuestos y aportes)	140,95
IGV (18 %) aplicada al subtotal	25,37
Aporte de ley N.° 28749	1,35
Redondeo	–0,47
Total mes actual	167,20

Nota: El aporte de ley (Electricidad rural) e IGV son pagos obligatorios.

a. De los conceptos detallados en el recibo, ¿cuál representa el monto más alto? Calcula qué porcentaje del total a pagar corresponde a ese concepto y analiza su importancia en el gasto total.

b. Verifica el cargo por energía considerando un consumo mensual de 184 kWh, además, una tarifa por energía sin IGV: S/0,6758 por kWh. Luego, compara si el total a pagar es correcto, sumando todos los conceptos incluidos en el recibo.

c. Propón y justifica dos medidas viables para reducir el gasto eléctrico, diferenciando entre los conceptos controlables (como el consumo de energía) y los no controlables (como el alumbrado público o los aportes obligatorios).

Nota: El redondeo se aplicará al final, de forma positiva o negativa, según la política comercial vigente.

2. Variación en ventas de electrodomésticos

La siguiente tabla muestra los precios de venta y el número de los electrodomésticos que comercializa una empresa durante tres años consecutivos:

	2023		2024		2025	
Electrodoméstico	**Precio (S/)**	**Cantidad (unidades)**	**Precio (S/)**	**Cantidad (unidades)**	**Precio (S/)**	**Cantidad (unidades)**
Olla arrocera	180	210	225	200	314	320
Licuadora	84	20	75	15	82	21
Plancha	40	8	68	10	75	14



a. ¿Cómo evoluciona porcentualmente (cambio porcentual total) la cantidad de ollas arroceras vendidas entre 2023 y 2025?, ¿qué tendencia revela y qué posibles causas podrías argumentar?

b. Suponiendo que la variación porcentual de precio de venta entre 2024 y 2025 fuese la misma que entre 2025 y 2026, estima los ingresos de cada electrodoméstico proyectados para el año 2026. Justifica tu respuesta.

3. Comparativo de ventas

Una tienda evalúa la evolución de ventas de varios productos para ajustar pedidos y maximizar ganancias comparando dos meses consecutivos.

a. Completa la tabla con la variación en unidades de venta y el porcentaje de cada producto.

Producto	Mes 1	Mes 2	Variación	V. P.
Huevo (unidad)	2500	3000	500	20 %
Jamón (paquete 100 g)	10 000		2000	20 %
Queso (trozo 200 g)	6500	6250		
Pan (unidad)		1350	−50	−4 %
Café (bolsa de 200 g)	5600	5432		−3 %
Total	26 000		2032	V.P. global: +7,8 %

V. P.: variación porcentual

b. A partir de los resultados del cuadro, analiza si una disminución porcentual seguida de un aumento del mismo porcentaje permite recuperar el valor inicial. Justifica tu respuesta con propiedades y ejemplos.

4. Expansión de una tienda de ropa



Irene, propietaria de una tienda de ropa, compra un lote de prendas mediante un crédito de S/50 000 a 12 meses para ampliar su *stock*. Las tasas aplicables figuran en la siguiente tabla:

Concepto	Tasa	Base
Precio del lote	-	
IGV	18 %	
Crédito: interés simple anual	12 %	
ITF (0,005 % × transacción)	0,06 %	

a. Desglosa y obtén el IGV, el interés simple (12 % anual) y el costo total de ITF para la transacción; con ello expresa el costo total del crédito.

b. Si Irene paga el monto del crédito (capital) a los seis meses, ¿qué monto faltaría cancelar por intereses e ITF hasta completar el año? Fundamenta tu respuesta usando proporcionalidad del interés simple y del ITF.

5. Tu mejor oferta

Mariela quiere comprar polos, para lo cual cuenta con dos propuestas que incluyen el servicio de entrega.

a. Mariela quiere comprar ocho polos de talla M y diez polos de talla L. ¿Cuál propuesta le conviene más considerando precio + IGV + entrega? Sustenta tu elección.

b. Si la entrega de Estilo costara S/20 en lugar de S/15 según la zona, ¿cambiaría su elección?

c. ¿Sería sensato solicitar la entrega de los polos de talla M en De Todo y las de talla L en Estilo? Fundamenta tu respuesta con ejemplos y contraejemplos.

PROPUESTA 1

De Todo

RUC 20567891234

Polo de talla M: S/28

Polo de talla L: S/42

Precios NO incluyen IGV

Entrega a domicilio gratuita



PROPUESTA 2

Estilo

RUC 20432109876

Polo de talla M: S/33

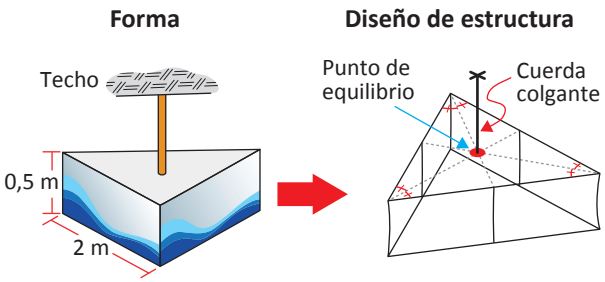
Polo de talla L: S/47

Precios SÍ incluyen IGV

Entrega a domicilio S/15

1. El anuncio colgante

Una empresa emplea un anuncio publicitario como el siguiente:

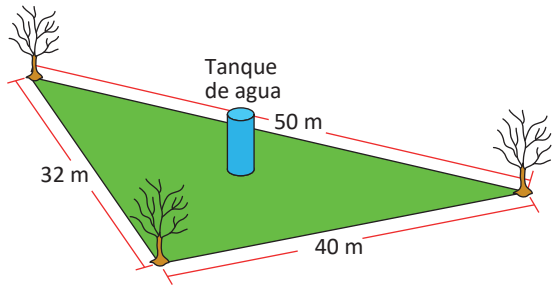


a. Si se decide usar el mismo diseño de estructura (prisma recto homogéneo con cuerda en el punto de equilibrio del techo), pero con base cuadrada o rectangular, propón dimensiones adecuadas y ubica gráficamente dicho punto de equilibrio.

b. Se afirma que, en cualquier triángulo, el centro de gravedad o baricentro coincide con el punto de intersección de sus tres medianas. ¿El baricentro se encuentra siempre dentro del triángulo? Justifica tu respuesta con trazados de medianas y argumentos sobre la convexidad de la figura.

2. Optimizado de riego en parcela triangular

La imagen muestra un sistema de plantado de árboles en una parcela de forma triangular, abastecido de agua por un tanque.

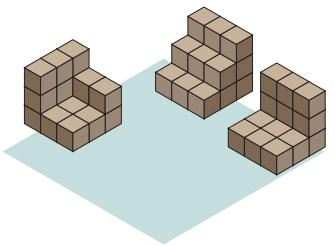


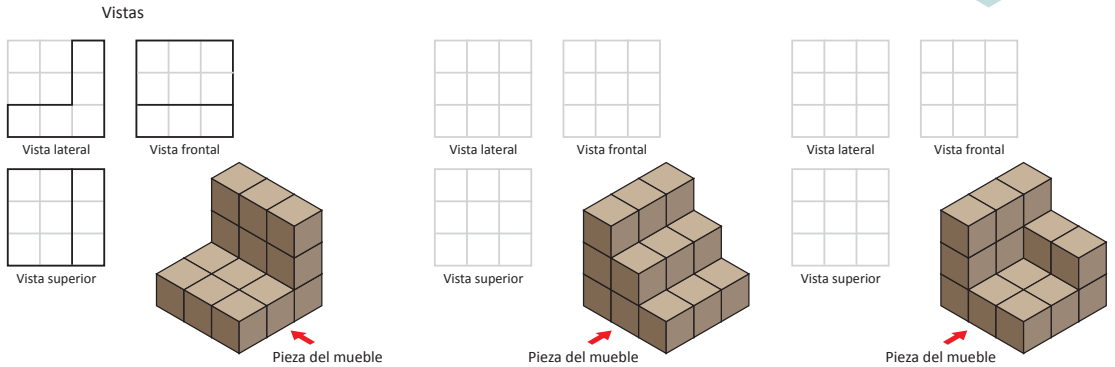
a. Dibuja el plano de riego indicando la posición del tanque, ubicado en el centro del terreno triangular (circuncentro, punto equidistante de los vértices), y calcula la longitud de tubería necesaria para conectarlo con cada vértice.

b. En todo triángulo, el circuncentro (el punto equidistante de sus tres vértices) siempre se ubica en el interior de la figura debido a su simetría. ¿Es correcta dicha afirmación? Justifica tu respuesta usando medidas y construcciones geométricas.

3. Confección de fundas para muebles

La imagen de la derecha, muestra un juego de muebles para los cuales se confeccionará fundas de telas. Para calcular la cantidad de tela es necesario dibujar la vista lateral, frontal y superior de cada mueble en las cuadrículas de dimensiones 0,2 m x 0,2 m. Calcula el área total de tela necesaria.

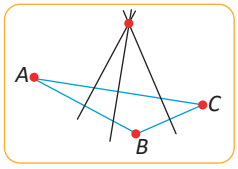




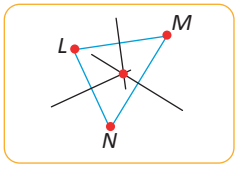
4. Mediatrices y circuncentro

En cada triángulo, se han trazado las mediatrices de sus tres lados y se ha ubicado el circuncentro (punto de intersección).

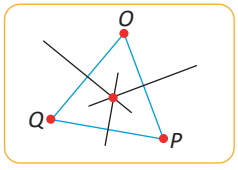
△ Obtusángulo



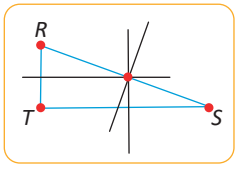
△ Acutángulo



△ Equiángulo



△ Rectángulo



Completa la tabla según las figuras. Marca con "Sí" o "No" la posición del circuncentro y señala si alguna mediatriz pasa por un vértice del triángulo.

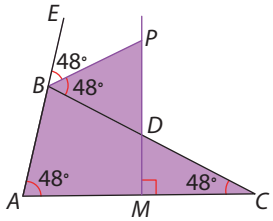
Tipo de triángulo	Circuncentro			¿Alguna mediatriz pasa por un vértice?
	Interior	Exterior	Sobre un lado	
Obtusángulo	No			
Acutángulo				
Equilátero	Sí			
Rectángulo				

5. Encuentro de líneas notables

En el triángulo ABC, $m\angle A = m\angle C = 48°$. Desde el vértice B, se traza la bisectriz externa del $\angle ABC$ y, sobre el lado AC, se construye su mediatriz. Estas dos rectas se cortan en el punto P. Calcula la medida del $\angle BPM$, donde M es el punto medio de AC.

Un estudiante planteó el siguiente procedimiento:

- Dado que $m\angle A = m\angle C = 48°$, se asume que $m\angle B = 180° - (48° + 48°) = 84°$.
- Se divide al ángulo suplementario del $\angle B$ $(180° - 84° = 96°)$ en dos partes iguales, por lo que $\angle EBP = \angle PBC = 96°/2 = 48°$.
- Como PM es mediatriz de AC, se asume que $PM \perp AC \Rightarrow \angle PMC = 90°$ y que BPM es isósceles en P.
- Como el $\angle PBC = \angle BPM = 48°$, se concluye que $\angle BPM = 48°$, tal como se observa en el gráfico.



Sí, el procedimiento planteado es incorrecto. Identifica el error y plantea el procedimiento correcto empleando propiedades.

6. Trayecto turístico

La imagen muestra tres puntos turísticos en Trujillo.

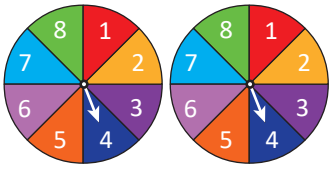
Se deben instalar cuatro carpas de exhibición considerando lo siguiente: tres carpas en los puntos medios de cada trayecto entre lugares y una equidistante a los tres, con el fin de minimizar la distancia total.

¿Dónde ubicarías las carpas en el plano de la ciudad y cuáles serían sus coordenadas? Justifica tu respuesta.



1. Tarjeta de bingo con ruleta

María ha organizado un juego de bingo, con 2 ruletas cuyos ocho sectores de cada uno tienen las mismas medidas.



Las reglas son las siguientes:

- Cada jugador escribe nueve números diferentes en su tarjeta, según las sumas posibles de las ruletas.
- En cada ronda se giran simultáneamente ambas ruletas y se suma el resultado obtenido en cada giro.
- Si la suma obtenida está en tu tarjeta, lo marcas.
- Gana quien complete primero los nueve números.

A continuación, se muestran las tarjetas A y B, elaboradas por dos compañeros:

Tarjeta A

4	13	5
12	9	6
8	11	15

Tarjeta B

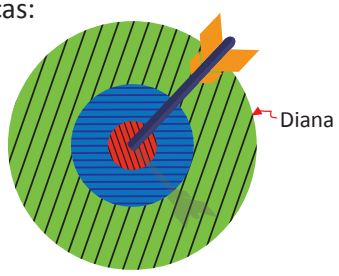
14	6	9
7	10	4
2	15	12

a. ¿Cuál de estas tarjetas tiene la mayor probabilidad de ganar? Explica por qué.

b. María quiere diseñar una nueva tarjeta que tenga más posibilidades de ganar. ¿Cómo debería elegir sus nueve números? Justifica por qué su elección de números le da ventaja en el juego.

2. ¿Dónde caerá el dardo?

En un juego de tiro al blanco, Hugo lanza un dardo hacia una diana, en la que el dardo impacta uniformemente en toda su superficie dividida en tres zonas concéntricas, que tienen las siguientes características:



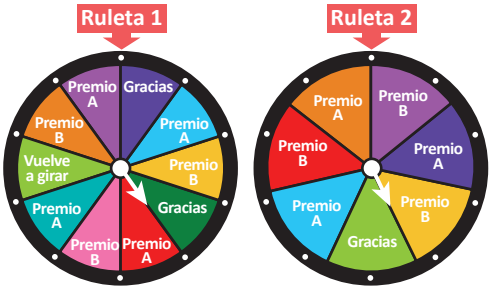
- La zona roja central presenta un radio de 2 cm.
- La zona azul intermedia se extiende desde el borde de la zona roja hasta un radio de 5 cm.
- La zona verde completa la diana hasta un radio total de 10 cm.

a. ¿En qué zona de la diana es más probable que caiga el dardo? Fundamenta tu respuesta calculando la probabilidad.

b. Hugo propone una versión cuadrada de la diana, manteniendo las mismas distancias radiales desde el centro para cada zona. ¿Cambiarían las probabilidades? Compara las áreas de ambas dianas y explica cómo influye la versión de Hugo en las probabilidades de acierto.

3. La ruleta ganadora

Durante la feria escolar, los estudiantes deben elegir entre la Ruleta 1 y la Ruleta 2 para intentar ganar un premio. Ambas ruletas tienen los siguientes sectores: “Premio A”, “Premio B”, “Vuelve a girar” y “Gracias”.



- Si la flecha cae en “Gracias”, el jugador no gana nada.
- Si cae en “Vuelve a girar”, obtiene una nueva oportunidad en la misma ruleta.
- Si cae en “Premio A” o “Premio B”, gana el premio correspondiente.

a. ¿Cuál de las dos ruletas ofrece mayor probabilidad de obtener un premio (A o B)? Obtén las probabilidades en cada caso y justifica tu elección.

b. Si reemplazas el “Vuelve a girar” por “Premio B” en una de las ruletas, ¿cómo cambiaría la probabilidad de ganar?, ¿cuál se convertiría en la mejor opción y por qué?

4. Sumas y probabilidades

Se lanzan dos dados y se suman los puntos que aparecen en la cara superior. ¿Cuál es la probabilidad de que esta suma sea menor o igual que 7? (Suponiendo dados justos e independientes)

Un estudiante realizó el siguiente procedimiento:

1. Elaboramos una tabla con los puntajes de cada dado.

	1	2	3	4	5	6
1	(1; 1)	(1; 2)	(1; 3)	(1; 4)	(1; 5)	(1; 6)
2	(2; 1)	(2; 2)	(2; 3)	(2; 4)	(2; 5)	(2; 6)
3	(3; 1)	(3; 2)	(3; 3)	(3; 4)	(3; 5)	(3; 6)
4	(4; 1)	(4; 2)	(4; 3)	(4; 4)	(4; 5)	(4; 6)
5	(5; 1)	(5; 2)	(5; 3)	(5; 4)	(5; 5)	(5; 6)
6	(6; 1)	(6; 2)	(6; 3)	(6; 4)	(6; 5)	(6; 6)

2. De las 36 combinaciones, los pares ordenados que cumplen la condición son estos:
   - (6; 1) = 6 + 1 = 7
   - (5; 2) = 5 + 2 = 7
   - (4; 3) = 4 + 3 = 7
3. Hay tres resultados; por lo tanto, la probabilidad (P) es la siguiente: $P = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Revisa el procedimiento llevado a cabo. ¿Identificas algún error en el desarrollo? Fundamenta tu respuesta y realiza las correcciones necesarias.

6. ¿Llueve o no llueve?

Los organizadores de la festividad del Señor de Chacos en Huánuco deben decidir si es seguro celebrarlo el 15 de mayo de 2025, y disponen de información proveniente de dos fuentes oficiales de meteorología para tomar su decisión. Observa las tablas.

a. Usa la frecuencia relativa en los días previos para hallar la probabilidad frecuencial, empleando el historial. Analiza ventajas y limitaciones de estos datos para anticipar el clima de mañana.

b. Propón una forma de combinar la información de los servicios meteorológicos y compara el resultado con la probabilidad frecuencial o empírica que calculaste. Argumenta si es conveniente realizar o aplazar el evento empleando el espacio muestral.

Historial de lluvia en Huánuco

Fecha	Precipitación (mm)	Día con lluvia
2025-5-1	0,0	No
2025-5-2	2,1	Sí
2025-5-3	0,0	No
2025-5-4	5,2	Sí
2025-5-5	0,0	No
2025-5-6	0,0	No
2025-5-7	1,0	Sí
2025-5-8	0,0	No
2025-5-9	7,4	Sí
2025-5-10	0,0	No
2025-5-11	0,0	No
2025-5-12	3,3	Sí
2025-5-13	0,0	No
2025-5-14	0,5	Sí

Fuente: Adaptado de The Weather Channel (s. f.).

Pronóstico de precipitación para mañana en Huánuco

Servicio de meteorología	Probabilidad de que llueva
Weather.com	35 %
AccuWeather	40 %

Desarrollamos



Reflexiona críticamente sobre situaciones, muestra estrategias, valida tus ideas matemáticas y afianza lo aprendido.

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran aumentos o disminuciones de precios mediante la variación porcentual, comunica los cambios usando tablas y gráficos, emplea procedimientos para hallar el porcentaje de incremento o descuento, argumenta la implicancia del cambio en la situación y justifica la importancia del valor inicial para interpretar la variación.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Mantén limpios los espacios escolares demostrando respeto por la naturaleza y compromiso con el bienestar colectivo.
- Colabora en proyectos grupales cumpliendo con tu parte del trabajo con compromiso y excelencia.

Pensamos y actuamos

1. **Hace dos años, una tienda vendía el litro de aceite a S/6; hoy cuesta S/9. Un estudiante dice: "Solo subió S/3, no es mucho", y otro responde: "Depende de cuánto costaba antes". Si otro producto subió de S/3 a S/6, también subió S/3. ¿Fue el mismo aumento?, ¿cómo podrías compararlos?**

   a. Imagina que una tira rectangular representa un valor de S/6. ¿Cómo representarías gráficamente una tira que ahora equivale S/9?

   b. Si consideras que S/6 representa el 100 %, ¿cuánto se ha incrementado la tira en soles?, ¿y cuánto representa ese incremento en porcentaje?

   c. Dibuja ambas tiras en tu cuaderno u hoja cuadriculada y compara visualmente la reducción. Ordena el procedimiento realizado y completa la siguiente tabla con datos reales:

Producto	Precio año 1	Precio año 2	Cambio de precio	Variación de precio	¿Cómo lo expresarías en %?
Aceite	S/6,00	S/9,00	+ S/3,00	Aumentó (+)	
Frejol	S/6,00	S/4,50	– S/1,50	Disminuyó (–)	

   d. ¿Qué representa el porcentaje calculado con respecto al valor inicial del producto? Explica qué indica ese valor porcentual.

   e. Si dos productos suben la misma cantidad en soles, ¿cómo puedes saber cuál tuvo un mayor aumento real?, ¿qué papel cumple el porcentaje en esa comparación?

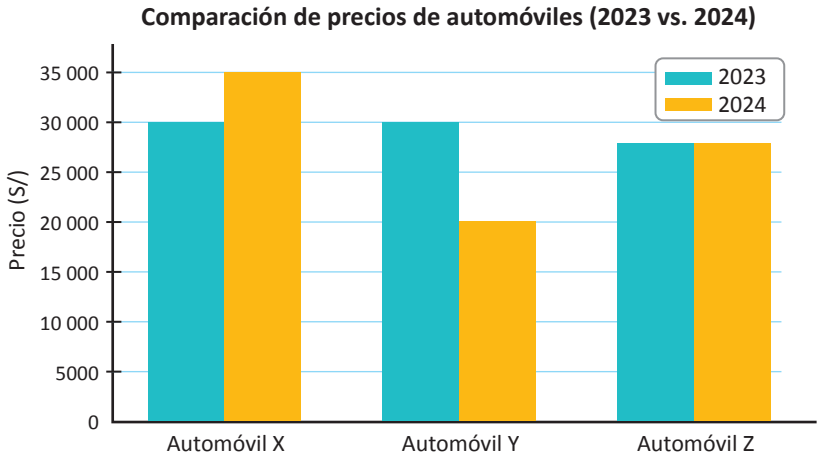
   f. ¿Qué ocurriría si se comparan productos con disminuciones en lugar de aumentos? ¿El procedimiento para calcular la variación porcentual sería el mismo? Justifica tu respuesta.

2. **Durante el último año, algunos productos agrícolas han cambiado de precio debido al aumento en los costos de importación y distribución. Para planificar la próxima campaña, una cooperativa agrícola necesita comparar estos cambios tanto en soles como en porcentaje.**

   Completa la siguiente tabla:

Producto agrícola	Precio año 1 (S/)	Precio año 2 (S/)	¿Cuánto varió?	¿Cómo lo expresarías en %?
Fertilizante (50 kg)	85,00	112,00		
Semilla de maíz (kg)	3,40	4,10		
Plaguicida (L)	21,50	18,00		

3. **Una familia evalúa la compra de un automóvil y compara los precios de tres modelos en 2023 y 2024 usando la siguiente gráfica:**



Uno de los integrantes comenta: "El automóvil X subió 5 %, el automóvil Y bajó 10 % y el automóvil Z se mantuvo igual".

a. ¿Estás de acuerdo con esa afirmación?, ¿qué error o confusión puede haber detrás de esa afirmación?

b. Calcula la variación porcentual del precio de cada automóvil y justifica tu respuesta con argumentos claros. ¿Por qué es importante considerar el valor inicial al interpretar cambios porcentuales?

¿Qué construimos?

Luego de analizar las actividades previas, tres estudiantes presentan sus conclusiones sobre el cálculo de la variación porcentual de precios.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Solo resto los precios. Si subió tres soles, esa es la variación.	Primero resto los precios y, luego, divido el cambio entre el precio original.	Después de dividir, multiplico por 100 para saber el porcentaje.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Establece relaciones en situaciones de variación de precios y exprésalo considerando la variación porcentual, como aumento o disminución de cantidades.
- Expresa tu comprensión del cambio y la variación porcentual, e interprétalo en un contexto de la economía.
- Emplea procedimientos para hallar la variación porcentual de precios; asimismo, compara cambios en diferentes productos para tomar decisiones.
- Justifica con ejemplos por qué la suma o la resta de porcentajes sucesivos no es igual a un descuento único, y evalúa la validez de afirmaciones basadas en la variación porcentual.

Profundizamos

Para la resolución de los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **En un taller de diseño industrial, se fabricaban cubos de acrílico con una arista de 10 cm. Tras una modificación en el proceso, se decidió aumentar la arista a 12 cm. ¿En qué porcentaje aumentó el volumen del cubo? ¿Un incremento en la longitud implica el mismo porcentaje de aumento en el volumen? Justifica tu respuesta con cálculos y argumentos.**
2. **Una empresa agrícola adquiere un vehículo por S/120 000. Según su política contable, este tipo de vehículo se deprecia un 20 % en el primer año. Al año siguiente, se deprecia otro 20 % sobre el nuevo valor. ¿Es correcto afirmar que en dos años el vehículo pierde el 40 % de su valor original? Determina el valor final y justifica tu respuesta con procedimientos.**

Tu propósito de aprendizaje

Establece relaciones en una situación de deuda que involucra expresar sistemas de amortización de capital y cuota constantes.

Justifica la toma de decisiones financieras informadas y su impacto a largo plazo.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

- Participa en campañas escolares de limpieza y reciclaje compartiendo responsabilidades para el bienestar de la comunidad educativa.
- Promueve el respeto hacia las emociones ajenas escuchando y actuando con sensibilidad y amabilidad.

Pensamos y actuamos

1. Una empresa agrícola adquiere una máquina por un valor de S/ 200 000.

Para financiar la compra, solicita un préstamo con una tasa de interés anual del 10 %, pactando el pago en cinco cuotas anuales iguales, bajo el sistema de amortización con cuota constante.

Completa la siguiente tabla y analiza los resultados:

Año	Saldo inicial (S/)	Interés (10 %)	Amortización (S/)	Cuota total (S/)	Saldo final (S/)
1	200 000	20 000	32 748	52 748	167 252
2	167 252	16 725	36 023	52 748	131 229
3	131 229				
4					
5					

Responde los siguiente:

a. Observa los valores de la columna "Cuota total (S/)" en los diferentes años. ¿Qué puedes notar sobre su valor? ¿Se mantiene igual o cambia? Explica qué característica del sistema de amortización francés se refleja en este comportamiento.

b. Compara los valores de las columnas "Interés (S/)" y "Amortización (S/)". ¿Qué tendencia observas a lo largo de los años? ¿Por qué el interés disminuye mientras la amortización aumenta, si la cuota total se mantiene constante? ¿Qué relación tiene esto con el saldo pendiente del préstamo?

c. Imagina que el préstamo fuera de S/300 000 en lugar de S/200 000, con las mismas condiciones (tasa de 10 % anual y cinco cuotas). ¿Cómo crees que cambiaría el valor de la cuota total? ¿Aumentaría, disminuiría o se mantendría igual? Explica tu razonamiento en función de la fórmula del sistema francés.

2. Una pequeña empresa ganadera adquiere un tractor agrícola valorizado en S/240 000. Para financiar esta compra, solicita un préstamo a una tasa de interés del 6 % semestral, con un plazo total de tres años, bajo el sistema de amortización constante de capital. ¿Cuál será el monto total que deberá pagar en cada semestre?

Completa la siguiente tabla:

Semestre	Saldo inicial (S/)	Interés (S/)	Amortización (S/)	Cuota total (S/)	Saldo final (S/)
1	240 000	14 400	40 000	54 000	200 000
2	200 000	12 000	40 000	52 000	160 000
3					
4					
5					
6					

Responde:

a. ¿Qué diferencia principal observas entre el comportamiento de las cuotas totales en el sistema de cuota constante y en el de amortización constante de capital? ¿Qué ventajas puede ofrecer cada uno al planificar los pagos?

b. En ambos sistemas los intereses disminuyen con el tiempo, pero ¿en cuál de ellos se reduce más rápidamente el interés pagado? ¿Qué relación tiene esto con el saldo pendiente y la forma de amortización del capital?

c. Compara cómo varía la amortización del capital en los dos sistemas. ¿En cuál se recupera la deuda con mayor rapidez y cómo influye esto en el total de intereses pagados al final del préstamo?

d. Si se busca mantener cuotas iguales durante todo el préstamo, ¿cuál sistema resulta más conveniente? Y si el objetivo es pagar menos intereses totales, ¿qué sistema sería más eficiente? Explica las razones.

e. Si la tasa de interés aumentara, ¿en cuál de los dos sistemas el efecto sería más notable en las primeras cuotas? Justifica tu respuesta considerando la distribución del interés y la amortización en cada uno.

¿Qué construimos?

En un aula, luego de analizar lo desarrollado en las actividades anteriores, dos estudiantes comparten sus conclusiones.

Estudiante 1	Estudiante 2
En el sistema de cuota constante, la cuota total que se paga en cada período es siempre igual durante todo el plazo del préstamo.	En cada cuota del sistema de cuota constante, la parte correspondiente a los intereses disminuye con el tiempo, mientras que la amortización del capital aumenta.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran representar la variación del saldo, amortización, interés y cuota de un préstamo mediante tablas y gráficas lineales decrecientes, y expresa el comportamiento de la deuda en el tiempo.
- Emplea procedimientos para hallar la amortización fija, el interés variable y la cuota convirtiendo tasas si es necesario.
- Sustenta la elección de un préstamo y argumenta tu decisión basándote en la comparación de costos totales y el impacto de la cuota en el flujo de caja.

Profundizamos

Para la resolución de los siguientes problemas, emplea los procedimientos desarrollados en las actividades anteriores.

1. **Una empresa adquiere un préstamo de S/12 000 a una tasa de interés anual del 10 %, pagadero en tres cuotas anuales iguales bajo el sistema de cuota constante.**
   a. Calcula el valor de la cuota anual constante.
   b. Determina el monto total pagado y el total de intereses.
2. **Una empresa debe pagar una cuota de S/4020 por un préstamo al 12 % anual durante cuatro años, bajo el sistema de cuota constante. En la primera cuota, el interés fue de S/1200.**
   a. ¿Cuál fue el monto original del préstamo?
   b. ¿Cuánto correspondió a la amortización del capital en esa primera cuota?

Tu propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran la ocurrencia de eventos aleatorios, y represéntalos a través de la probabilidad condicional, independiente o dependiente utilizando tablas de doble entrada, diagramas.

Emplea estrategias y procedimientos para hallar probabilidades compuestas, y argumenta si los sucesos son independientes o dependientes para sustentar la toma de decisiones informadas.

Lo mostrado aquí es solo una guía. Desarrolla todas las actividades en tu cuaderno.



Practica valores

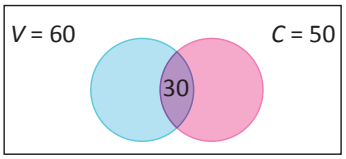
- Asegura la inclusión de todos en el trabajo matemático considerando el cuidado del entorno y asignando roles y tiempos claros.
- Colabora en proyectos grupales cumpliendo con tu parte del trabajo con compromiso y excelencia.

Pensamos y actuamos

1. Un equipo interdisciplinario debe decidir, a partir de evidencias, sobre la conservación, la bioseguridad y la agricultura sostenible. Para ello, analiza los siguientes casos:

Caso 1: Un equipo de biólogos estudia los hábitos de alimentación de una especie de ave en la selva. Durante una semana, observaron que, de 60 aves, 15 comieron frutas rojas, 20 comieron insectos y 25 comieron semillas. Además, algunas aves consumieron más de un tipo de alimento.

Caso 2: En una granja se obtuvo la siguiente información sobre 100 vacas considerando si fueron vacunadas y si tuvieron control veterinario:



Caso 3: En una comunidad agrícola, se registraron datos sobre el uso de fertilizantes en parcelas con cultivos de maíz y trigo.

Tipo de cultivo	Con fertilizante	Sin fertilizante
Maíz	30	10
Trigo	25	15

Se analizaron 80 parcelas de maíz y trigo considerando el uso o no de fertilizantes.

Luego de analizar los tres casos, completa la tabla.

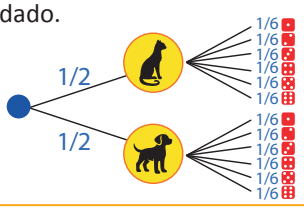
Categoría	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Sucesos	*A*: el ave come frutas rojas. *B*: el ave come insectos. *C*: el ave come semillas.		
Espacio muestral	60 aves observadas		
Probabilidad (Frecuencia relativa)	$P(A) = \frac{15}{60} = 0{,}25$ $P(B) = \frac{20}{60} = 0{,}33$ $P(C) = \frac{25}{60} = 0{,}42$		

2. Analiza cada uno de los siguientes casos:

Caso 1: En una planta de producción, se eligieron 100 envases al azar.

	Bien rotulados	Mal rotulados
Biodegradables	30	30
No biodegradables	20	20

Caso 2: Se elige al azar una de las dos figuras (gato o perro) y luego se lanza un dado.



Luego de analizar los dos casos, completa la siguiente tabla:

Categoría	Caso 1	Caso 2
Sucesos		
Espacio muestral		
Probabilidad teórica		

a. ¿Qué evidencias te permiten concluir si los sucesos son dependientes o independientes?

b. ¿En qué situación fue más directa la multiplicación de probabilidades?

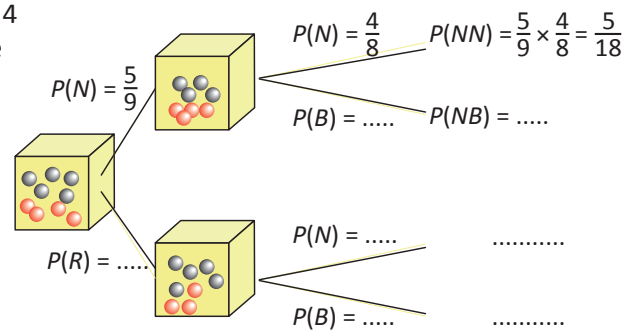
c. ¿Cómo cambia la forma de organizar los datos según el tipo de sucesos?

3. Analiza y completa el diagrama de árbol.

Se tiene una caja con 5 bolillas negras y 4 bolillas rojas, donde

N: saca una negra.

R: saca una roja.



a. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas extraídas sean del mismo color? ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una bola roja en las dos extracciones?

b. ¿Qué transformaciones sufre el espacio muestral después de la primera extracción?, ¿cómo afecta eso al cálculo de probabilidades?

c. Se afirma: "Si se agrega una bola más a la urna, todas las probabilidades simplemente aumentan en $\frac{1}{10}$". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

¿Qué construimos?

En un aula, luego de analizar las actividades anteriores, tres estudiantes comparten sus conclusiones.

Estudiante 1	Estudiante 2	Estudiante 3
Si dos sucesos tienen resultados distintos, entonces siempre son independientes.	Cuando se realiza un segundo experimento, sin reemplazar el resultado del primero, el espacio muestral permanece igual.	La probabilidad condicional siempre se calcula multiplicando probabilidades simples sin necesidad de considerar el contexto.

¿Con cuál o cuáles de los estudiantes estás de acuerdo? Plantea ejemplos para cada afirmación que apoyen o rechacen su verdad o falsedad.

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran la ocurrencia de eventos aleatorios en contextos diversos (como bioseguridad, consumo de alimentos o producción industrial), y represéntalos a través de la probabilidad condicional, independiente o dependiente.
- Representa las condiciones y los datos de las situaciones utilizando diagramas de árbol, tablas de doble entrada y diagramas de Venn identificando claramente el espacio muestral y los sucesos.
- Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos, ya sean simples o compuestos, de manera sistemática, considerando la probabilidad condicional, la probabilidad de sucesos dependientes e independientes, y la regla de la multiplicación.
- Justifica si dos o más sucesos son dependientes o independientes, evalúa afirmaciones y argumenta cómo los cambios en el espacio muestral afectan la probabilidad para tomar decisiones.

Formalizamos



Integra ejemplos, organiza tus ideas, dialoga y reflexiona para dar sentido a las ideas matemáticas en tus retos.

¿Sabías que...?

El interés compuesto y los términos financieros permiten evaluar costos, beneficios de sistemas hídricos sostenibles; proyectar ahorros y reinversiones, y calcular impactos económicos a largo plazo. Fomenta la participación ciudadana y uso racional del recurso hídrico.

Ten en cuenta

La **inflación** es el aumento sostenido de los precios de bienes y servicios a lo largo del tiempo, lo que reduce el poder adquisitivo del dinero.

El **índice de precios al consumidor (IPC)** mide la variación de precios en el tiempo, reflejando el costo de vida y los cambios que generan inflación económica.

El **impuesto a las transacciones financieras (ITF)** aplica a operaciones bancarias como depósitos o transferencias, buscando controlar movimientos financieros.

Practica valores

- Justifica estimaciones usando datos del entorno escolar reflexionando cómo tus decisiones influyen en tus aprendizajes.
- Escucha a tus compañeros cuando expresan sus ideas con respeto y comprensión.

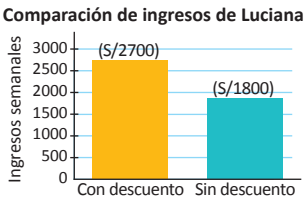
VARIACIÓN PORCENTUAL, INTERESES, AMORTIZACIÓN Y TÉRMINOS FINANCIEROS

Tasa de variación y variación porcentual, términos financieros

Situación: Impacto de un descuento sobre el ingreso

Luciana vendía 15 mochilas por semana a S/120 cada uno. Al bajar sus ventas, aplicó un 25 % de descuento y logró vender el doble. ¿Fue rentable el descuento? Justifica comparando sus ingresos.

Comparamos los ingresos:



- Antes: S/120 por mochila × 15 mochilas = S/1800
- Después: S/90 por mochila × 30 mochilas = S/2700

Hubo un incremento de S/900, lo que indica que el descuento fue rentable. El aumento en las ventas compensó la baja en el precio.

La experiencia anterior permite reconocer que la **tasa de variación** es el valor que indica cuánto aumenta o disminuye una magnitud respecto de su valor inicial.

$$\text{Tasa de variación} = \frac{\text{Valor final} - \text{Valor inicial}}{\text{Valor inicial}}$$

La **variación porcentual** indica el cambio relativo (%).

$$\text{Variación porcentual} = \frac{\text{Tasa de variación}}{\text{pocentual}} = \frac{\text{Valor final} - \text{Valor inicial}}{\text{Valor inicial}} \times 100\,\%$$

- Si el resultado es positivo, hay un aumento.
- Si es negativo, hay una disminución.

Situación: Variación de precios

Una estudiante dice: "Si un producto sube de S/40 a S/50 y otro de S/80 a S/90, la variación porcentual es igual porque ambos subieron S/10". ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.

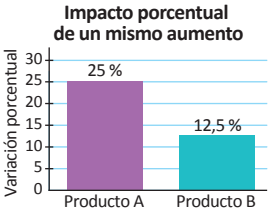
Dos productos aumentan en S/10:

- Producto A: de S/40 a S/50
- Producto B: de S/80 a S/90

Producto	Aumento (S/)	Precio inicial (S/)	Variación porcentual
A(40 → 50)	10	40	25 %
B(80 → 90)	10	80	12,5 %

Aunque ambos aumentan S/10, el impacto no es el mismo. Pues el producto A sube un 25 % y el B sube un 12,5 %. Por lo tanto, el incremento pesa más sobre el producto A, porque su precio base era menor.

En resumen, A sube 25 % y B 12,5 %; la variación porcentual es mayor en A.



Interés simple y compuesto

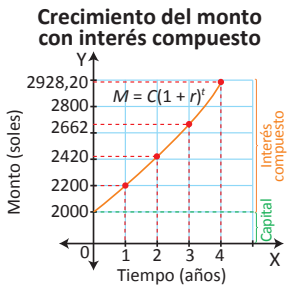
Situación: Ganar sobre lo que ya ganaste

Luis invierte S/2000. El asesor le dice: "Cada vez que ganas intereses, estos se suman al capital y también generan nuevas ganancias". Luis pregunta: "¿Es igual que el interés simple? ¿Por qué ganaría más en este caso?".

Observamos la siguiente tabla:

Año	Interés simple (S/)	Capital acumulado simple (S/)	Interés compuesto (S/)	Capital acumulado compuesto (S/)
0	-	2000	-	2000
1	200	2200	200	2200
2	200	2400	220	2420
3	200	2600	242	2662
4	200	2800	266,20	2928,20

Con interés simple, Luis obtiene la misma ganancia cada año. En cambio, con interés compuesto, los intereses se suman al capital y vuelven a generar intereses, pues cada periodo se calcula sobre un monto mayor, tal como observamos en la gráfica adjunta. La gráfica muestra que, a mayor tiempo, el monto crece más rápido.



De acuerdo con lo analizado, en el **interés compuesto**, el interés generado en cada periodo se suma al capital inicial, formando un nuevo capital sobre el cual se calcula el interés del siguiente periodo. La expresión general es la siguiente:

$$M = C(1 + r)^t$$

donde

- M: monto total al final del periodo
- C: capital inicial
- r: tasa por periodo (ejemplos: mensual, anual)
- t: número total de periodos (ejemplo: tres meses)

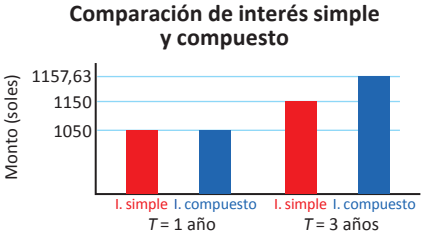
Nota: r y t deben estar expresados en una misma unidad de tiempo (mensual, anual, etc.)

Situación: Análisis de intereses

Un estudiante afirma: "El interés compuesto siempre es mejor que el simple sin importar el tiempo". ¿La afirmación es verdadera o falsa? Sustenta tu respuesta.

Comparamos ambos tipos de interés:

- En un año, ambos intereses generan el mismo monto.
- Con más años, el interés compuesto supera al simple porque también genera intereses sobre los intereses.



Por tanto, al inicio el interés compuesto no supera al interés simple; su ventaja se manifiesta con el paso del tiempo y con un mayor número de capitalizaciones.

Recuerda

El interés simple se puede expresar así:

Interés simple	Tiempo		
	Años	Meses	Días
$I = C \cdot r\% \cdot t$	$I = \frac{C \cdot r\% \cdot t}{100}$	$I = \frac{C \cdot r\% \cdot t}{1200}$	$I = \frac{C \cdot r\% \cdot t}{36000}$
I: interés C: capital	t: tiempo transcurrido r: tasa de interés anual		

Por ejemplo, si tenemos estos datos:

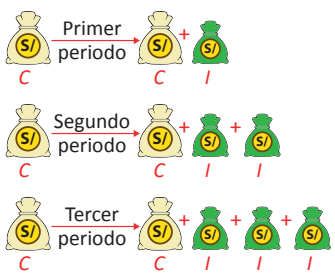
- Capital inicial: C = S/5000
- Tasa anual: r = 4 % = 0,04
- Tiempo: t = 3 años

El interés es el siguiente:
$I = 5000 \times 0{,}04 \times 3 = S/600$

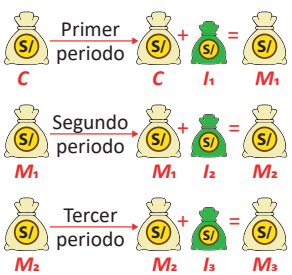
Entonces, el monto total acumulado es el siguiente:
$M = C + I = 5000 + 600 = S/5600$

Ten en cuenta

El interés simple (I) se da cuando el interés generado por el capital no se agrega al capital para generar nuevos intereses. Es constante en cada periodo de tiempo.



El interés compuesto (I) se da cuando el interés generado por el capital se agrega al capital al final de cada periodo para formar un nuevo capital.



Recuerda

Capital (*C*): Cantidad inicial de dinero que se invierte o presta.

Interés (*I*): Ganancia o costo generado por el uso del capital durante un tiempo.

Monto (*M*): Suma total al final del periodo: capital más interés.

Tasa de interés (*r*): Porcentaje aplicado por cada 100 unidades de capital por periodo.

Tiempo (*t*): Duración durante la cual el capital genera interés.

IGV: Impuesto indirecto al consumo (18 % en el Perú).

Ten en cuenta

Tasas y periodos equivalentes

Periodo equivalente	Tasas equivalentes
1 año = 12 meses	24 % anual ↔ 2 % mensual
1 año = 6 bimestres	18 % anual ↔ 3 % bimestral
1 año = 4 trimestres	16 % anual ↔ 4 % trimestral
1 trimestre = 3 meses	2 % mensual ↔ 6 % trimestral

Ten en cuenta

- **Sistema de cuotas constantes:** las cuotas son iguales, los intereses bajan y la amortización del capital sube con el tiempo.
- **Sistema de capital constante:** La amortización es fija por periodo, y los intereses y cuota total disminuyen. Menor interés total.
- **Sistema de intereses periódicos:** solo se pagan intereses, el capital se paga completo al final del plazo.

Sistema de amortización con cuota constante

Situación: Financiamiento en una compra

Pedro financia una *tablet* (S/240 por 12 meses). Él cree que el costo total del equipo es S/2880 y que desde la primera cuota ya está reduciendo la deuda. Su primo afirma que al comienzo se pagan casi solo intereses. ¿Quién acierta? Ilustra con ejemplos la diferencia entre intereses y amortización.

Observamos la siguiente tabla:

Cuota	Pago total (S/)	Interés mensual (S/)	Amortización de capital (S/)	Deuda restante (S/)
0	-	-	-	2880
1	240	48	192	2688
2	240	44,80	195,20	2492,80
3	240	41,55	198,45	2294,35
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
12	240	2,30	237,70	0

Al inicio, Pedro paga sobre todo intereses; luego aumenta la amortización. Los S/2880 incluyen intereses, por lo que el precio real de la *tablet* es menor. Por tanto, su primo tiene razón.

El análisis previo nos muestra que los **sistemas de amortización** permiten pagar préstamos en cuotas periódicas considerando capital (*C*), tasa de interés (*i*), plazo (*n*) y cuota (*R*).

En el sistema de **amortización con cuota constante**, la cuota total es fija. Al inicio se paga más interés y menos capital. Con el tiempo, los intereses bajan y se amortiza más capital.

Fórmula de la cuota constante: $R = \dfrac{C \cdot i}{1 - (1 + i)^{-n}}$

- R: cuota periódica
- C: capital
- i: tasa de interés por periodo
- n: número total de cuotas

Situación: La boleta y el impuesto

Se afirma que el sistema con cuota constante es más conveniente porque se paga lo mismo cada mes. ¿Es correcta esta afirmación? Sustenta tu respuesta.

Supongamos un préstamo con cuota constante.

- Capital: S/6000
- Plazo: 3 meses
- Tasa de interés mensual: 5 %

Cuadro de amortización

Mes	Capital pendiente	Interés (5 %)	Amortización	Cuota total
1	6000	300	1903,25	2203,25
2	4096,75	204,84	1998,41	2203,25
3	2098,34	104,92	2098,34	2203,25

Cuota fija: $R = \dfrac{6000 \times 0{,}05}{1 - (1{,}05)^{-3}} \approx 2203{,}25$

Nota: En esta actividad puedes usar una calculadora.

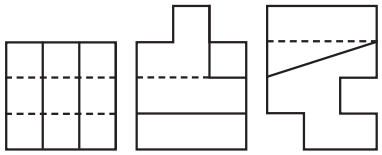
En un sistema de cuota constante, la cuota mensual permanece igual durante todo el periodo. El interés, calculado sobre el saldo pendiente, disminuye mes a mes y, en consecuencia, la amortización aumenta. La afirmación es correcta: se paga el mismo importe.

FORMAS TRIDIMENSIONALES

Construcción de figuras a partir de proyecciones ortogonales

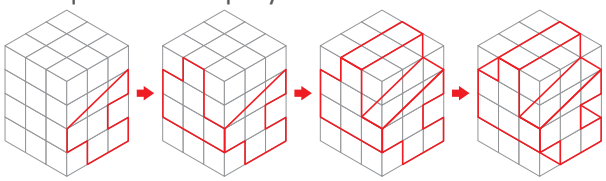
Situación: Ensamblando una pieza faltante

Carlos repara una pieza sólida, pero nota que falta una parte. Solo cuenta con las vistas frontal, lateral derecha y superior. ¿Cómo puede identificar el sólido tridimensional a partir de estas vistas?



A partir de las vistas ortogonales (superior, frontal y lateral), es posible reconstruir el sólido.

Partimos de una vista base (como la lateral) e integramos las demás ajustando el modelo hasta que todas las proyecciones coincidan.



Así, visualizamos la forma completa, detectamos partes ocultas y comprendemos su estructura.

El análisis anterior nos muestra que la **construcción de figuras a partir de proyecciones ortogonales** permite identificar la forma y las dimensiones de un objeto 3D a partir de sus vistas planas (frontal, lateral y superior). Requiere visualización espacial, lógica y nociones geométricas.

Pasos comunes en esta construcción:

a. Identificar coincidencias entre vistas (líneas, alturas y profundidades).

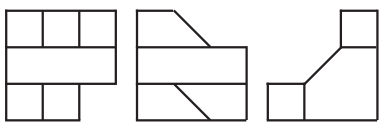
b. Determinar dimensiones reales usando escalas.

c. Relacionar caras visibles para deducir la forma del sólido.

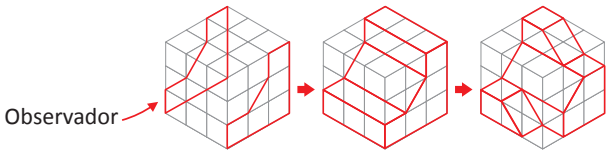
d. Construir el modelo 3D mentalmente en papel o en *software*.

Situación: Discrepancia entre vistas

Masumi diseña una pieza mecánica a partir de sus vistas ortogonales (superior, frontal y lateral). Al construirla con bloques cúbicos, un compañero afirma: "Debe tener 10 bloques y dos planos inclinados". ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.



El sólido tiene 10 bloques: 6 en la base y 4 en niveles superiores.

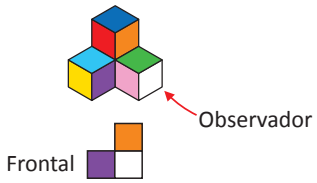


Presenta dos planos inclinados visibles en las vistas frontal y lateral. Por tanto, la afirmación es correcta: el sólido cumple con ambas condiciones según las proyecciones, coincidiendo con las diagonales de las proyecciones.

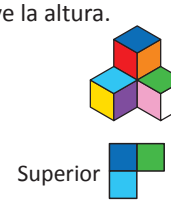
Recuerda

Vistas ortogonales

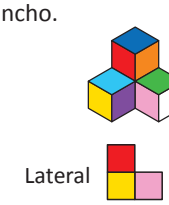
Vista frontal. Muestra altura y ancho. No se ve la profundidad.



Vista superior. Muestra ancho y profundidad. No se ve la altura.



Vista lateral. Muestra altura y profundidad. No se ve el ancho.



Evalúa tus progresos

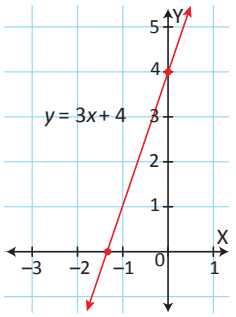
- Representa sólidos tridimensionales complejos mediante proyecciones.
- Emplea estrategias para construir un sólido y aplica análisis de correspondencia para hallar bloques o dimensiones.
- Justifica la composición del sólido con base en las proyecciones, y sustenta la coherencia de la construcción del objeto tridimensional.

¿Sabías que...?

La ecuación de la recta se emplea al modelar relaciones entre el consumo de agua y el tiempo, las tendencias para optimizar captación y almacenamiento. Sustenta tus decisiones responsables y tu participación ciudadana en la gestión eficiente del recurso hídrico.

Recuerda

Una recta es una figura unidimensional que representa un conjunto infinito de puntos colineales. Al representar $y = 3x + 4$, se proyecta este objeto unidimensional en un sistema de referencia bidimensional.



TIC

LOCALIZACIÓN Y MOVIMIENTO EN EL PLANO Y EL ESPACIO

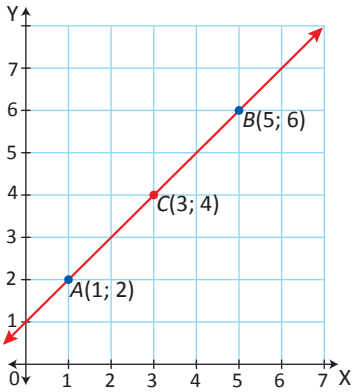
Ecuación de la recta: forma punto-pendiente, ordinaria y general

Situación: Puntos sobre la línea

Una empresa tenderá un cable recto entre dos torres ubicadas en $A(1; 2)$ y $B(5; 6)$. Se desea saber si el poste $C(3; 4)$ está alineado con las torres. ¿El punto C pertenece a la recta que une las torres A y B?

Comparamos los desplazamientos horizontales y verticales desde el punto A.

Desde	Δx desde A	Δy desde A
A a B	$5 - 1 = 4$	$6 - 2 = 4$
A a C	$3 - 1 = 2$	$4 - 2 = 2$



Como las proporciones son iguales en ambas direcciones, entonces

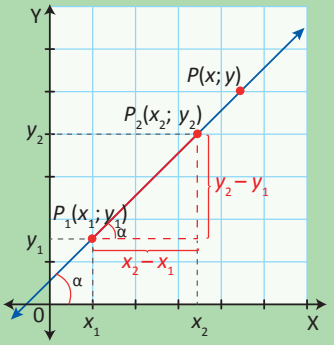
$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2}{2} = 1$, desde A a C

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4}{4} = 1$, desde A a B

Al cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ se le denomina razón de cambio de y respecto a x.

Si las razones entre A y B y entre A y C son iguales, en consecuencia, los puntos A, B y C están alineados, porque todos forman parte de la misma recta, tal como se muestra en la gráfica. El símbolo Δ (delta) indica cuánto varía una cantidad respecto a sus valores inicial y final.

De acuerdo con lo analizado, la **ecuación de la recta** modela una relación lineal entre dos variables: una independiente (x) y otra dependiente (y).



Para definirla se necesita lo siguiente:

- La pendiente m, que indica la inclinación de la recta
- Un punto por el que pasa a la recta

a. Ecuación punto-pendiente

Si se conoce la pendiente m y un punto $P_1(x_1; y_1)$, entonces la ecuación es $y - y_1 = m(x - x_1)$, donde $m = tan\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Permite construir la recta a partir de un punto y su inclinación.

b. Ecuación ordinaria de la recta (pendiente-intersección)

Si se conoce la pendiente m y la intersección con el eje Y (el valor de b), entonces la ecuación es $y = mx + b$, donde

- m: pendiente (razón de cambio de y con respecto a x)
- b: Es el punto donde la recta corta el eje Y; es decir el valor de y cuando $x = 0$.

c. Ecuación general

Forma: $Ax + By + C = 0$; $A, B, C \in \mathbb{R}$, donde A y $B \neq 0$. Además, $m = -\frac{A}{B}$.

Situación: Pendiente de una rampa

Dos estudiantes proponen diseños distintos de rampas, pero ambos afirman: "Como las rampas tienen la misma pendiente, entonces son iguales". ¿Esta afirmación es correcta? Justifica tu respuesta con ejemplos y representaciones.

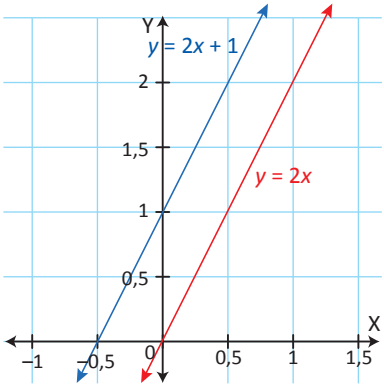
Analizamos la afirmación.

- Tener misma pendiente implica igual inclinación, pero no que sean de la misma recta.
- Si no pasan por un mismo punto, son rectas paralelas.

Ejemplo:

Rampa	Punto de inicio	Pendiente	Ecuación simplificada
A	(1; 2)	$m = 2$	$y = 2x$
B	(0; 1)	$m = 2$	$y = 2x + 1$

Misma pendiente, distintos puntos, rectas paralelas



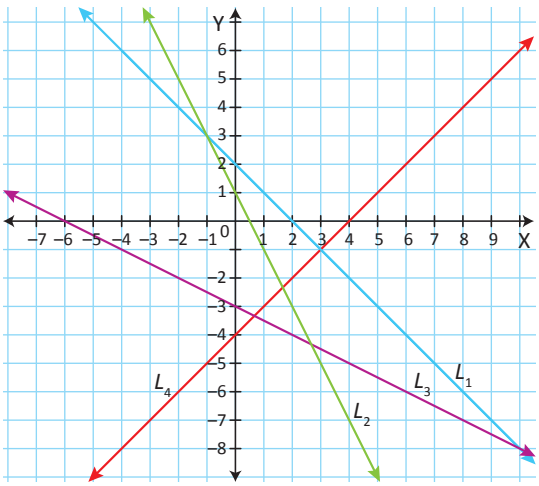
Ambas tienen pendiente 2, pero no son la misma recta: son paralelas; por tanto, la afirmación es falsa.

Dos rampas pueden tener la misma pendiente y ser distintas si no comparten un punto. Para que sean iguales, deben presentar igual pendiente y un punto en común.

Situación: Familia de rectas

En el plano cartesiano, se muestran las rectas L_1, L_2, L_3 y L_4.

Analiza cada una identificando su punto de intersección con los ejes, su pendiente y la ecuación que la representa.



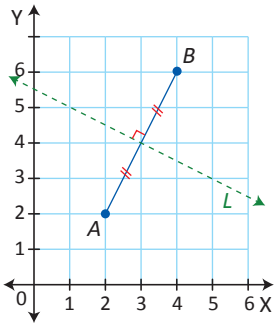
De la gráfica, analizamos la recta L_1 y obtenemos lo siguiente:

Descripción	Resultado
Puntos donde L_1 corta los ejes	Corta el eje X en (2; 0) y el eje Y en (0; 2).
Pendiente de L_1	$m = \frac{2-0}{0-2} = -1$
Ecuación en forma punto-pendiente [usando (2; 0)]	$y - 0 = -1(x - 2) \Rightarrow y = -x + 2$
Ecuación en forma $y = ax + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$	$y = -x + 2$

Empleamos el mismo procedimiento para las demás rectas.

¿Sabías que...?

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular que pasa por el punto medio del mismo.



$m_{AB} \cdot m_L = -1$

L: recta mediatriz a AB

Evalúa tus progresos

- Resuelve situaciones de contexto (como, por ejemplo, la trayectoria de un cable o la pendiente de una rampa) que involucran la ecuación de la recta, e identifica la relación y la pendiente.
- Expresa la ecuación de la recta y comunica el significado de m (pendiente) y b (intercepto), y las gráficas.
- Emplea procedimientos para hallar la pendiente y la ecuación, y reconoce los puntos de intersección, el paralelismo y la perpendicularidad entre dos rectas.
- Justifica la alineación de puntos por la pendiente y sustenta el paralelismo. Evalúa la pendiente como razón de cambio.

¿Sabías que...?

En el siglo XVII, Blaise Pascal y Pierre de Fermat estudiaron la probabilidad en juegos de azar, estableciendo fundamentos matemáticos que más tarde influirían en la estadística moderna.

Recuerda

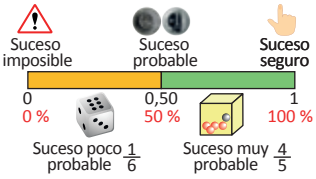
Complemento de un suceso

Se representa como A' y su probabilidad es $P(A') = 1 - P(A)$.



Ten en cuenta

Escala de probabilidad



Practica valores

- Fomenta la práctica de reducir, reutilizar y reciclar materiales u hojas en las actividades del aula.
- Participa reconociendo puntos comunes y reconstruye tus argumentos priorizando la convivencia.

EVENTOS PROBABILÍSTICOS

Probabilidad de sucesos equiprobables: regla de Laplace, propiedades

Situación: Generalización a partir de una muestra

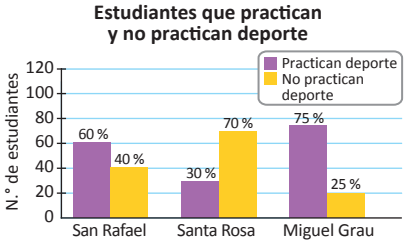
Un estudiante observa la siguiente tabla:

Colegio	Total de estudiantes	Practican deporte
San Rafael	100	60
Santa Rosa	120	36
Miguel Grau	80	60

Luego afirma: "Practicar deporte es un hábito generalizado entre los estudiantes". ¿Es válida su afirmación? Justifica empleando los datos.

De la tabla, apreciamos que los porcentajes por colegio son distintos.

- San Rafael: 60 %
- Santa Rosa: 30 %
- Miguel Grau: 75 %



No hay un patrón común. Además, al ser tres colegios, la muestra no es suficiente ni representativa.

Por tanto, no se puede generalizar. Se necesita más información para afirmar algo con certeza.

A partir de lo trabajado, podemos afirmar que, según la **regla de Laplace**, dado un espacio muestral finito (Ω), en el que todos los resultados tienen la misma posibilidad de ocurrir (equiprobables), la probabilidad de que ocurra el suceso A se denota así: $P(A)$ y se obtiene mediante la siguiente relación:

$$P(A) = \frac{\text{N.° de casos favorables de } A}{\text{N.° de casos posibles}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

donde

- $n(A)$: número de casos favorables al suceso A
- $n(\Omega)$: número total de resultados posibles (espacio muestral)

Propiedades de la probabilidad

Propiedad	Explicación
$0 \leq P(A) \leq 1$	Toda probabilidad está entre 0 y 1.
$P(A) = 0$	Suceso imposible
$P(A) = 1$	Suceso seguro
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	Fórmula general para la unión de sucesos
Si A y B son excluyentes, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	No se superponen (no hay intersección).
Si A y B son independientes, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$	Un suceso no afecta al otro.

Probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes y no excluyentes: regla de la adición

Situación: Suma de probabilidades

Un grupo de estudiantes está jugando con una baraja de 52 cartas, en la que hay, entre otras cartas, 13 corazones, 4 ases y 4 sietes. Uno de ellos propone analizar tres sucesos posibles al extraer una sola carta al azar.



a. X: la carta que obtiene es de **corazón**.

b. Y: la carta que obtiene es un **as**.

c. Z: la carta que obtiene es un **siete**.

Luego afirma: "Para calcular la probabilidad de que ocurra alguno de estos eventos, basta con sumar sus probabilidades individuales".

$$P(Y \cup Z) = P(Y) + P(Z) = \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$$

$$P(X \cup Z) = P(X) + P(Z) = \frac{13}{52} + \frac{4}{52} = \frac{17}{52}$$

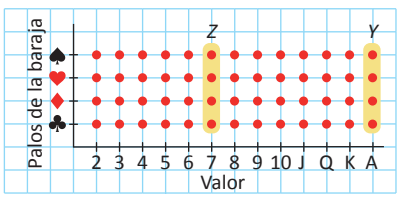
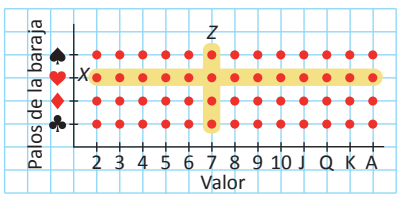
¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta utilizando procedimientos y representaciones.

En la baraja, hay esto:

- 13 cartas de corazones $\longrightarrow P(X) = \frac{13}{52}$
- 4 ases $\longrightarrow P(Y) = \frac{4}{52}$
- 4 sietes $\longrightarrow P(Z) = \frac{4}{52}$

Ahora analizamos si hay cartas que pertenezcan a más de un suceso.

- $X \cap Y$: as de corazones $\longrightarrow P(X \cap Y) = \frac{1}{52}$
- $X \cap Z$: siete de corazones $\longrightarrow P(X \cap Z) = \frac{1}{52}$
- $Y \cap Z$: no tienen cartas en común. $\longrightarrow P(Y \cap Z) = 0$

Para el suceso $Y \cup Z$	Para el suceso $X \cup Z$
	
Son sucesos mutuamente excluyentes y no hay cartas en común; por tanto, $P(Y \cup Z) = P(Y) + P(Z)$ $= \frac{4}{52} + \frac{4}{52} = \frac{8}{52}$	Comparten una carta: el siete de corazones. No se pueden sumar directamente las probabilidades. Se debe restar la intersección. $P(X \cup Z) = P(X) + P(Z) - P(X \cap Z)$ $= \frac{13}{52} + \frac{4}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52}$

La afirmación no es correcta. Solo se pueden sumar directamente las probabilidades si los eventos no tienen resultados en común. En el caso de $X \cup Z$, hay una carta que pertenece a ambos eventos, por lo que se debe aplicar la fórmula general para evitar contarla dos veces.

Ten en cuenta

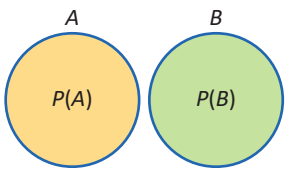
Un **suceso** es un posible resultado de una acción que depende del azar. Este puede ser de la siguiente manera:

- **Seguro:** Si ocurre siempre. Ejemplo: los lados opuestos de un dado suman 7.
- **Posible o probable:** Si ocurre algunas veces. Ejemplo: tirar un dado enumerado del 1 al 6 y que salga 4.
- **Imposible:** Si no ocurre nunca. Ejemplo: tirar un dado enumerado del 1 al 6 y que salga 0.

Recuerda

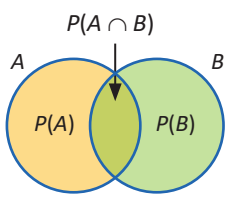
La **regla de la adición** establece que la probabilidad de que ocurran al menos dos eventos A y B es la siguiente:

- Cuando A y B son sucesos mutuamente excluyentes.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

- Cuando A y B son sucesos no excluyentes.

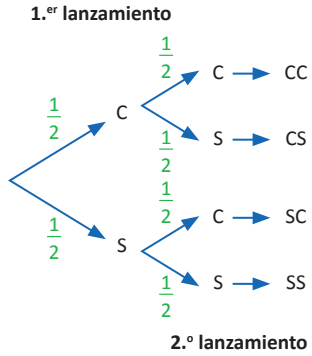


$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Ten en cuenta

La **probabilidad de sucesos independientes** se obtiene multiplicando sus probabilidades individuales. Por ejemplo, ¿cuál es la probabilidad de sacar cara (C) o sello (S) al lanzar una moneda dos veces?

Aplica el diagrama de árbol.



Las probabilidades son:

$P(CS) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P(SC) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

Suma las probabilidades halladas.

$P(CS) + P(SC) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$

Recuerda

La **tabla de contingencia** es una herramienta que representa y compara frecuencias para analizar la dependencia o independencia entre dos eventos probabilísticos.

Por ejemplo, en la tabla se muestra el estado civil de 100 personas (soltero: S; casado: C).

	S	C	Total
Varón	25	45	70
Mujer	16	14	30
Total	41	59	100

Probabilidad de sucesos independientes y dependientes

Situación: Quehaceres en casa

Amanda, Diego y Valeria sortean quién cocina y quién lava. A veces devuelven el papel al sorteo; otras veces, no. Amanda dice que si se devuelve, alguien puede salir dos veces. Diego dice que eso no cambia. ¿Quién tienen razón? Justifica tu respuesta.

Observamos las siguientes tablas:

Sorteo con devolución

Lava \ Cocina	Amanda	Diego	Valeria
Amanda	Amanda-Amanda	Amanda-Diego	Amanda-Valeria
Diego	Diego-Amanda	Diego-Diego	Diego-Valeria
Valeria	Valeria-Amanda	Valeria-Diego	Valeria-Valeria

De las nueve combinaciones (3 × 3), existe al menos una donde la misma persona cocina y lava; por tanto, Amanda tiene razón.

Sorteo sin devolución

Lava \ Cocina	Amanda	Diego	Valeria
Amanda		Amanda-Diego	Amanda-Valeria
Diego	Diego-Amanda		Diego-Valeria
Valeria	Valeria-Amanda	Valeria-Diego	

De la información no se permite repetir persona; las asignaciones deben ser con personas distintas. Con esa restricción, hay seis combinaciones (3 × 2), así que Diego no tiene razón: las combinaciones sí cambian.

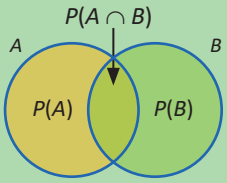
La experiencia anterior permite reconocer las siguientes probabilidades:

Probabilidad de sucesos independientes. Dos sucesos A y B son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad del otro. Se cumple lo siguiente:

- $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B)$

Probabilidad de sucesos dependientes: Dos sucesos A y B son dependientes si la ocurrencia de uno afecta la probabilidad de que ocurra el otro. Es decir, si

$P(A|B) \neq P(A)$ o $P(B|A) \neq P(B)$



Para calcular esta relación, se usa la probabilidad condicional.

$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ si $P(B) > 0$, donde

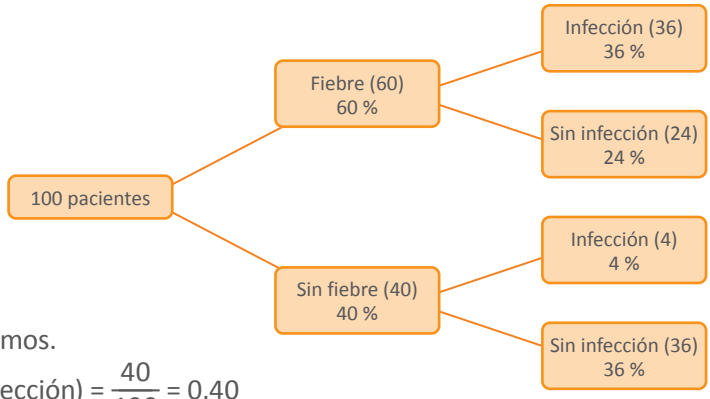
- $P(A|B)$: probabilidad de que ocurra A, dado que ocurrió B
- $P(A \cap B)$: probabilidad de que ocurran A y B al mismo tiempo
- $P(B)$: probabilidad de que ocurra B. Además, se aprecia en el diagrama que el espacio muestral es el conjunto B.

Situación: Campaña médica

Durante una campaña médica, se atendió a 100 pacientes. De ellos, 60 presentaban fiebre y 40 no. También se registró si tenían una infección, tal como se muestra en el diagrama. Una voluntaria comentó: "Tener fiebre no significa tener una infección. Son sucesos independientes". ¿Es correcta su afirmación? Justifica tu respuesta.

Observamos las combinaciones posibles en el diagrama.

Diagrama de árbol: Fiebre e infección



Calculamos.

- $P(\text{infección}) = \frac{40}{100} = 0{,}40$
- $P(\text{infección}|\text{fiebre}) = \frac{36}{60} = 0{,}60$

Como $P(\text{infección}|\text{fiebre}) \neq P(\text{infección})$, entonces los sucesos no son independientes.

La afirmación de la voluntaria es incorrecta. El análisis de la probabilidad condicional permite descubrir si hay dependencia entre eventos, incluso cuando al inicio parecen no estar relacionados entre sí.

Situación: Producción diaria

Una empresa revisa su producción diaria de pernos. En un día, registró la siguiente información sobre el estado de los pernos:

Estado de la pieza	Revisado	No revisado	Total
Defectuoso	18	2	20
No defectuoso	42	38	80
Total	60	40	100

¿Tener un perno defectuoso influye en la probabilidad de que sea revisado? Justifica tu respuesta.

Desarrollamos.

- $P(\text{revisado}) = \frac{60}{100} = 0{,}60$
- $P(\text{revisado}|\text{defectuoso}) = \frac{18}{20} = 0{,}90$

El espacio muestral se restringe a los productos defectuosos.

Como $P(\text{revisado}|\text{defectuoso}) \neq P(\text{revisado})$, los sucesos son dependientes. Por lo tanto, saber que un perno es defectuoso modifica la probabilidad de que sea revisado.

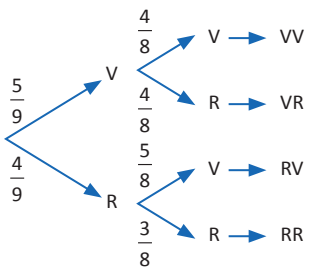
Ten en cuenta

La **probabilidad de sucesos dependientes** se obtienen multiplicando la probabilidad del primer suceso por la probabilidad del segundo, considerando que el primero ya ocurrió.

Por ejemplo, una caja contiene cinco fichas de color verde y cuatro de color rojo. Si dos fichas son extraídas al azar sin reposición, ¿cuál es la probabilidad de que la segunda ficha sea verde si se sabe que la primera ha sido roja?

Aplica el diagrama de árbol.

1.ª extracción



2.ª extracción

$P(\text{RV}) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} = \frac{5}{18}$

Por lo tanto, se tiene una probabilidad igual a $\frac{5}{18}$ o 0,28 o 28 %.

Evalúa tus progresos

- Representa datos y las relaciones probabilísticas con tablas y diagramas, y comunica los resultados.
- Justifica si dos o más eventos son dependientes o independientes, evalúa las afirmaciones y argumenta cómo las ocurrencias afectan la probabilidad para tomar decisiones.

Actividad lúdica



¡Reflexiona en el juego! Observa sus reglas, elabora una estrategia ganadora y comunica tus ideas con sentido matemático.

Los retos del oráculo probabilístico

1. Situación

En la Biblioteca del Oráculo, cuatro reliquias matemáticas han permanecido protegidas por acertijos probabilísticos que, durante siglos, ningún sabio ha logrado descifrar…

¡Pero ustedes, estudiantes de la Orden Matemágica, han sido convocados para desbloquearlas! Cada uno de los desafíos pondrán a prueba sus conocimientos sobre la probabilidad de sucesos dependientes e independientes.

Solamente quienes resuelvan todos los enigmas podrán acceder al preciado anillo probabilístico del saber. ¡Empecemos, tú puedes!



2. Reglas

Para abordar esta situación, toma en cuenta las siguientes reglas:

a. Equipos de cuatro jugadores: roles

- Guardián del oráculo: lee y guía la resolución del reto.
- Constructor de diagramas: completa los gráficos (diagramas de árbol y de Venn, y tabla de doble entrada).
- Lector de afirmaciones: verifica las condiciones y refuta afirmaciones falsas.
- Sabio de las evidencias: justifica las respuestas y explica los errores cometidos.

b. El juego se divide en cuatro estaciones, que los integrantes deberán recorrer en un tiempo limitado. En cada estación, realizarán lo siguiente:

- Leer la situación del reto.
- Completar el gráfico o diagrama correspondiente.
- Identificar y refutar una afirmación falsa.
- Justificar y argumentar la probabilidad calculada para obtener una reliquia.

c. El equipo con más reliquias al final del tiempo gana el cristal del azar supremo.

Tu propósito de aprendizaje

Modela y representa situaciones probabilísticas complejas y expresa el espacio muestral condicionado. Emplea procedimientos para hallar probabilidades y justifica la dependencia o independencia. Refuta afirmaciones falsas y sustenta la toma de decisiones en el juego.

Practica valores

- Realiza un uso eficiente del papel y los materiales reduciendo residuos y reutilizando cada hoja durante las tareas.
- Respeta los acuerdos para fortalecer la convivencia y el orden en el equipo.

3. Desarrollo

En el transcurso de la actividad, considera los siguientes aspectos:

Desafío 1: Las puertas del azar oculto

Tema: Sucesos dependientes e independientes

- Consigna: Clasifiquen las situaciones presentadas como sucesos dependientes o independientes. Justifiquen su elección con un razonamiento claro.
- Afirmación falsa: "Si saco dos cartas de una baraja sin devolver la primera, los eventos son independientes".
- Acción: Relacionen los casos con los cambios en el espacio muestral y expliquen cómo la dependencia o independencia influye en el cálculo de probabilidades.

Desafío 2: El tablero del equilibrio

Tema: Probabilidad conjunta y condicional

- Consigna: Completen la tabla de doble entrada con los valores faltantes. Calculen $P(A \cap B)$, $P(A)$ y $P(B|A)$.
- Afirmación falsa: "La probabilidad condicional se obtiene dividiendo cualquier frecuencia por el total de la tabla".
- Acción: Reflexionen sobre el significado de condicionar el espacio muestral al calcular probabilidades condicionales.

Desafío 3: Los círculos del destino

Tema: Intersección de eventos con diagrama de Venn

- Consigna: Completen las zonas faltantes del diagrama de Venn según la situación. Expliquen qué representa cada sección.
- Afirmación falsa: "Si dos sucesos son independientes, entonces no se intersecan".
- Acción: Expliquen la intersección en eventos independientes y cómo cambia su probabilidad cuando los sucesos son dependientes.

Desafío 4: El árbol del oráculo

Tema: Probabilidad total con árbol incompleto

- Consigna: Completen las ramas del diagrama de árbol; luego, calculen la probabilidad total de un evento indicado.
- Afirmación falsa: "Todos los caminos del árbol tienen la misma probabilidad".
- Acción: Verifiquen si la suma de probabilidades por nivel es 1 y si las ramas son dependientes entre sí.

3. Reflexión

Responde estas preguntas como guía para autoevaluar lo aprendido:

a. ¿Qué les ayudó a identificar si un suceso era dependiente o independiente y cómo determinar la probabilidad condicional?

b. ¿Cómo aplicarían estos conceptos en situaciones cotidianas (por ejemplo, en decisiones o predicciones)?

c. ¿Cómo se sintieron al jugar y qué aprendieron sobre la probabilidad a través de la actividad?

Evalúa tus progresos

- Resuelve problemas que involucran situaciones de azar y las transforma en probabilidad, identificando el espacio muestral y la dependencia.
- Representa problemas con tablas, diagramas y notación.
- Aplica fórmulas de probabilidad conjunta, condicional y total.
- Justifica la dependencia y argumenta las probabilidades para decidir.

Referencias bibliográficas

- Agencia Agraria de Noticias. (2023). *Agro Rural ejecuta acciones preventivas de siembra y cosecha de agua para la adaptación al cambio climático*. https://agraria.pe/noticias/agro-rural-ejecuta-acciones-preventivas-de-siembra-y-cosecha-33621
- Aguilar, G. (s. f.). Mapa de reforestación Campamento km 221+046 [Mapa]. Scribd. https://es.scribd.com/document/490559200/10-Mapa-de-reforestacion-Campamento-Km-221-046
- Agro Perú. (2023). *Arequipa: Construirán 45 qochas en seis distritos altoandinos de Arequipa.* https://www.agroperu.pe/arequipa-construiran-45-qochas-en-seis-distritos-altoandinos-de-arequipa/
- Andina. (2025). *Peruanos crean sistema que capta agua de lluvia para ser usada en lavanderías y duchas*. https://andina.pe/agencia/noticia-peruanos-crean-sistema-capta-agua-lluvia-para-ser-usada-lavanderias-y-duchas-912163.aspx
- Centro de Investigación de Economía y Negocios Globales - CIEN. (2025). *Envases y embalajes: evolución del mercado internacional y nacional*. https://cien.adexperu.org.pe/wp-content/uploads/2025/09/NC_EnvasesyEmbalajes_Set2025_vf.pdf
- Calvay, J. (2023). *El uso de las TIC en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en estudiantes de tercer grado de secundaria* [Tesis de licenciatura, Universidad de Piura].
- Centro Nacional de Planteamiento Estratégico - Ceplan. (2022). *Análisis de la deforestación y pérdida de vegetación a nivel nacional y el impacto a nivel regional.* https://geo.ceplan.gob.pe/uploads/Analisis_deforestacion.pdf
- Ciencias Ambientales. (2017). *Conclusiones del estudio "Envases y embalajes: percepción de la sociedad"*. https://www.cienciasambientales.com/es/noticias-ambientales/conclusiones-estudio-envases-embalajes-percepcion-sociedad-afco-14210
- *Diario Correo*. (2021). *Sismo en Lima: 126 afectados en Villa María del Triunfo tras temblor de magnitud 6, según ministra de Vivienda*. https://diariocorreo.pe/edicion/lima/sismo-en-lima-126-afectados-en-villa-maria-del-triunfo-tras-temblor-de-magnitud-6-segun-ministra-de-vivienda-sismo-en-mala-nndc-noticia/
- Dirección Nacional de Recursos Acuáticos - Dinara. (2010). *Manual básico de piscicultura en estanques*. https://rnia.produce.gob.pe/wp-content/uploads/2020/08/Manual-basico-de-piscicultura-en-estanques.pdf
- *El Comercio*. (2024). *Ejecutivo anuncia reperfilamiento de deuda pública para el 2025, ¿qué significa esto?* https://elcomercio.pe/economia/presupuesto-publico-2025-ejecutivo-anuncia-reperfilamiento-de-deuda-publica-para-el-2025-que-significa-esto-mef-bonos-soberanos-seguridad-ciudadana-noticia/
- *El Peruano*. (2023). *Produce establece veda de trucha arco iris en Huancavelica*. https://www.elperuano.pe/noticia/213571-produce-establece-veda-de-trucha-arco-iris-en-huancavelica
- Enciso, A. (2019). *Rendimiento económico del cultivo de tilapia gris* Oreochromis niloticus *(Linnaeus, 1758) en la zona del Huallaga central, región San Martín* [Tesis de título profesional de ingeniero, Universidad Nacional Federico Villarreal]. https://repositorio.unfv.edu.pe/bitstream/handle/20.500.13084/4013/ENCISO%20AYALA%20ANGELO%20JOSE%20-%20TITULO%20PROFESIONAL%20.pdf?sequence=1&isAllowed=y
- Fondo Nacional de Desarrollo Pesquero - Fondepes. (2004). *Manual de cultivo de tilapia*. https://rnia.produce.gob.pe/wp-content/uploads/2019/09/Manual-de-Tilapia.pdf
- Goonerua. (s. f.). *Trabajadores isométricos en fábrica de leche* [Imagen]. Freepik. https://www.freepik.es/vector-premium/trabajadores-isometricos-fabrica-leche_10372599.htm#fromView=image_search&page=1&position=28&uuid=f87dd54f-cec1-4094-aaf0-5a36a9c08340
- InfoAgrónomo. (2023). *Marcos de plantación*. https://infoagronomo.net/manual-marcos-de-plantacion-pdf/
- Infobae. (2024). *La comida subió de precio en los restaurantes de Perú por los costos de productos, según INEI: "Es inevitable"*. https://www.infobae.com/peru/2024/03/02/la-comida-subio-de-precio-en-los-restaurantes-de-peru-por-los-costos-de-productos-segun-inei-es-inevitable/
- Instituto Nacional de Estadística e Informática - INEI. (2025). *Precios al consumidor de Lima Metropolitana disminuyeron 0,09 % en el mes de enero de 2025*. https://www.gob.pe/institucion/inei/noticias/1101121-precios-al-consumidor-de-lima-metropolitana-disminuyeron-0-09-en-el-mes-de-enero-de-2025

- Instituto Nacional de Estadística e Informática - INEI. (2025). *Precios al consumidor de Lima Metropolitana reportaron una ligera alza de 0,01 % en setiembre de 2025*. https://www.gob.pe/institucion/inei/noticias/1255785-inei-precios-al-consumidor-de-lima-metropolitana-reportaron-una-ligera-alza-de-0-01-en-setiembre-de-2025
- Instituto Nacional de Estadística e Informática - INEI. (2022). *Acceso a los servicios básicos en el Perú 2021.* https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib1863/libro.pdf
- Leal, C., y Pacheco, P. (2019). *Cálculo de costos de construcción e instalación de una piscícola*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. https://repository.udistrital.edu.co/items/9fa0a834-b5b6-43fe-a174-52b277f314be
- Machupicchu Terra. (s. f.). *Guiado turístico privado en el Valle Sagrado de los Incas*. https://www.machupicchuterra.com/es/cusco/urubamba/guiado-turistico-privado-valle-sagrado-incas/
- Macrovector. (s. f.). *Ilustración isométrica de la oficina* [Imagen]. Freepik. https://www.freepik.es/vector-gratis/ilustracion-isometrica-oficina_3791476.htm#fromView=image_search&page=1&position=0&uuid=8c979363-182b-4953-bb6a-41baf9d3d978
- Malomuzh, S. (2024). Monte Aragats y Canal Kasagh cerca del Monte Ara (provincia de Aragatsotn, Armenia) [Fotografía]. Shutterstock. https://www.shutterstock.com/image-photo/mount-aragats-kasagh-channel-near-ara-2531989387
- Medina, C. (2023). *Plan de negocios para la implementación de un restaurante de alta cocina peruana en pescados y mariscos* [Tesis de licenciatura, Universidad de Lima]. https://repositorio.ulima.edu.pe/bitstream/handle/20.500.12724/21974/T018_70463302_T.pdf;jsessionid=E43DEE5F9DFE3910FBE80D76894D6B31?sequence=1
- Ministerio del Ambiente del Perú - Minam. (2009). *Plan de Reforestación Regional de Arequipa.* https://sinia.minam.gob.pe/documentos/plan-reforestacion-regional-arequipa
- Ministerio de Agricultura y Riego - Midagri. (2017). *Aprovechamiento de los recursos hídricos para uso agrario.* https://www.midagri.gob.pe/portal/download/programas-presupuestales/inf-programa/anexo2-pp42-2017.pdf
- Ministerio de Comercio Exterior y Turismo - Mincetur. (2009). *Guía de envases y embalajes*. https://www2.congreso.gob.pe/sicr/cendocbib/con4_uibd.nsf/FA47F265788D9E3405257EBA005CC2F9/$FILE/Gu%C3%ADa_Envases_y_Embalaje.pdf
- Ministerio de Educación del Perú - Minedu. (2024). *Fichas de Matemática 5*. https://www.perueduca.pe/#/home/materiales-educativos/detalle/fichas-de-matematica-5-grado-de-secundaria
- Ministerio de la Producción del Perú - Produce. (2022). *Manual para una acuicultura sostenible. Cultivo de trucha.* https://rnia.produce.gob.pe/wp-content/uploads/2022/09/Manual-de-Trucha-1.pdf
- PanuShot. (2024). *Una reunión en un escritorio de oficina se centra en el trabajo en equipo* [Fotografía]. Shutterstock. https://www.shutterstock.com/es/image-photo/meeting-office-desk-focuses-on-teamwork-2490300215
- Reezky Pradata. (2020). *Hermosa terraza de arrozales con fondo de montaña y cielo azul en Tawangmangu* [Fotografía]. Shutterstock. https://www.shutterstock.com/image-photo/beautiful-rice-fields-terrace-mountain-background-1829599346
- Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú - Senamhi. (2023). *Informe técnico: Análisis de déficit de lluvias en la región andina 2022-2023*. https://cdn.www.gob.pe/uploads/document/file/4903063/INFORME%20N%C2%B002-%202023_SENAMHI-DMA-DHI-DAM_FFF%5BF%5D%5BF%5D%5BF%5D%5BF%5D.pdf?v=1690305268
- Servicio Nacional de Meteorología e Hidrología del Perú - Senamhi. (2024). *Informe técnico: Condiciones actuales de precipitación y perspectivas climáticas, hidrológicas y agrometeorológicas en la región andina.* https://sinia.minam.gob.pe/sites/default/files/archivos/public/docs/Informe%2001_2024_SENAMHI.pdf
- Superintendencia de Banca, Seguros y AFP. (2025). *Tasa de interés promedio del sistema de cajas rurales de ahorro y crédito*. https://www.sbs.gob.pe/app/pp/EstadisticasSAEEPortal/Paginas/TIActivaTipoCreditoEmpresa.aspx?tip=R
- Sociedad de Comercio Exterior del Perú - Comex Perú. (2014). *Las micro y pequeñas empresas en el Perú - Resultados en 2024*. https://www.comexperu.org.pe/upload/articles/reportes/reporte-mypes-2024.pdf
- The Weather Channel. (s. f.). *Huánuco*. https://weather.com/es-GT/tiempo/horario/l/8eb5b5d1e0b97129ab6035364debba74a0a6da1e4343ec3ec991bc46fcf3c2b0

CARTA DEMOCRÁTICA INTERAMERICANA

I
La democracia y el sistema interamericano

Artículo 1
Los pueblos de América tienen derecho a la democracia y sus gobiernos la obligación de promoverla y defenderla.
La democracia es esencial para el desarrollo social, político y económico de los pueblos de las Américas.
Artículo 2
El ejercicio efectivo de la democracia representativa es la base del estado de derecho y los regímenes constitucionales de los Estados Miembros de la Organización de los Estados Americanos. La democracia representativa se refuerza y profundiza con la participación permanente, ética y responsable de la ciudadanía en un marco de legalidad conforme al respectivo orden constitucional.
Artículo 3
Son elementos esenciales de la democracia representativa, entre otros, el respeto a los derechos humanos y las libertades fundamentales; el acceso al poder y su ejercicio con sujeción al estado de derecho; la celebración de elecciones periódicas, libres, justas y basadas en el sufragio universal y secreto como expresión de la soberanía del pueblo; el régimen plural de partidos y organizaciones políticas; y la separación e independencia de los poderes públicos.
Artículo 4
Son componentes fundamentales del ejercicio de la democracia la transparencia de las actividades gubernamentales, la probidad, la responsabilidad de los gobiernos en la gestión pública, el respeto por los derechos sociales y la libertad de expresión y de prensa.
La subordinación constitucional de todas las instituciones del Estado a la autoridad civil legalmente constituida y el respeto al estado de derecho de todas las entidades y sectores de la sociedad son igualmente fundamentales para la democracia.
Artículo 5
El fortalecimiento de los partidos y de otras organizaciones políticas es prioritario para la democracia. Se deberá prestar atención especial a la problemática derivada de los altos costos de las campañas electorales y al establecimiento de un régimen equilibrado y transparente de financiación de sus actividades.
Artículo 6
La participación de la ciudadanía en las decisiones relativas a su propio desarrollo es un derecho y una responsabilidad. Es también una condición necesaria para el pleno y efectivo ejercicio de la democracia.
Promover y fomentar diversas formas de participación fortalece la democracia.

II
La democracia y los derechos humanos

Artículo 7
La democracia es indispensable para el ejercicio efectivo de las libertades fundamentales y los derechos humanos, en su carácter universal, indivisible e interdependiente, consagrados en las respectivas constituciones de los Estados y en los instrumentos interamericanos e internacionales de derechos humanos.
Artículo 8
Cualquier persona o grupo de personas que consideren que sus derechos humanos han sido violados pueden interponer denuncias o peticiones ante el sistema interamericano de promoción y protección de los derechos humanos conforme a los procedimientos establecidos en el mismo.
Los Estados Miembros reafirman su intención de fortalecer el sistema interamericano de protección de los derechos humanos para la consolidación de la democracia en el Hemisferio.
Artículo 9
La eliminación de toda forma de discriminación, especialmente la discriminación de género, étnica y racial, y de las diversas formas de intolerancia, así como la promoción y protección de los derechos humanos de los pueblos indígenas y los migrantes y el respeto a la diversidad étnica, cultural y religiosa en las Américas, contribuyen al fortalecimiento de la democracia y la participación ciudadana.
Artículo 10
La promoción y el fortalecimiento de la democracia requieren el ejercicio pleno y eficaz de los derechos de los trabajadores y la aplicación de normas laborales básicas, tal como están consagradas en la Declaración de la Organización Internacional del Trabajo (OIT) relativa a los Principios y Derechos Fundamentales en el Trabajo y su Seguimiento, adoptada en 1998, así como en otras convenciones básicas afines de la OIT. La democracia se fortalece con el mejoramiento de las condiciones laborales y la calidad de vida de los trabajadores del Hemisferio.

III
Democracia, desarrollo integral y combate a la pobreza

Artículo 11
La democracia y el desarrollo económico y social son interdependientes y se refuerzan mutuamente.
Artículo 12
La pobreza, el analfabetismo y los bajos niveles de desarrollo humano son factores que inciden negativamente en la consolidación de la democracia. Los Estados Miembros de la OEA se comprometen a adoptar y ejecutar todas las acciones necesarias para la creación de empleo productivo, la reducción de la pobreza y la erradicación de la pobreza extrema, teniendo en cuenta las diferentes realidades y condiciones económicas de los países del Hemisferio. Este compromiso común frente a los problemas del desarrollo y la pobreza también destaca la importancia de mantener los equilibrios macroeconómicos y el imperativo de fortalecer la cohesión social y la democracia.
Artículo 13
La promoción y observancia de los derechos económicos, sociales y culturales son consustanciales al desarrollo integral, al crecimiento económico con equidad y a la consolidación de la democracia en los Estados del Hemisferio.
Artículo 14
Los Estados Miembros acuerdan examinar periódicamente las acciones adoptadas y ejecutadas por la Organización encaminadas a fomentar el diálogo, la cooperación para el desarrollo integral y el combate a la pobreza en el Hemisferio, y tomar las medidas oportunas para promover estos objetivos.
Artículo 15
El ejercicio de la democracia facilita la preservación y el manejo adecuado del medio ambiente. Es esencial que los Estados del Hemisferio implementen políticas y estrategias de protección del medio ambiente, respetando los diversos tratados y convenciones, para lograr un desarrollo sostenible en beneficio de las futuras generaciones.
Artículo 16
La educación es clave para fortalecer las instituciones democráticas, promover el desarrollo del potencial humano y el alivio de la pobreza y fomentar un mayor entendimiento entre los pueblos. Para lograr estas metas, es esencial que una educación de calidad esté al alcance de todos, incluyendo a las niñas y las mujeres, los habitantes de las zonas rurales y las personas que pertenecen a las minorías.

IV
Fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática

Artículo 17
Cuando el gobierno de un Estado Miembro considere que está en riesgo su proceso político institucional democrático o su legítimo ejercicio del poder, podrá recurrir al Secretario General o al Consejo Permanente a fin de solicitar asistencia para el fortalecimiento y preservación de la institucionalidad democrática.
Artículo 18
Cuando en un Estado Miembro se produzcan situaciones que pudieran afectar el desarrollo del proceso político institucional democrático o el legítimo ejercicio del poder, el Secretario General o el Consejo Permanente podrá, con el consentimiento previo del gobierno afectado, disponer visitas y otras gestiones con la finalidad de hacer un análisis de la situación. El Secretario General elevará un informe al Consejo Permanente, y éste realizará una apreciación colectiva de la situación y, en caso necesario, podrá adoptar decisiones dirigidas a la preservación de la institucionalidad democrática y su fortalecimiento.
Artículo 19
Basado en los principios de la Carta de la OEA y con sujeción a sus normas, y en concordancia con la cláusula democrática contenida en la Declaración de la ciudad de Quebec, la ruptura del orden democrático o una alteración del orden constitucional que afecte gravemente el orden democrático en un Estado Miembro constituye, mientras persista, un obstáculo insuperable para la participación de su gobierno en las sesiones de la Asamblea General, de la Reunión de Consulta, de los Consejos de la Organización y de las conferencias especializadas, de las comisiones, grupos de trabajo y demás órganos de la Organización.
Artículo 20
En caso de que en un Estado Miembro se produzca una alteración del orden constitucional que afecte gravemente su orden democrático, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá solicitar la convocatoria inmediata del Consejo Permanente para realizar una apreciación colectiva de la situación y adoptar las decisiones que estime conveniente.
El Consejo Permanente, según la situación, podrá disponer la realización de las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.
Si las gestiones diplomáticas resultaren infructuosas o si la urgencia del caso lo aconsejare, el Consejo Permanente convocará de inmediato un período extraordinario de sesiones de la Asamblea General para que ésta adopte las decisiones que estime apropiadas, incluyendo gestiones diplomáticas, conforme a la Carta de la Organización, el derecho internacional y las disposiciones de la presente Carta Democrática.
Durante el proceso se realizarán las gestiones diplomáticas necesarias, incluidos los buenos oficios, para promover la normalización de la institucionalidad democrática.
Artículo 21
Cuando la Asamblea General, convocada a un período extraordinario de sesiones, constate que se ha producido la ruptura del orden democrático en un Estado Miembro y que las gestiones diplomáticas han sido infructuosas, conforme a la Carta de la OEA tomará la decisión de suspender a dicho Estado Miembro del ejercicio de su derecho de participación en la OEA con el voto afirmativo de los dos tercios de los Estados Miembros. La suspensión entrará en vigor de inmediato.
El Estado Miembro que hubiera sido objeto de suspensión deberá continuar observando el cumplimiento de sus obligaciones como miembro de la Organización, en particular en materia de derechos humanos.
Adoptada la decisión de suspender a un gobierno, la Organización mantendrá sus gestiones diplomáticas para el restablecimiento de la democracia en el Estado Miembro afectado.
Artículo 22
Una vez superada la situación que motivó la suspensión, cualquier Estado Miembro o el Secretario General podrá proponer a la Asamblea General el levantamiento de la suspensión. Esta decisión se adoptará por el voto de los dos tercios de los Estados Miembros, de acuerdo con la Carta de la OEA.

V
La democracia y las misiones de observación electoral

Artículo 23
Los Estados Miembros son los responsables de organizar, llevar a cabo y garantizar procesos electorales libres y justos.
Los Estados Miembros, en ejercicio de su soberanía, podrán solicitar a la OEA asesoramiento o asistencia para el fortalecimiento y desarrollo de sus instituciones y procesos electorales, incluido el envío de misiones preliminares para ese propósito.
Artículo 24
Las misiones de observación electoral se llevarán a cabo por solicitud del Estado Miembro interesado. Con tal finalidad, el gobierno de dicho Estado y el Secretario General celebrarán un convenio que determine el alcance y la cobertura de la misión de observación electoral de que se trate. El Estado Miembro deberá garantizar las condiciones de seguridad, libre acceso a la información y amplia cooperación con la misión de observación electoral.
Las misiones de observación electoral se realizarán de conformidad con los principios y normas de la OEA. La Organización deberá asegurar la eficacia e independencia de estas misiones, para lo cual se las dotará de los recursos necesarios. Las mismas se realizarán de forma objetiva, imparcial y transparente, y con la capacidad técnica apropiada.
Las misiones de observación electoral presentarán oportunamente al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, los informes sobre sus actividades.
Artículo 25
Las misiones de observación electoral deberán informar al Consejo Permanente, a través de la Secretaría General, si no existiesen las condiciones necesarias para la realización de elecciones libres y justas.
La OEA podrá enviar, con el acuerdo del Estado interesado, misiones especiales a fin de contribuir a crear o mejorar dichas condiciones.

VI
Promoción de la cultura democrática

Artículo 26
La OEA continuará desarrollando programas y actividades dirigidos a promover los principios y prácticas democráticas y fortalecer la cultura democrática en el Hemisferio, considerando que la democracia es un sistema de vida fundado en la libertad y el mejoramiento económico, social y cultural de los pueblos. La OEA mantendrá consultas y cooperación continua con los Estados Miembros, tomando en cuenta los aportes de organizaciones de la sociedad civil que trabajen en esos ámbitos.
Artículo 27
Los programas y actividades se dirigirán a promover la gobernabilidad, la buena gestión, los valores democráticos y el fortalecimiento de la institucionalidad política y de las organizaciones de la sociedad civil. Se prestará atención especial al desarrollo de programas y actividades para la educación de la niñez y la juventud como forma de asegurar la permanencia de los valores democráticos, incluidas la libertad y la justicia social.
Artículo 28
Los Estados promoverán la plena e igualitaria participación de la mujer en las estructuras políticas de sus respectivos países como elemento fundamental para la promoción y ejercicio de la cultura democrática.

EL ACUERDO NACIONAL

El 22 de julio de 2002, los representantes de las organizaciones políticas, religiosas, del Gobierno y de la sociedad civil firmaron el compromiso de trabajar, todos, para conseguir el bienestar y desarrollo del país. Este compromiso es el Acuerdo Nacional.

El acuerdo persigue cuatro objetivos fundamentales. Para alcanzarlos, todos los peruanos de buena voluntad tenemos, desde el lugar que ocupemos o el rol que desempeñemos, el deber y la responsabilidad de decidir, ejecutar, vigilar o defender los compromisos asumidos. Estos son tan importantes que serán respetados como políticas permanentes para el futuro.

Por esta razón, como niños, niñas, adolescentes o adultos, ya sea como estudiantes o trabajadores, debemos promover y fortalecer acciones que garanticen el cumplimiento de esos cuatro objetivos que son los siguientes:

1. Democracia y Estado de Derecho

La justicia, la paz y el desarrollo que necesitamos los peruanos solo se pueden dar si conseguimos una verdadera democracia. El compromiso del Acuerdo Nacional es garantizar una sociedad en la que los derechos son respetados y los ciudadanos viven seguros y expresan con libertad sus opiniones a partir del diálogo abierto y enriquecedor; decidiendo lo mejor para el país.

2. Equidad y Justicia Social

Para poder construir nuestra democracia, es necesario que cada una de las personas que conformamos esta sociedad, nos sintamos parte de ella. Con este fin, el Acuerdo promoverá el acceso a las oportunidades económicas, sociales, culturales y políticas. Todos los peruanos tenemos derecho a un empleo digno, a una educación de calidad, a una salud integral, a un lugar para vivir. Así, alcanzaremos el desarrollo pleno.

3. Competitividad del País

Para afianzar la economía, el Acuerdo se compromete a fomentar el espíritu de competitividad en las empresas, es decir, mejorar la calidad de los productos y servicios, asegurar el acceso a la formalización de las pequeñas empresas y sumar esfuerzos para fomentar la colocación de nuestros productos en los mercados internacionales.

4. Estado Eficiente, Transparente y Descentralizado

Es de vital importancia que el Estado cumpla con sus obligaciones de manera eficiente y transparente para ponerse al servicio de todos los peruanos. El Acuerdo se compromete a modernizar la administración pública, desarrollar instrumentos que eliminen la corrupción o el uso indebido del poder. Asimismo, descentralizar el poder y la economía para asegurar que el Estado sirva a todos los peruanos sin excepción.

Mediante el Acuerdo Nacional nos comprometemos a desarrollar maneras de controlar el cumplimiento de estas políticas de Estado, a brindar apoyo y difundir constantemente sus acciones a la sociedad en general.

Sistema del Banco del Libro de Educación Secundaria

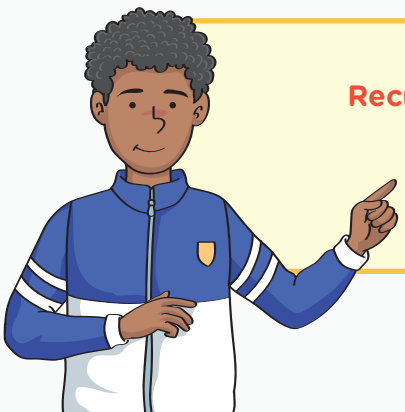
REGIÓN: **UGEL:**

IE:

CÓDIGO MODULAR	CÓDIGO DEL GRADO	CÓDIGO DEL ÁREA CURRICULAR	N° DE EJEMPLAR

RESPONSABLE DEL BANCO DEL LIBRO:

APELLIDOS Y NOMBRES DEL ESTUDIANTE	FECHA DEL PRÉSTAMO	FECHA DE DEVOLUCIÓN



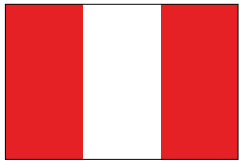
Recuerda que este libro también lo usará otro compañero el próximo año.

¡Vamos a cuidarlo entre todos!



SÍMBOLOS DE LA PATRIA

Artículo 49 de la Constitución Política del Perú



BANDERA NACIONAL



ESCUDO NACIONAL

HIMNO NACIONAL DEL PERÚ

CORO

Somos libres: seámoslo siempre;
Y antes niegue sus luces el sol,
Que faltemos al voto solemne
Que la Patria al Eterno elevó.

HIMNO NACIONAL

DECLARACIÓN UNIVERSAL DE LOS DERECHOS HUMANOS

El 10 de diciembre de 1948, la Asamblea General de las Naciones Unidas aprobó y proclamó la Declaración Universal de Derechos Humanos, cuyos artículos figuran a continuación:

Artículo 1
Todos los seres humanos nacen libres e iguales en dignidad y derechos y, (...) deben comportarse fraternalmente los unos con los otros.

Artículo 2
Toda persona tiene los derechos y libertades proclamados en esta Declaración, sin distinción alguna de raza, color, sexo, idioma, religión, opinión política o de cualquier otra índole, origen nacional o social, posición económica, nacimiento o cualquier otra condición. Además, no se hará distinción alguna fundada en la condición política, jurídica o internacional del país o territorio de cuya jurisdicción dependa una persona (...).

Artículo 3
Todo individuo tiene derecho a la vida, a la libertad y a la seguridad de su persona.

Artículo 4
Nadie estará sometido a esclavitud ni a servidumbre; la esclavitud y la trata de esclavos están prohibidas en todas sus formas.

Artículo 5
Nadie será sometido a torturas ni a penas o tratos crueles, inhumanos o degradantes.

Artículo 6
Todo ser humano tiene derecho, en todas partes, al reconocimiento de su personalidad jurídica.

Artículo 7
Todos son iguales ante la ley y tienen, sin distinción, derecho a igual protección de la ley. Todos tienen derecho a igual protección contra toda discriminación que infrinja esta Declaración (...).

Artículo 8
Toda persona tiene derecho a un recurso efectivo, ante los tribunales nacionales competentes, que la ampare contra actos que violen sus derechos fundamentales (...).

Artículo 9
Nadie podrá ser arbitrariamente detenido, preso ni desterrado.

Artículo 10
Toda persona tiene derecho, en condiciones de plena igualdad, a ser oída públicamente y con justicia por un tribunal independiente e imparcial, para la determinación de sus derechos y obligaciones o para el examen de cualquier acusación contra ella en materia penal.

Artículo 11
1. Toda persona acusada de delito tiene derecho a que se presuma su inocencia mientras no se pruebe su culpabilidad (...).
2. Nadie será condenado por actos u omisiones que en el momento de cometerse no fueron delictivos según el Derecho nacional o internacional. Tampoco se impondrá pena más grave que la aplicable en el momento de la comisión del delito.

Artículo 12
Nadie será objeto de injerencias arbitrarias en su vida privada, su familia, su domicilio o su correspondencia, ni de ataques a su honra o a su reputación. Toda persona tiene derecho a la protección de la ley contra tales injerencias o ataques.

Artículo 13
1. Toda persona tiene derecho a circular libremente y a elegir su residencia en el territorio de un Estado.
2. Toda persona tiene derecho a salir de cualquier país, incluso el propio, y a regresar a su país.

Artículo 14
1. En caso de persecución, toda persona tiene derecho a buscar asilo, y a disfrutar de él, en cualquier país.
2. Este derecho no podrá ser invocado contra una acción judicial realmente originada por delitos comunes o por actos opuestos a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 15
1. Toda persona tiene derecho a una nacionalidad.
2. A nadie se privará arbitrariamente de su nacionalidad ni del derecho a cambiar de nacionalidad.

Artículo 16
1. Los hombres y las mujeres, a partir de la edad núbil, tienen derecho, sin restricción alguna por motivos de raza, nacionalidad o religión, a casarse y fundar una familia (...).
2. Sólo mediante libre y pleno consentimiento de los futuros esposos podrá contraerse el matrimonio.
3. La familia es el elemento natural y fundamental de la sociedad y tiene derecho a la protección de la sociedad y del Estado.

Artículo 17
1. Toda persona tiene derecho a la propiedad, individual y colectivamente.
2. Nadie será privado arbitrariamente de su propiedad.

Artículo 18
Toda persona tiene derecho a la libertad de pensamiento, de conciencia y de religión (...).

Artículo 19
Todo individuo tiene derecho a la libertad de opinión y de expresión (...).

Artículo 20
1. Toda persona tiene derecho a la libertad de reunión y de asociación pacíficas.
2. Nadie podrá ser obligado a pertenecer a una asociación.

Artículo 21
1. Toda persona tiene derecho a participar en el gobierno de su país, directamente o por medio de representantes libremente escogidos.
2. Toda persona tiene el derecho de acceso, en condiciones de igualdad, a las funciones públicas de su país.
3. La voluntad del pueblo es la base de la autoridad del poder público; esta voluntad se expresará mediante elecciones auténticas que habrán de celebrarse periódicamente, por sufragio universal e igual y por voto secreto u otro procedimiento equivalente que garantice la libertad del voto.

Artículo 22
Toda persona (...) tiene derecho a la seguridad social, y a obtener, (...) habida cuenta de la organización y los recursos de cada Estado, la satisfacción de los derechos económicos, sociales y culturales, indispensables a su dignidad y al libre desarrollo de su personalidad.

Artículo 23
1. Toda persona tiene derecho al trabajo, a la libre elección de su trabajo, a condiciones equitativas y satisfactorias de trabajo y a la protección contra el desempleo.
2. Toda persona tiene derecho, sin discriminación alguna, a igual salario por trabajo igual.
3. Toda persona que trabaja tiene derecho a una remuneración equitativa y satisfactoria, que le asegure, así como a su familia, una existencia conforme a la dignidad humana y que será completada, en caso necesario, por cualesquiera otros medios de protección social.
4. Toda persona tiene derecho a fundar sindicatos y a sindicarse para la defensa de sus intereses.

Artículo 24
Toda persona tiene derecho al descanso, al disfrute del tiempo libre, a una limitación razonable de la duración del trabajo y a vacaciones periódicas pagadas.

Artículo 25
1. Toda persona tiene derecho a un nivel de vida adecuado que le asegure, así como a su familia, la salud y el bienestar, y en especial la alimentación, el vestido, la vivienda, la asistencia médica y los servicios sociales necesarios; tiene asimismo derecho a los seguros en caso de desempleo, enfermedad, invalidez, viudez, vejez y otros casos de pérdida de sus medios de subsistencia por circunstancias independientes de su voluntad.
2. La maternidad y la infancia tienen derecho a cuidados y asistencia especiales. Todos los niños, nacidos de matrimonio o fuera de matrimonio, tienen derecho a igual protección social.

Artículo 26
1. Toda persona tiene derecho a la educación. La educación debe ser gratuita, al menos en lo concerniente a la instrucción elemental y fundamental. La instrucción elemental será obligatoria. La instrucción técnica y profesional habrá de ser generalizada; el acceso a los estudios superiores será igual para todos, en función de los méritos respectivos.
2. La educación tendrá por objeto el pleno desarrollo de la personalidad humana y el fortalecimiento del respeto a los derechos humanos y a las libertades fundamentales; favorecerá la comprensión, la tolerancia y la amistad entre todas las naciones y todos los grupos étnicos o religiosos; y promoverá el desarrollo de las actividades de las Naciones Unidas para el mantenimiento de la paz.
3. Los padres tendrán derecho preferente a escoger el tipo de educación que habrá de darse a sus hijos.

Artículo 27
1. Toda persona tiene derecho a tomar parte libremente en la vida cultural de la comunidad, a gozar de las artes y a participar en el progreso científico y en los beneficios que de él resulten.
2. Toda persona tiene derecho a la protección de los intereses morales y materiales que le correspondan por razón de las producciones científicas, literarias o artísticas de que sea autora.

Artículo 28
Toda persona tiene derecho a que se establezca un orden social e internacional en el que los derechos y libertades proclamados en esta Declaración se hagan plenamente efectivos.

Artículo 29
1. Toda persona tiene deberes respecto a la comunida ...)
2. En el ejercicio de sus derechos y en el disfrute de sus libertades, toda persona estará solamente sujeta a las limitaciones establecidas por la ley con el único fin de asegurar el reconocimiento y el respeto de los derechos y libertades de los demás, y de satisfacer las justas exigencias de la moral, del orden público y del bienestar general en una sociedad democrática.
3. Estos derechos y libertades no podrán en ningún caso ser ejercidos en oposición a los propósitos y principios de las Naciones Unidas.

Artículo 30
Nada en la presente Declaración podrá interpretarse en el sentido de que confiere derecho alguno al Estado, a un grupo o a una persona, para emprender y desarrollar actividades (...) tendientes a la supresión de cualquiera de los derechos y libertades proclamados en esta Declaración.

DISTRIBUIDO GRATUITAMENTE POR EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN - PROHIBIDA SU VENTA