

Manual de uso
pedagógico para
el docente

MATERIAL EDUCATIVO CONCRETO

Trompo con probabilidad





MATERIAL EDUCATIVO CONCRETO TROMPO CON PROBABILIDAD

Manual de uso pedagógico para el docente

El presente manual está dirigido a docentes del área de Matemática. Ha sido elaborado con el fin de orientar el uso del material educativo concreto *Trompo con probabilidad*, que promueve el desarrollo de la competencia *Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre* de los estudiantes de educación secundaria, propuesta en el Currículo Nacional de la Educación Básica.

Editado:

© Industrias Roland Print SAC.
RUC 20512201611
Jr. Cuzco 343 - 365 - Magdalena.
Lima – Perú
Correo: contacto@inroprin.com

Créditos técnicos:

Equipo Pedagógico Roland Print SAC.

Todos los derechos reservados.

Prohibida la reproducción de esta publicación por cualquier medio, total o parcial, sin permiso de la Empresa.

Primera edición: Julio 2024

Tiraje: 4,300 ejemplares

Hecho el Depósito Legal en la Biblioteca Nacional del Perú

N.º 2024-07140

Impreso en el Perú / Printed in Perú

Impreso por:

Gráfica BIBLOS S.A.
RUC: 20101284981
Calle Morococha Nro. 152 – Surquillo
Lima – Perú.



Debido a la naturaleza dinámica del internet, las direcciones y contenidos de los sitios web a los que se hace referencia en este manual pueden tener modificaciones o desaparecer.

En este material se utilizan términos como “el docente”, “el estudiante”, “el profesor” y sus respectivos plurales, así como otras palabras equivalentes en el contexto educativo, para referirse a hombres y mujeres. Esta opción considera la diversidad y respeta el lenguaje inclusivo, y se emplea para promover una lectura fluida y facilitar la comprensión del texto.

PRESENTACIÓN

El *Manual de uso pedagógico para el docente* tiene como objetivo presentar una herramienta versátil y efectiva para el desarrollo de competencias asociadas al área de Matemática, centrándose específicamente en la competencia *Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre*. A lo largo de este manual, exploraremos cómo trabajar el material educativo concreto *Trompo con probabilidad* de manera dinámica y participativa, promoviendo un aprendizaje activo.

En la primera sección se presenta el material concreto, incluyendo su descripción física y características pedagógicas. La segunda sección presenta una matriz de la competencia a abordar, detallando sus capacidades, propósitos de aprendizaje, actividades, conceptos matemáticos y recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje.

La tercera sección ofrece orientaciones didácticas para llevar a cabo las actividades, tales como prácticas en el laboratorio de matemática, planteamiento de talleres matemáticos y el uso del juego como fuente para el aprendizaje de la matemática. La cuarta sección muestra los aportes de la neurociencia en el aprendizaje matemático y, finalmente, en la quinta sección se presentan guías de trabajo docente.

Confiamos en que este manual de uso pedagógico motivará a los docentes a explorar y aprovechar al máximo el material educativo concreto *Trompo con probabilidad*, al mismo tiempo que disfrutan de un aprendizaje divertido y motivador.

ÍNDICE

1. Descripción y características del material educativo concreto.....	09
1.1. Trompo con probabilidad	09
2. Matriz de competencias, capacidades, propósitos de aprendizaje, actividades, nociones matemáticas y recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje	13
3. Orientación didáctica para el desarrollo de las actividades del estudiante con el material educativo concreto	17
3.1. Prácticas en laboratorio de matemática	17
3.2. Planteamiento de talleres matemáticos	18
3.3. El juego como fuente de aprendizaje de la matemática	19
4. Aportes de la neurociencia en matemática para el uso pedagógico del material educativo concreto	22
5. Guía de trabajo docente	23
5.1. Guía de trabajo docente 1: Jugando con los colores	24
5.2. Guía de trabajo docente 2: Carrera de giros de trompos con probabilidad	30
5.3. Guía de trabajo docente 3: Relacionando la probabilidad teórica y la frecuencial	38
5.4. Guía de trabajo docente 4: Comprendiendo la regla de la suma para sucesos mutuamente excluyentes	45
5.5. Guía de trabajo docente 5: Jugamos con dos trompos.....	51
5.6. Guía de trabajo docente 6: Jugando con un trompo y bolas de colores.....	59
5.7. Guía de trabajo docente 7: Jugamos en familia	69
Referencias bibliográficas	78

1.1. Trompo con probabilidad**1.1.1. Descripción física**

Material: El trompo y los discos son de plástico polipropileno, no reciclado, duro, no tóxico, sólido y resistente.

Cantidad: Cinco (5) trompos uniformes.

Colores: El color del cuerpo y el eje roscado del trompo es azul.

Descripción y medidas:

- El cuerpo del trompo es un cono de 3 cm de altura y 4 cm de diámetro. Presenta un agujero roscado para contener el eje.
- El eje roscado es de 5 cm de longitud con 1 cm de diámetro sujeta el disco intercambiable y se enrosca en el cuerpo del trompo, lo que permite que el disco quede fijo.

Discos intercambiables:

- **Medida:**

El disco es de 8 cm de diámetro con, 2 mm de espesor, presenta divisiones en sectores predeterminados. Los discos tienen recortes en su perímetro, en número igual a los sectores predeterminados.

- **Cantidades y forma de los discos intercambiables:**

Dieciocho (18) discos intercambiables, de tres (3) formas diferentes, de acuerdo con el número de sectores, con impresión de números en la tira y retira.

- **Diseño de los sectores:**

Discos	Sectores	Impresión	
		Tira	Retira
1	3	A,A,C	A,B,A
2	3	A,B,C	B,B,A
3	3	B,B,C	C,A,C
4	4	A,A,A,B	A,A,A,C
5	4	A,A,B,B	A,B,D,D
6	4	A,B,B,B	A,B,C,C
7	4	A,C,D,D	B,B,C,D
8	4	B,C,D,D	C,C,D,D
9	5	A,A,B,C,D	A,B,C,D,E
10	5	B,B,C,D,E	A,A,A,B,C
11	5	B,B,B,C,D	C,C,C,D,E
12	5	A,B,C,C,D	B,C,D,D,E
13	5	A,B,B,C,D	B,C,C,D,E
14	5	A,B,C,D,D	B,C,D,D,E
15	5	A,B,B,C,C	B,C,C,D,D
16	3	Fondo blanco	
17	4		
18	5		

- Los discos presentan los siguientes colores:

Letra	Pantone
A	Anaranjado
B	Amarillo
C	Verde
A	Azul celeste
B	Rojo
C	Celeste
D	Turquesa
A	Verde claro
B	Plomo
C	Púrpura
D	Verde limón
E	Azul

1.1.2. Características pedagógicas

El trompo con probabilidad, con discos intercambiables y con diferentes sectores, es una herramienta matemática pedagógica que permite la comprensión de conceptos de probabilidad. Se orienta en un enfoque participativo y basado en la manipulación, para brindar la oportunidad de explorar y experimentar activamente con el trompo, lo que ayuda a los estudiantes a construir su comprensión sobre la probabilidad clásica, frecuencial, condicional; y de eventos independientes, dependientes y condicionales. Así también, como, comparar probabilidades de cierto suceso y justificar la respuesta (casos favorables, desfavorables e imposibles).

Al utilizar el trompo, los estudiantes pueden visualizar de manera concreta las diferentes secciones y las posibilidades de los resultados. Estas secciones pueden representar eventos de la vida cotidiana que involucren la toma de decisiones, como por ejemplo tomar decisiones sobre preferencias como el deporte, la lectura o un pasatiempo. De los deportes, el participar en actividades de fútbol, básquet, vóley, natación. De la lectura, seleccionar las de aventura, acción, historia, etc. A través de la manipulación física del trompo se desarrollan una comprensión intuitiva de las probabilidades y la competencia de la gestión de datos e incertidumbre.

1.1.3. Nombre y descripción de los materiales



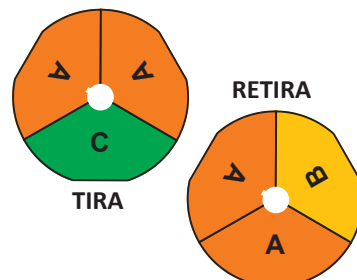
A. Cinco trompos

Cada trompo es un cono de 3 cm de altura y 4 cm de diámetro.

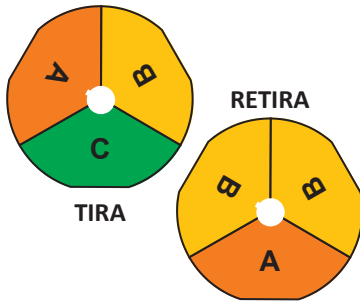


B. Cinco ejes roscados

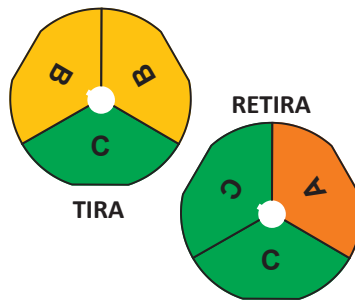
Cada eje de 5 cm de longitud, con 1 cm de diámetro.



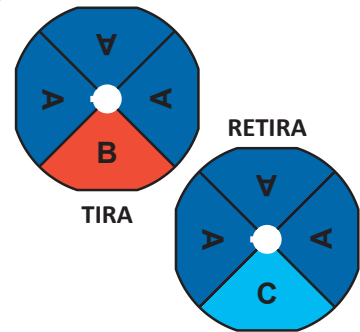
C. Tres sectores con impresión en tira (A,A,C) y retira (A,B,A).



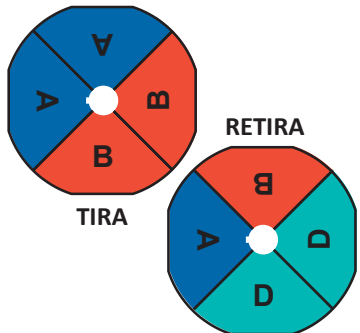
D. Tres sectores con impresión en tira (A,B,C) y retira (B,B,A).



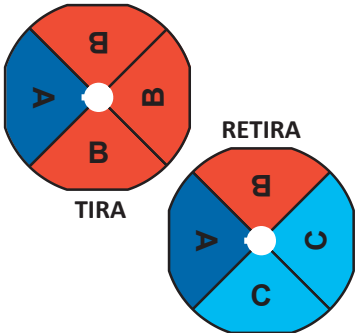
E. Tres sectores con impresión en tira (B,B,C) y retira (C,A,C).



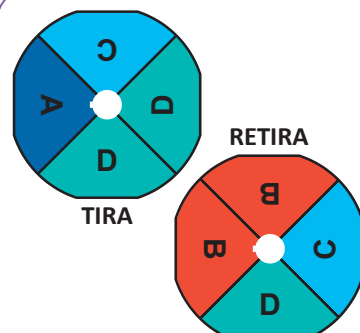
F. Cuatro sectores con impresión en tira (A,A,A,B) y retira (A,A,A,C).



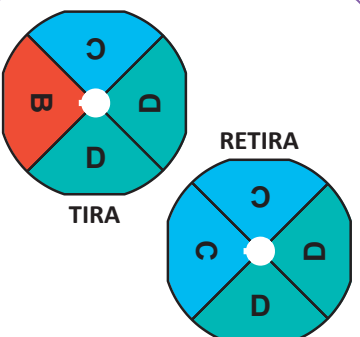
G. Cuatro sectores con impresión en tira (A,A,B,B) y retira (A,B,D,D).



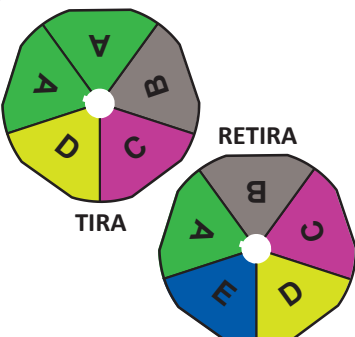
H. Cuatro sectores con impresión en tira (A,B,B,B) y retira (A,B,C,C).



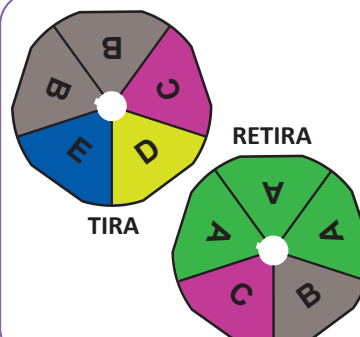
I. Cuatro sectores con impresión en tira (A,C,D,D) y retira (B,B,C,D).



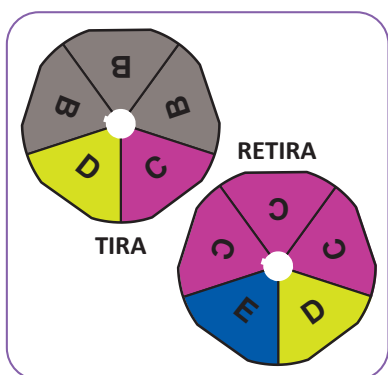
J. Cuatro sectores con impresión en tira (B,C,D,D) y retira (C,C,D,D).



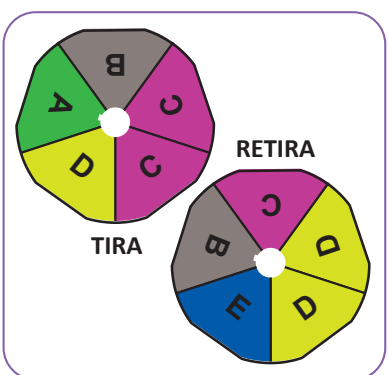
K. Cinco sectores con impresión en tira (A,A,B,C,D) y retira (A,B,C,D,E).



L. Cinco sectores con impresión en tira (B,B,C,D,E) y retira (A,A,A,B,C).



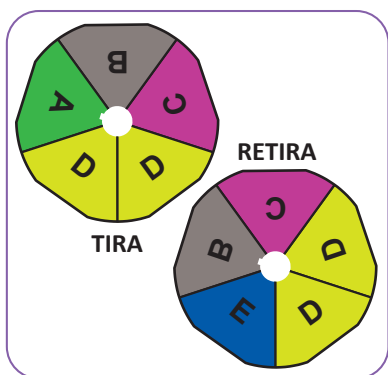
M. Cinco sectores con impresión en tira (B,B,B,C,D) y retira (C,C;C,D,E)



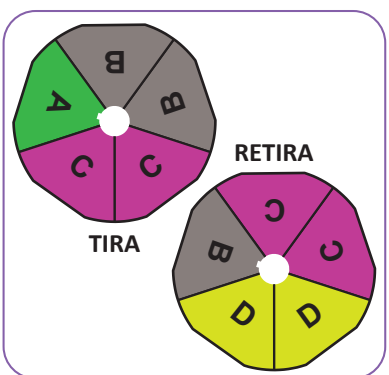
N. Cinco sectores con impresión en tira (A,B,C,C,D) y retira (B,C,D,D,E).



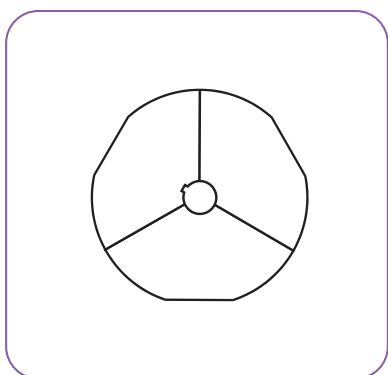
Ñ. Cinco sectores con impresión en tira (A,B,B,C,D) y retira (B,C,C,D,E).



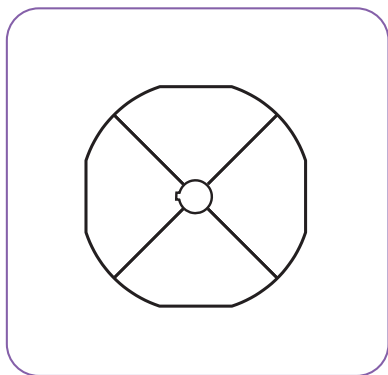
O. Cinco sectores con impresión en tira (A,B,C,D,D) y retira (B,C,D,D,E).



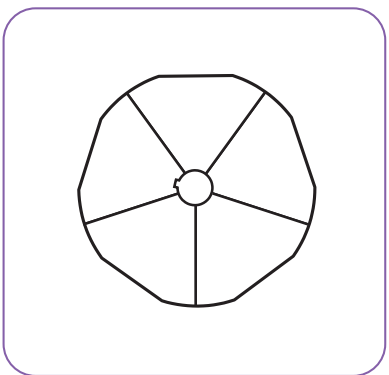
P. Cinco sectores con impresión en tira (A,B,B,C,C), retira (B,C,C,D,D).



Q. Tres sectores de fondo blanco.



R. Cuatro sectores de fondo blanco.



S. Cinco sectores de fondo blanco.

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

Guía	1	Nombre de la actividad	Jugando con los colores
Noción matemática a desarrollar	Experimentos aleatorios, casos favorables, espacio muestral y sucesos		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que involucren determinar las condiciones de una situación aleatoria. Expresa con diversas representaciones la comprensión sobre el espacio muestral, casos favorables y sucesos, emplea el trompo con probabilidad para identificarlos. Evalúa afirmaciones y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.		
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Los estudiantes enfrentan dificultades en comprender y aplicar conceptos de probabilidad, como identificar el espacio muestral y los casos favorables, y contar correctamente los elementos en experimentos aleatorios. El trompo con probabilidad puede ayudar en la visualización de conceptos, al representar el espacio muestral y los sucesos con colores o diseños; en la identificación de sucesos, al girar el trompo y encontrar los sucesos asociados, practicando de forma interactiva; en el conteo de casos favorables, al girarlo varias veces y contar los resultados específicos, desarrollando habilidades de conteo; y en la creación de experimentos, al hacer sus propios diseños experimentos con el trompo, fomentando la creatividad y comprensión crítica de la probabilidad.		

Guía	2	Nombre de la actividad	Carrera de giros de trompos con probabilidad
Noción matemática a desarrollar	Frecuencia absoluta, frecuencia relativa		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que implica representar la probabilidad de un suceso mediante su frecuencia relativa, expresada como decimal o porcentaje. Expresa con diversas representaciones o lenguaje matemático su comprensión sobre el significado del valor de la probabilidad de una situación aleatoria. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso simple mediante el uso del trompo con probabilidad y el cálculo de su frecuencia relativa. Plantea afirmaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.		

Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Los estudiantes enfrentan dificultades para comprender y aplicar los conceptos de frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Con la frecuencia absoluta, confunden el número de veces que ocurre un evento, con términos como "frecuencia relativa" o "moda", y cometen errores al contar las ocurrencias. Con la frecuencia relativa tienen problemas para distinguirla de la frecuencia absoluta, entender el porcentaje en el contexto del conjunto de datos, y realizar correctamente las divisiones y cálculos de porcentajes. El trompo con probabilidad puede ayudar mediante experimentos prácticos. Los estudiantes pueden visualizar la frecuencia absoluta de cada evento y luego calcular las frecuencias relativas. Esta comparación les ayuda a distinguir entre los dos conceptos y entender la relación entre ellos. Además, al introducir el concepto de porcentaje en el contexto de las frecuencias relativas, pueden aprender a expresar las probabilidades de manera más significativa. Incorporar actividades interactivas y ejercicios de práctica con el trompo permite un refuerzo continuo de estos conceptos, lo que contribuye a mejorar la comprensión y las habilidades en conteo y cálculo de probabilidades.
---	--

Guía	3	Nombre de la actividad	Relacionando la probabilidad teórica y la frecuencial
Noción matemática a desarrollar		Probabilidad de Laplace	
Propósito de aprendizaje		Resuelve problemas que impliquen determinar las condiciones de una situación aleatoria y representar la probabilidad de un suceso aplicando tanto la regla de Laplace como la probabilidad frecuencialista. Expresa el significado del valor para caracterizar la probabilidad teórica y la frecuencialista. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace y la probabilidad frecuencialista, a partir de ello, evalúa afirmaciones, y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.	
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente		Los estudiantes enfrentan desafíos al comprender y aplicar conceptos de probabilidad, incluyendo la identificación correcta del espacio muestral y eventos, la comprensión de la relación entre frecuencia y probabilidad, y la aplicación incorrecta de la fórmula de la regla de Laplace. Sin embargo, el trompo con probabilidad puede ser una herramienta efectiva para ayudar a los estudiantes a superar estas dificultades. A través de actividades como la visualización de la regla de Laplace, la práctica con ejemplos concretos, la resolución de problemas y juegos de probabilidad, los estudiantes pueden utilizar el trompo con probabilidad para representar los casos posibles y favorables, identificar los resultados posibles, calcular la probabilidad de cada resultado y aplicar la regla de Laplace para determinar las probabilidades de ganar en juegos.	

Guía	4	Nombre de la actividad	Comprendiendo la regla de la suma para sucesos mutuamente excluyentes
Noción matemática a desarrollar	Sucesos excluyentes y regla de la suma para dichos sucesos		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que involucran la determinación de las condiciones de una situación aleatoria y la representación de sucesos mutuamente excluyentes. Expresa el significado del valor de la probabilidad al caracterizar sucesos mutuamente excluyentes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes mediante la regla de la suma, a partir de ello, evalúa afirmaciones y las justifica utilizando sus conocimientos probabilísticos.		
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Los estudiantes presentan dificultades para identificar eventos mutuamente excluyentes en los experimentos aleatorios. Y principalmente tienen dificultades para comprender por qué si los eventos no pueden ocurrir a la vez, se calcula la probabilidad sumando las probabilidades de dichos sucesos. Para superar estas dificultades, la práctica repetida de actividades y juegos con el trompo con probabilidad son acciones efectivas para ayudar a los estudiantes a identificar eventos excluyentes dentro un mismo espacio muestral para interpretar la probabilidad de que ocurra uno u otro suceso.		

Guía	5	Nombre de la actividad	Jugamos con dos trompos
Noción matemática a desarrollar	Independientes, regla del producto		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que involucran la determinación de las condiciones con diversas representaciones de una situación aleatoria con de sucesos independientes. Expresa el significado del valor de la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria mediante la regla del producto. Plantea afirmaciones y las justifica utilizando sus conocimientos.		
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Los estudiantes a menudo encuentran difícil entender sucesos independientes en probabilidad y aplicar la regla del producto. Esto implica comprender que la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad del otro y saber por qué se multiplican las probabilidades en sucesos independientes. Utiliza los trompos con probabilidad para representar sucesos independientes claramente visualizados. Asigna diferentes colores a cada trompo y demuestra cómo la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad del otro suceso. Introduce la regla del producto, explicando que la probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes es el producto de sus probabilidades individuales. Proporciona ejemplos prácticos donde los resultados de un trompo no influyen en los resultados de los otros, y fomenta la exploración mediante juegos y actividades interactivas que refuercen la comprensión de la independencia de los sucesos y la aplicación de la regla del producto en situaciones prácticas.		

Guía	6	Nombre de la actividad	Jugando con un trompo y bolas de colores
Noción matemática a desarrollar	Probabilidad de eventos sucesivos sin reposición		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que implican determinar las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos dependientes. Expresa con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos dependientes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos dependientes de una situación aleatoria. Evalúa afirmaciones sobre sucesos aleatorios dependientes y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.		
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Para abordar las dificultades de aprendizaje sobre sucesos dependientes utilizando el trompo con probabilidad, es recomendable emplear estrategias visuales y prácticas. Los trompos pueden ser usados para representar sucesos específicos mediante colores distintos, permitiendo a los estudiantes manipular y visualizar cómo la ocurrencia de un suceso afecta la probabilidad de otros sucesos. Es útil enseñar la secuencia de sucesos y cómo uno influye en el siguiente, proporcionando ejemplos prácticos y desafíos reflexivos para mejorar la comprensión. Juegos y simulaciones también pueden ser efectivos para involucrar a los estudiantes y aplicar conceptos de probabilidad condicional de manera interactiva y significativa.		

Guía	7	Nombre de la actividad	Jugamos en familia
Noción matemática a desarrollar	Probabilidad en sucesos independientes		
Propósito de aprendizaje	Resuelve problemas que implican determinar las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos mutuamente excluyentes y sucesos independientes. Expresa con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos independientes de una situación aleatoria. Evalúa afirmaciones sobre sucesos aleatorios y la justifica usando sus conocimientos probabilísticos.		
Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente	Los estudiantes enfrentan dificultades en la resolución de problemas al identificar el tipo de sucesos involucrados, si se trata de independientes o dependientes y la determinación de su probabilidad. Utiliza los trompos con probabilidad como herramientas visuales para representar sucesos independientes de manera clara. Asigna colores diferentes a cada trompo y muestra cómo la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad de otro evento. Proporciona ejemplos prácticos donde los resultados de un trompo no influyen en los resultados de otras, y fomenta la exploración mediante juegos y actividades interactivas que refuercen la comprensión de la independencia de los sucesos.		

3.1. Práctica en laboratorio de matemática¹

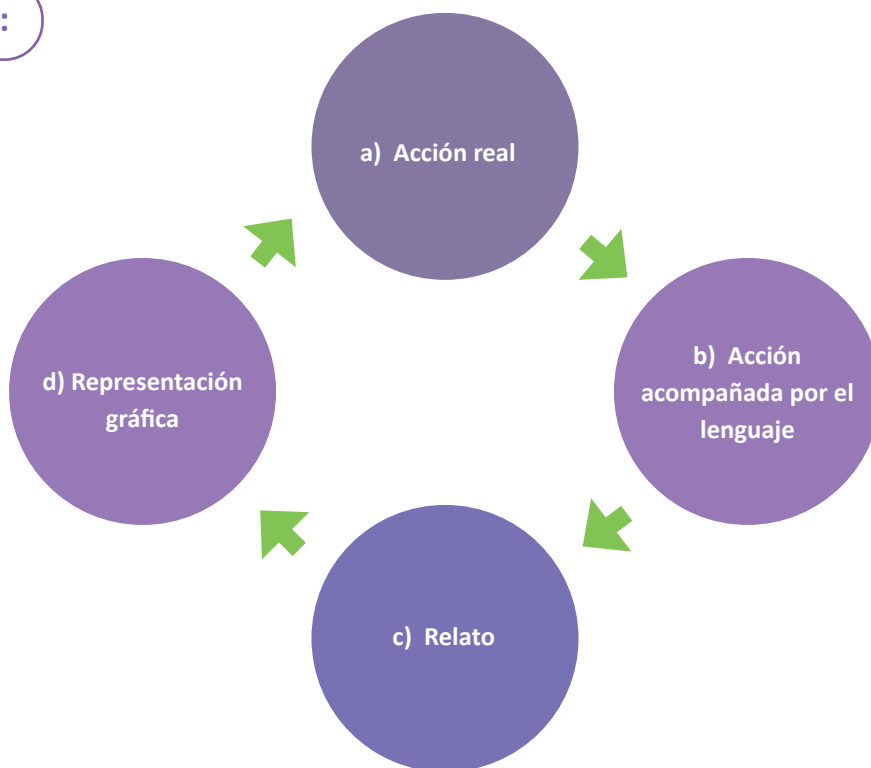
Las actividades de laboratorio de matemática, en el contexto de la educación secundaria, se definen como tareas que los estudiantes pueden llevar a cabo utilizando materiales manipulable. Estos materiales pueden dividirse en dos categorías: físicos y virtuales. Los materiales físicos incluyen objetos como el ábaco, regletas, tangram, bloques lógicos, geoplanos, multicubos, cuerpos geométricos, pentaminós, triángulos de Pascal, entre otros. Por otro lado, los materiales virtuales se refieren a aquellos que se utilizan en computadoras y *software* educativo.

Estas actividades de laboratorio tienen la capacidad de abordar una variedad de aspectos relacionados con el conocimiento matemático, que pueden incluir los siguientes:

- Introducir nuevos conceptos.
- Corregir errores.
- Descubrir o comprobar propiedades.

Gastón Mialaret presenta una serie de fases para el logro de aprendizajes de las matemáticas relacionada con la acción, el relato y el símbolo.

Fases:



¹Minedu (2015)

a) La acción real ejercida por el estudiante

No refiere a la acción imaginada por el estudiante o narrada por el docente; se requiere la manipulación de material concreto, donde se representen las operaciones y se logre su comprensión.

b) La acción acompañada del lenguaje

Cuando el estudiante está realizando acciones, aprende palabras y expresiones relacionadas con las matemáticas, necesarias para decir lo que hace.

c) Relato

El estudiante llega a ser capaz de decir lo que hace. Así se inicia en el trabajo en un nivel abstracto.

d) Representación gráfica

Aquí las representaciones gráficas pueden, ante todo, ser muy concretas y luego irse alejando poco a poco de la realidad hasta llegar a convertirse en expresiones simbólicas.

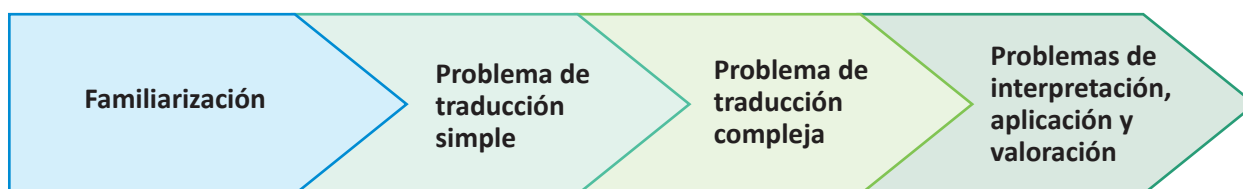
3.2. Planteamientos de talleres matemáticos²

El taller de matemática adquiere una función especial y no pretende ser una sesión de aprendizaje. Tiene la función de desplegar las competencias y capacidades ya desarrolladas por los estudiantes en los grados respectivos. En ese sentido, la retroalimentación oportuna es vista como una oportunidad para seguir aprendiendo, corregir errores y desarrollar estrategias.

Fases del taller matemático	Características
1. Familiarización	El taller tiene como objetivo familiarizar a los estudiantes con el tema o concepto matemático a tratar, mediante actividades introductorias como presentaciones o discusiones. De esta manera, los participantes adquieren una comprensión básica del tema y se sienten cómodos con el contexto matemático que se abordará. La presentación de problemas de nivel elemental es fundamental, ya que les permite a los estudiantes reconocer el desarrollo de la competencia y sus capacidades.
2. Problema de traducción simple	En esta etapa, se presentan problemas matemáticos que requieren la traducción directa de un enunciado o situación a una expresión matemática simple. Los problemas son de naturaleza básica y se enfocan en la aplicación directa de fórmulas o conceptos previamente aprendidos. El docente asume un rol de coordinador, interviniendo únicamente como mediador cuando sea necesario. Los estudiantes desarrollan sus propios procesos de resolución de problemas, coordinando y resumiendo sus conclusiones de manera conjunta.

²Minedu (2015)

3. Problema de traducción compleja	A partir de la presentación de problemas no típicos, los estudiantes se enfrentan a desafíos que implican más de dos etapas y requieren la movilización de estrategias heurísticas para su resolución. Tras completar la tarea, los estudiantes explican y sintetizan los planteamientos elaborados, valorando así las competencias y capacidades desarrolladas durante el proceso.
4. Problemas de interpretación, aplicación y valoración	Los estudiantes se enfrentan a problemas complejos y abiertos, fomentando el intercambio de ideas y la colaboración entre ellos. A través de la discusión y el análisis conjunto, los estudiantes explican y sintetizan los planteamientos elaborados, valorando así las competencias y capacidades desarrolladas durante el proceso de resolución de problemas.



Esta propuesta debe ir de acuerdo a las características de los estudiantes. El docente puede considerar conveniente trabajar de forma progresiva en el año escolar

3.3. El juego como fuente de aprendizaje de la matemática³

Cuando se incorporan juegos en el contexto de las clases de matemática, se puede identificar una serie de ventajas notables. Estas ventajas abarcan los siguientes aspectos:

- Estimulan el desarrollo de habilidades matemáticas específicas en los estudiantes, fomentando un mayor interés por el aprendizaje.
- Favorecen la interacción social entre los estudiantes y su relación con los docentes.
- Potencian la creatividad de los estudiantes.
- Promueven el disfrute de la actividad y la solidaridad.
- Contribuyen al desarrollo de valores y actitudes como el pensamiento crítico, la autocrítica, la disciplina, la tolerancia, el respeto a las reglas, la perseverancia, la cooperación, el compañerismo, la lealtad, la seguridad, la audacia, la puntualidad, entre otros.
- Rompen la monotonía y ofrecen una alternativa al método de aprendizaje tradicional.

³Minedu (2015)

Estos juegos, partiendo de un enfoque natural, buscan guiar a los estudiantes desde la experiencia sensorial, perceptual e intuitiva hacia la comprensión de conceptos matemáticos, utilizando la lógica del pensamiento. Este proceso, que requiere una mediación docente, sigue una serie de etapas definidas por Zoltán Dienes y puede aplicarse también a otras competencias educativas.

Fases:



a) Adaptación

A esta etapa corresponden los juegos libres o preliminares, como actividades sin un propósito aparente, lo que permite que el estudiante interactúe espontáneamente con objetos concretos, los explore y encuentre satisfacción en la labor misma. De aquí surge la adaptación o propedéutica para las etapas posteriores.

b) Estructuración

La actividad conduce al mayor número de experiencias para comprender las reglas del juego (restricciones). Sin embargo, su característica es aún la ausencia de claridad en lo que se busca. Incluye la percepción de enunciados. Se da las reglas de juego, lo que conllevará a lo que se pretende lograr.

c) Abstracción

Los estudiantes obtienen la estructura común de los juegos y se deshacen de los aspectos carentes de interés. Aquí se interioriza la operación, en tanto relaciona aspectos de naturaleza abstracta.

Comprende las conexiones con otros juegos o resultados parecidos, básicamente para establecer la estrategia que conducirá todo el juego; para tal propósito algunas interrogantes que ayudarán en esta sección son:

- ¿Puedes usar la misma estrategia de juego para realizar el nuevo juego planteado?
- ¿Puedes resolver al menos parte del juego? ¿Lo puedes hacer en circunstancias especiales, suponiendo, por ejemplo, que hubieras conseguido superar la etapa inicial? Supón que se te pide un poco menos. ¿Puedes entonces hacerlo?
- ¿Puedes tratar de correrlo hacia atrás? ¿Puedes pensar en alguna pista o estrategia?

d) Representación gráfica o esquemática

Aquí se representa la estructura común o regular reconocida en el juego, de manera gráfica o esquemática, como forma de visualización o manifestación. Reconocida la estrategia que le permitió desarrollar el juego con facilidad, esta debe ser puesta en práctica.

En esta parte se comprueba si la intuición se refleja en la formalidad y se pone en práctica la estrategia respetando las reglas del juego. Se ensaya la estrategia de diversas maneras con el fin de hacerla vigente.

e) Descripción de las representaciones

Se estudia las propiedades de la representación con el lenguaje técnico del procedimiento u operación, introduciendo el lenguaje simbólico de las matemáticas.

- Trata de hallar la razón fundamental del éxito de la estrategia.
- Trata de entender, considerando la solución, qué lugar ocupan las condiciones y reglas del juego.
- Se recomienda plantear interrogantes que impliquen conflictos y desafíos a los estudiantes.

f) Formalización o demostración

Se describen las propiedades y también se puede inventar un procedimiento para deducir las demás. Los estudiantes exponen lo aprendido de manera segura y de forma convencional, al mismo tiempo que tienen la facultad de reconstruirlo, explicando cada uno de los procesos anteriores.

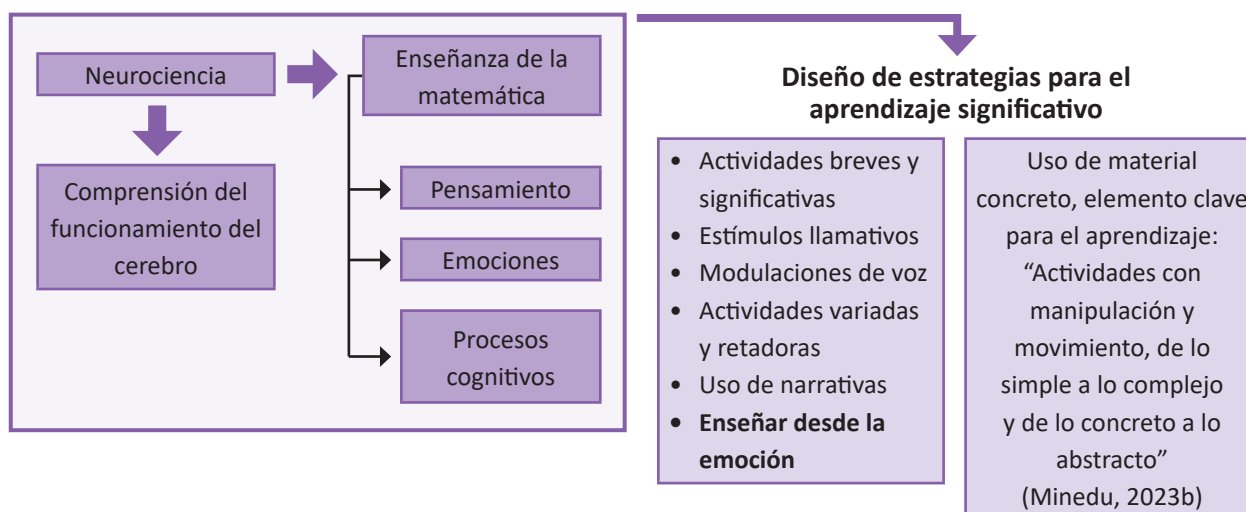
La relación que existe entre el modelo de enseñanza y aprendizaje, en la aplicación de la neurociencia, indica que se debe iniciar desde la concepción de todos los docentes en la forma de conocer cómo funciona el cerebro (Méndez y González, 2022, p. 214). Este postulado de la neurociencia es clave para el desarrollo de los procesos de enseñanza aprendizaje. Los avances en neurociencia han permitido entender cómo se desarrollan las capacidades intelectuales. Esto es especialmente relevante en la enseñanza de la matemática, donde el pensamiento, las emociones y los procesos cognitivos están interrelacionados.

Desde lo que precisa el Minedu (2023a, p. 19) como aporte de la neuroeducación al proceso de enseñanza aprendizaje, es importante el desarrollo de las funciones ejecutivas. Para lograr fortalecer estas habilidades debemos:

- **Promover el aprendizaje autónomo.** No enseñar solo los contenidos, sino las habilidades para aprender por sí mismo, cómo asumir responsabilidades y consecuencias, tomar decisiones, ordenar el espacio de trabajo, autonomía en la resolución de problemas, favorecer las iniciativas, estrategias de organización en el trabajo colaborativo, entre otros.
- **Usar planificadores y establecer metas.** Enseñar a elaborar planificadores, que les permitan dividir, priorizar y secuenciar las tareas y gestionar el tiempo.
- **Favorecer la flexibilidad cognitiva.** Promover el análisis, explorar soluciones creativas e innovadoras, desarrollar estrategias de comprensión lectora y solución de problemas matemáticos, analizar conceptos desde diferentes disciplinas y ángulos, aceptar todas las iniciativas.
- **Manejar el estrés.** Promover estrategias que permitan manejar las situaciones de estrés con espacios de reflexión y diálogo, y dinámica a favor de desarrollar resiliencia y el juego.

Uno de los aspectos importantes para la enseñanza y la educación basada en el funcionamiento del cerebro; inicia por la “emoción”, ingrediente básico de los procesos cognitivos y base de los sentimientos (Meneses, 2019). Es decir que es clave la mediación del aprendizaje desde la emoción. Según esta investigadora, se necesita enseñar desde la emoción, haciendo curioso lo que se imparte.

Se presenta en este esquema los aportes de la neurociencia para el diseño de estrategias para el aprendizaje significativo.



Fuente: Elaboración propia a partir de Minedu (2023b)

05

GUÍA DE TRABAJO DOCENTE

5.1. GUÍA DE TRABAJO DOCENTE

1

5.1.1. Nombre de la actividad

Jugando con los colores

5.1.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.1.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucren determinar las condiciones de una situación aleatoria. Expresa con diversas representaciones la comprensión sobre el espacio muestral, casos favorables y sucesos, emplea el trompo con probabilidad para identificarlos. Evalúa afirmaciones y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.

5.1.4. Noción matemática a desarrollar

Experimentos aleatorios
Casos favorables
Espacio muestral y sucesos

5.1.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes enfrentan dificultades en comprender y aplicar conceptos de probabilidad, como identificar el espacio muestral y los casos favorables, y contar correctamente los elementos en experimentos aleatorios. El trompo con probabilidad puede ayudar en la visualización de conceptos, al representar el espacio muestral y los sucesos con colores o diseños; en la identificación de sucesos, al girar el trompo y encontrar los sucesos asociados, practicando de forma interactiva; en el conteo de casos favorables, al girarlo varias veces y contar los resultados específicos, desarrollando habilidades de conteo; y en la creación de experimentos, al hacer sus propios diseños experimentos con el trompo, fomentando la creatividad y comprensión crítica de la probabilidad.

5.1.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Organice a los estudiantes en equipos de hasta 4 integrantes y asigne roles rotativos, como secretario, portavoz, coordinador y otros que se considere pertinentes.

5.1.7. Situación problemática

En una clase de matemática, los estudiantes desarrollan experimentos con el trompo con probabilidad. Esto implica usar trompos de 3 y 5 sectores, cada uno con sectores de diferente colore.

Después de realizar la experimentación, un estudiante plantea la siguiente afirmación:

"En un experimento con un trompo que tiene cinco sectores de diferentes colores, el espacio muestral consiste en diez posibles resultados diferentes ya que cada sector puede mostrar dos colores diferentes en cada giro. Por lo tanto, si consideramos el suceso 'obtener el color verde', todos los resultados son casos favorables".

¿Están de acuerdo? Justifiquen sus respuestas.

5.1.8. Recomendación didáctica: Prácticas en laboratorio de matemática

La acción real ejercida por el estudiante

Se requiere la manipulación de material concreto, donde se representen las nociones y se logre su comprensión.

1. Los estudiantes comenzarán manipulando libremente los trompos, para luego recibir las orientaciones mientras ejecutan sus giros. De esta forma irán representando intuitivamente, y sin darse cuenta, las nociones que se pretenden abordar.
2. Solicite a los equipos que seleccionen los trompos con los sectores correspondientes y que cada uno, a manera de prueba, ejecute sus propios giros de trompo. Además, que cuenten con hojas para hacer anotaciones.

a) Observen los trompos. ¿Cuántos colores tiene cada uno?

Tres y cinco.

b) Sin aún girar el trompo, ¿qué piensan sobre estos colores y el trompo?

Que cuando hagamos los giros, podrá resultar cualquiera de los tres colores en un trompo; y en el otro, cualquiera de los cinco colores.

c) Al hacer el giro, ¿podemos saber en qué color se detendrá el trompo?

No.

d) Cada vez que giren los trompos, ¿qué colores podrá resultar en cada trompo?

En el primero puede resultar cualquiera de los tres colores, verde, anaranjado o amarillo; y en el segundo, verde limón, azul, verde claro, plomo y púrpura.

e) ¿Entonces, ¿cada trompo cuántas opciones de resultado tiene?

Tienen 3 y 5 opciones.

f) Ahora, si yo deseo que salga el color amarillo al girar el trompo de tres sectores, ¿resultará? ¿Cuántas opciones tengo?

No se sabe, solo una opción.

Cuando el estudiante realiza una actividad o acción, esta debe estar acompañada del lenguaje adecuado que describa y explique lo que está llevando a cabo.

1. Cuando efectúen cada acción, a la vez deben verbalizar de manera clara lo que están haciendo y por qué, lo cual les permitirá un adecuado uso del lenguaje y habrá una retroalimentación más efectiva por parte del docente, además de una comprensión compartida en el proceso de aprendizaje.

2. Dialogue con ellos considerando estas indicaciones:

- a) Respondieron que no se sabe en qué color se detendrá cualquiera de los dos trompos, y el no poder predecir el resultado, me sitúa en la realización de un experimento aleatorio (anote en la pizarra). Giren una vez cada trompo, y anoten el resultado. ¿Qué hicieron con los trompos?

Los hemos girado y, como no podemos predecir los resultados en cada trompo, entonces efectuamos experimentos aleatorios.

- b) Todos los posibles resultados mencionados, donde señalaron cada uno de los colores para cada trompo, constituyen el espacio muestral. Este representa el conjunto de todos los resultados posibles que pueden ocurrir en el experimento (anote en la pizarra). ¿Cuál es el espacio muestral para cada uno de los trompos?

El trompo de 3 sectores tiene un espacio muestral conformado por el conjunto de tres colores: anaranjado, amarillo y verde. El de 5 sectores, uno conformado por un conjunto de cinco colores: azul, verde claro, plomo, púrpura y verde amarillo.

- c) Efectuaron dos experimentos aleatorios, uno con cada trompo, y obtuvieron un resultado aleatorio que forma parte del espacio muestral. ¿Qué colores obtuvieron con el de tres sectores?, ¿con el de cinco sectores?

Trompo de 3 sectores: equipo 1, verde; equipo 2, anaranjado...

Trompo de 5 sectores: equipo 1, azul; equipo 2, plomo...

- d) El experimento aleatorio lo ejecutaron sin pensar en un color preferido. Ahora volverán a realizar ambos experimentos aleatorios, pero, antes de ello señalarán un criterio o condición para todos. Cuando elegimos un resultado específico que cumpla cierta condición en un experimento aleatorio, y este se produce, lo llamamos "casos favorable" (anote en la pizarra). Para nuestro experimento aleatorio los casos favorables tendrán el criterio de que resulte el "color verde, en cualquier tono". ¿Cuántos casos favorables habrían en cada uno de los trompos? Observen.

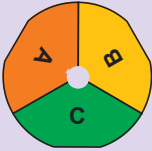
En el trompo de tres sectores solo encontramos un caso favorable; en el de cinco, dos casos favorables. Estos cumplen la condición de ser "verde, en cualquier tono".

- e) Cuando se obtienen los resultados específicos que cumplen una condición determinada, se les denomina "sucesos". (anote en la pizarra). Consideremos el trompo de 3 sectores, en este caso el resultado será único, lo que lo convierte en un suceso simple. En el trompo de 5 sectores se obtendrán dos resultados posibles, lo que lo clasifica como un suceso compuesto (anote en la pizarra). ¿Cómo se denominan los resultados específicos que se obtendrán en cada trompo y cumplen la condición determinada? Observen.

Son los sucesos. En el trompo con tres sectores, hay un color verde; se tratará de un suceso simple. En el de cinco sectores hay dos tonos de color verde, por lo tanto, se trataría de un suceso compuesto.

- f) Realicen cinco experimentos aleatorios con cada trompo y anoten los resultados.

Puede sugerir que utilicen la siguiente tabla:

N.º de experimento	Resultados	Resultados
		
1	Anaranjado	Plomo
2	Verde	Verde claro
3	Amarillo	Azul
4	Amarillo	Verde limón
5	Verde	Azul

- g) Ahora respondan a la pregunta "¿Los resultados obtenidos al girar los trompos responden a la preferencia señalada "verde, cualquier tono"?".

No, en cada experimento no se produjo el suceso esperado. Para el primer trompo, en el experimento 2 y 5, resultaron casos favorables; y para el segundo trompo, en el experimento 2 y 4, también resultaron casos favorables (ver tabla).

Relato

El estudiante llega a ser capaz de decir lo que hace. Así se inicia en el trabajo en un nivel abstracto.

- Plantee algunas preguntas para que a partir de ellas y en equipo; describan y expliquen lo realizado en la etapa anterior sin llevar a cabo la acción física.

- ¿Qué realizaron con los trompos con probabilidad?

Ejecutamos giros que dieron diferentes resultados, cada uno de esos giros representa un experimento aleatorio.

- ¿Y por quienes están conformados estos experimentos aleatorios?

Antes de girar los trompos, se observa el número de sectores en cada uno y destaca los posibles resultados que puede tener cada trompo. Estos posibles resultados forman conjuntos conocidos como espacio muestral.

- Y en estos espacios muestrales, ¿qué identificamos?

Identificamos todos los resultados posibles que podrían ocurrir, y aquellos específicamente deseados se denominan casos favorables.

d) ¿Qué distingue esos casos favorables del espacio muestral?

Los casos favorables, a diferencia del espacio muestral, son aquellos resultados que cumplen con un criterio o condición específica que se alinea con lo que se desea que ocurra.

e) Después de realizar el experimento aleatorio, ¿cómo se denomina el resultado obtenido?

Se denomina sucesos.

f) ¿Y todos los sucesos que se obtienen cumplen la condición del caso favorable?

Solo algunas veces.

g) Los que sí cumplen, ¿qué tipo de sucesos son? ¿Y los que no?

Si cumplen, son los sucesos favorables y si no, sucesos desfavorables.

h) Respecto a los sucesos, ¿qué observaron en ambos trompos?

El primer trompo presentaba un único sector que cumplía con la condición, lo que implica que solo había sucesos simples. Por otro lado, en el trompo con cinco sectores dos cumplían la condición, indicando así la presencia de un suceso compuesto.

i) ¿Qué relación existe entre el espacio muestral, los casos favorables y los sucesos?

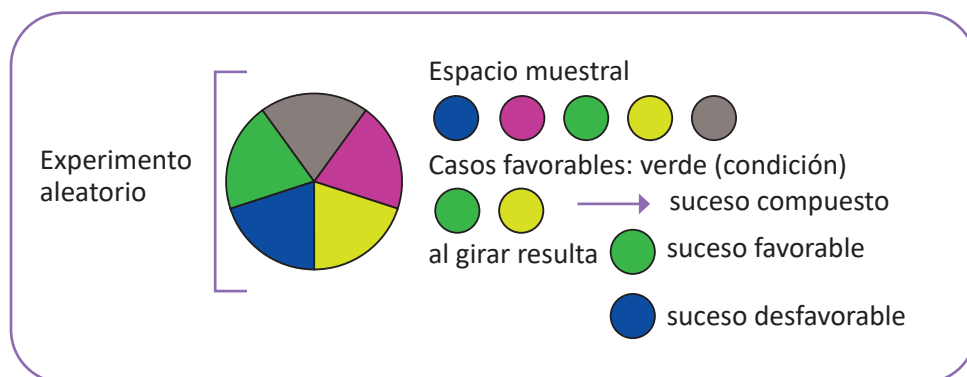
El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento, un suceso es un subconjunto de este espacio muestral, que contiene los resultados que cumplen cierta condición o criterio. Mientras que los sucesos son conjuntos que contienen los casos favorables que cumplen las condiciones específicas.

Representación gráfica

Las representaciones gráficas pueden, ante todo, ser muy concretas y luego irse alejando poco a poco de la realidad hasta llegar a convertirse en expresiones simbólicas.

1. Solicite a los equipos que realicen un organizador visual donde estén representados el experimento aleatorio, espacio muestral, los casos favorables, sucesos simples y sucesos compuestos.

Equipo 1



- Enseguida, solicite a los equipos que respondan el reto planteado en la situación problemática.

No es correcto, porque al tratarse de un experimento aleatorio, y al tener cinco colores diferentes, estos representan el conjunto de los posibles resultados. Por lo tanto, su espacio muestral es cinco. En el caso del suceso “obtener un color verde”, solo tiene dos casos favorables.

5.1.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos.

Haga un resumen de las nociones matemáticas que se abordaron. Destaque cómo estas se aplican en situaciones de la vida cotidiana.

Invite a los equipos a socializar sus esquemas, gráficos y resultados de los procedimientos efectuados.

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- Invite a los estudiantes a responder las preguntas de metacognición de forma individual.
 - ¿Qué nociones matemáticas aprendí con los trompos?
 - ¿Tuve dificultades para comprender lo que es un experimento aleatorio, espacio muestral, casos favorables y sucesos?
 - ¿Cómo superaste las dificultades presentadas?
- Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones de una situación aleatoria.			
Expresé con diversas representaciones la comprensión sobre casos favorables, espacio muestral y sucesos.			
Empleé el trompo con probabilidad para identificar el espacio muestral, casos favorables y sucesos.			
Evalué afirmaciones y las justifiqué usando mis conocimientos probabilísticos.			

5.2. GUÍA DE TRABAJO DOCENTE

2

5.2.1. Nombre de la actividad

Carrera de giros de trompos con probabilidad

5.2.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.2.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que implica representar la probabilidad de un suceso mediante su frecuencia relativa, expresada como decimal o porcentaje. Expresa con diversas representaciones o lenguaje matemático su comprensión sobre el significado del valor de la probabilidad de una situación aleatoria. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso simple mediante el uso del trompo con probabilidad y el cálculo de su frecuencia relativa. Plantea afirmaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.

5.2.4. Noción matemática a desarrollar

Frecuencia absoluta

Frecuencia relativa

5.2.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes enfrentan dificultades para comprender y aplicar los conceptos de frecuencia absoluta y frecuencia relativa. Con la frecuencia absoluta, confunden el número de veces que ocurre un evento, con términos como "frecuencia relativa" o "moda", y cometen errores al contar las ocurrencias. Con la frecuencia relativa tienen problemas para distinguirla de la frecuencia absoluta, entender el porcentaje en el contexto del conjunto de datos, y realizar correctamente las divisiones y cálculos de porcentajes.

El trompo con probabilidad puede ayudar mediante experimentos prácticos. Los estudiantes pueden visualizar la frecuencia absoluta de cada evento y luego calcular las frecuencias relativas. Esta comparación les ayuda a distinguir entre los dos conceptos y entender la relación entre ellos. Además, al introducir el concepto de porcentaje en el contexto de las frecuencias relativas, pueden aprender a expresar las probabilidades de manera más significativa. Incorporar actividades interactivas y ejercicios de práctica con el trompo permite un refuerzo continuo de estos conceptos, lo que contribuye a mejorar la comprensión y las habilidades en conteo y cálculo de probabilidades.

5.2.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Organice estudiantes en equipos de 4 integrantes y asigne roles rotativos, como secretario, portavoz, coordinador y otros que considere pertinentes.

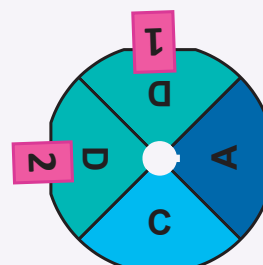
5.2.7. Situación problemática

Carrera de giros con trompos con probabilidad

El objetivo del juego es que los equipos giren trompos específicos, registren sus resultados y presenten su registro de forma prolija (claro, detallado y bien organizado). Durante la ejecución de los giros, los equipos irán observando los resultados que obtienen mayor frecuencia. Para nuestro juego, los equipos ejecutarán 30 giros (este puede variar)

Reglas del juego:

1. Al inicio, cada equipo debe organizarse con roles determinados: líder, anotador de resultados, controlador del tiempo con un cronómetro y giradores.
2. Los giradores deben realizar los giros de manera adecuada para asegurar que el trompo gire correctamente.
3. El tiempo comienza a correr desde el momento en que se ejecuta el primer giro y se detiene al finalizar el último giro.



Restricciones:

- Un observador monitoreará la ejecución adecuada de los giros. Si se verifica un lanzamiento inadecuado o un mal registro de los resultados, el equipo regresará al giro inicial.
- Al detenerse un trompo en la posición duda, se deberá repetir el giro.

Término del juego:

- El equipo que realice los giros adecuadamente y presente su registro será el ganador.

¡A girar trompos y que gane el mejor equipo!

5.2.8. Recomendación didáctica: El juego como fuente de aprendizaje de la matemática

Adaptación

A esta etapa corresponden los juegos libres o preliminares, como actividades, sin un propósito aparente, lo que permite que el estudiante interactúe libremente con objetos concretos, los explore y encuentre satisfacción en la actividad misma.

1. Entregue a los estudiantes el juego, y solicite que armen los trompos y ejecuten giros libremente utilizando los diferentes discos intercambiables.

Estructuración

La actividad conduce al mayor número de experiencias para comprender las reglas de juego (restricciones). Sin embargo, su característica es aún la ausencia de claridad en lo que se busca. Incluye la percepción de enunciados y se da las reglas de juego que conllevarán a lo que se pretende lograr.

1. Presente a los estudiantes el juego y dé a conocer el propósito, las reglas y restricciones.
2. Indica que el objetivo del juego es que los equipos giren trompos específicos, registren sus resultados y realicen la cantidad de giros solicitados en el menor tiempo posible. Durante la ejecución de los giros, los equipos deberán observar y registrar los resultados que obtienen con mayor frecuencia.

Abstracción

Los estudiantes obtienen la estructura común de los juegos y se deshacen de los aspectos carentes de interés. Aquí se interioriza la operación, en tanto relaciona aspectos de naturaleza abstracta. Comprende las conexiones con otros juegos o resultados parecidos, básicamente para establecer la estrategia que conducirá todo el juego.

1. Pregunta:

- a) ¿Han experimentado algún juego similar a este?

En cuanto a girar, la ruleta de colores, cuando participas en algún sorteo. También, es algo similar, el hacer bailar un trompo de madera o uno de plástico.

- b) ¿Cuál es el objetivo de nuestro juego?

Es realizar los giros que nos indiquen con los trompos e ir anotando los resultados que se obtengan cuando se detenga el trompo.

- c) ¿Qué aspectos consideran importantes dentro del juego?

- El hacer girar el trompo de la mejor manera posible para que el resultado sea al azar.
- El utilizar un cronometro para medir el tiempo.
- Tener un registro elaborado para facilitar las anotaciones de los resultados.
- Que cada miembro del equipo cumpla su rol responsablemente.

- d) ¿Qué puede llevar a que un equipo se encuentre en desventaja?

Si algún equipo no realiza los giros adecuadamente y hacen trampa, regresará al giro inicial.

- e) ¿Tienen idea que después de realizados los 30 giros, qué color resultara más veces, es decir con mayor frecuencia?

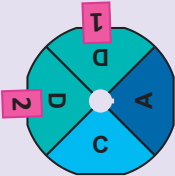
No podemos predecir qué color será, puesto que cada giro es un experimento aleatorio que se basa en la incertidumbre. Pero puede ser que resulten más las letras D1 y D2.

Representación gráfica

Se representa la estructura común o regular reconocida en el juego, de manera gráfica o esquemática como forma de visualización o manifestación. Reconocida la estrategia que le permitió desarrollar el juego con facilidad, esta debe ser puesta en práctica. Se comprueba si la intuición se refleja en la formalidad. Se estudia las propiedades de la representación con el lenguaje técnico del procedimiento u operación, introduciendo el lenguaje simbólico de la matemática.



1. Pide a los estudiantes que se organicen en sus roles y reúnan los materiales necesarios para comenzar el juego de inmediato.
2. El juego inicia simultáneamente en todos los equipos, mientras el docente supervisa que cada se realice correctamente.
3. Al finalizar el juego, compara los tiempos y registros para determinar el equipo ganador. Luego, indica que la información obtenida será objeto de observación y análisis, y solicita a los equipos que sumen los resultados para obtener la frecuencia de cada letra.

 Número de experimento	Resultados			
	A	C	D1	D2
1			X	
2		X		
3		X		
4			X	
5		X		
6	X			
7				X
8				X
9	X			
10		X		
11				X
12				X
13	X			
14			X	
15			X	
16		X		
17	X			
18			X	
19				X
20				X
21	X			
22		X		
23			X	
24		X		
25				X
26	X			
27		X		
28			X	
29		X		
30			X	
Frecuencia absoluta	6	9	8	7

4. Socializa la tabla de un equipo, y a partir de ello, les plantea las siguientes interrogantes:

a) ¿Qué letras resultaron en la ejecución de los giros?

Resultaron todas las letras.

b) ¿Cómo son las frecuencias de cada una de las letras?

Son valores que están cerca entre sí, se puede decir que son valores contiguos.

c) ¿Qué características resaltan en el disco del trompo?

El disco está dividido en cuatro sectores del mismo tamaño, y cada sector está ocupado por una letra.

d) Ahora veamos los resultados de la tabla, ¿cómo pueden interpretar esos resultados obtenidos? ¿para la letra A? ¿para la letra C? ¿para la letra D1? y ¿para la letra D2?

- La letra A resultó 6 veces de un total de 30 giros.
- La letra C resultó 9 veces de un total de 30 giros.
- La letra D1 resultó 8 veces de un total de 30 giros.
- La letra D2 resultó 7 veces de un total de 30 giros.

e) Cada uno de esos resultados que han mencionado son la frecuencia absoluta que es simplemente el número de veces que ocurrió o resultó cada letra. Ahora, dividan cada una de esas interpretaciones y luego cada resultado multiplíquelo por 100.

- Letra A: $\frac{6}{30} = 0,2 \rightarrow 0,2 (100\%) = 20\%$
- Letra C: $\frac{9}{30} = 0,3 \rightarrow 0,3 (100\%) = 30\%$
- Letra D1: $\frac{8}{30} = 0,27 \rightarrow 0,27 (100\%) = 27\%$
- Letra D2: $\frac{7}{30} = 0,23 \rightarrow 0,23 (100\%) = 23\%$

Acaban de hallar las frecuencias relativas de cada letra expresada en decimal o porcentaje.

Descripción de las representaciones

Estudiamos las propiedades de la representación con el lenguaje técnico del procedimiento u operación, introduciendo el lenguaje simbólico de la matemática.

1. Retoma lo realizado en la fase anterior y pide que comenten la representación realizada y las relaciones que puedan establecer.
2. Absuelve las dudas y procura que en las descripciones utilicen los términos matemáticos que se han trabajado en la actividad. Toma nota de alguna confusión que haya podido surgir con relación a los conceptos propuestos.

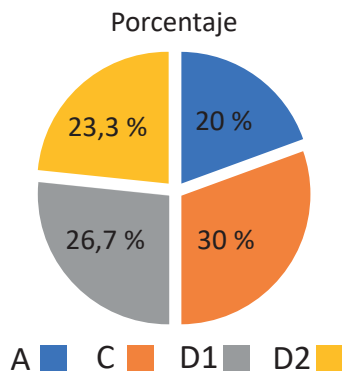
Formalización o demostración

Se describen las propiedades y también se puede inventar un procedimiento para deducir las demás. Los estudiantes exponen lo aprendido de manera segura y de forma convencional, al mismo tiempo que tienen la facultad de devolverse, explicando cada uno de los procesos anteriores.

1. ¿Para hacer tales divisiones, es decir calcular la frecuencia relativa, qué hemos dividido?
Hemos dividido la frecuencia absoluta de cada letra entre el total de giros.
2. Indique que la frecuencia relativa, viene a ser una medida que se utiliza para estimar la probabilidad de un suceso basado en la observación de datos. Generalizando tenemos:

$$\text{Frecuencia relativa} = \frac{\text{Frecuencia absoluta}}{\text{Total de giros}}$$

3. Ahora realizarán las interpretaciones sobre la probabilidad de obtener cada una de las letras del disco como caso favorable en futuras ejecuciones.
¿Cuál es la probabilidad para cada letra?

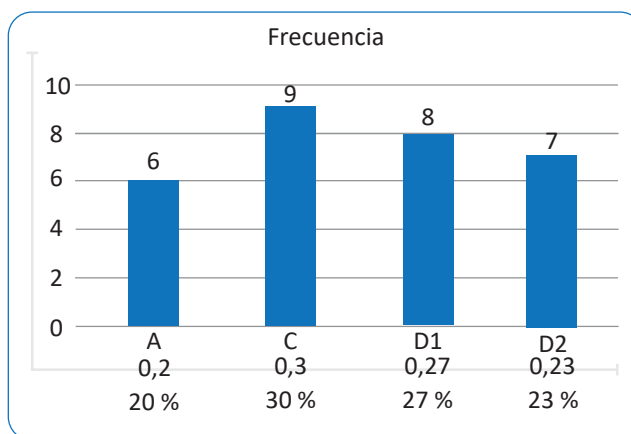


- La probabilidad de obtener la letra A es aproximadamente 0,2 o 20 %.
- La probabilidad de obtener la letra C es aproximadamente 0,3 o 30 %.
- La probabilidad de obtener la letra D1 es aproximadamente 0,27 o 27 %.
- La probabilidad de obtener la letra D2 es aproximadamente 0,23 o 23 %.

Las frecuencias relativas te indican la proporción del total de giros que corresponde a cada letra:

- Letra A: 20 %
- Letra C: 30 %
- Letra D1: 26,7 % (aproximadamente)
- Letra D2: 23,3% (aproximadamente)

4. Elaboren un diagrama de barras o circular mostrando las frecuencias para cada letra y su interpretación.



Interpretación:

- Letra A: 6 resultados (20 % del total)
- Letra C: 9 resultados (30 % del total)
- Letra D1: 8 resultados (27 % del total)
- Letra D2: 7 resultados (23 % del total)

Considerando el diagrama de frecuencias o circular y las probabilidades calculadas para cada letra, si se realizan 80 giros adicionales del disco.

- a) Pregunta: ¿cuántas veces esperarías que aparezca cada letra?

- Para la letra A: $0,2 \times 80 = 16$ casos favorables
- Para la letra C: $0,3 \times 80 = 24$ casos favorables
- Para la letra D1: $0,27 \times 80 = 21,6 \approx 22$ casos favorables
- Para la letra D2: $0,23 \times 80 = 18,4 \approx 18$ casos favorables

- b) ¿En que se basan para hacer esas afirmaciones?

Como la frecuencia relativa me indica la proporción del total de giros, a ese total le hallamos la proporción correspondiente multiplicando por la frecuencia relativa expresada en decimal.

- c) En cada caso se ha aplicado “Número esperado de casos favorables= $P(A) \times$ Número total de giros.

5.2.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos.

Realice un resumen destacando las nociones matemáticas abordadas, enfatizando la importancia de la metodología en la estadística empírica y la toma de decisiones basadas en datos observacionales. Resalte el uso de la frecuencia relativa para estimar la probabilidad de eventos futuros como una técnica fundamentada en la observación y análisis de datos reales. Enfatice que, a medida que aumenta el número de giros (N), la estimación de la probabilidad se vuelve más precisa y confiable.

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- **Responde las preguntas de la metacognición y reflexiona sobre tus procesos de aprendizaje**
 - ¿Qué nociones matemáticas aprendí al jugar con los trompos?
 - ¿Tuve dificultades para comprender la frecuencia absoluta y frecuencia relativa? ¿Cómo las superé?
- **Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:**

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé la probabilidad de un suceso mediante su frecuencia relativa y expresada como decimal o porcentaje.			
Expresé con diversas representaciones y/o lenguaje matemático su comprensión sobre el significado del valor de la probabilidad de una situación aleatoria.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso simple de una situación aleatoria mediante el cálculo de su frecuencia relativa.			
Planteé afirmaciones sobre la probabilidad de ocurrencia de sucesos y las justifiqué usando mis conocimientos probabilísticos.			

5.3.1. Nombre de la actividad

Relacionando la probabilidad teórica y la frecuencial

5.3.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.3.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que impliquen determinar las condiciones de una situación aleatoria y representar la probabilidad de un suceso aplicando tanto la regla de Laplace como la probabilidad frecuencialista. Expresa el significado del valor para caracterizar la probabilidad teórica y la frecuencialista. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace y la probabilidad frecuencialista, a partir de ello, evalúa afirmaciones, y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.

5.3.4. Noción matemática a desarrollar

Regla de Laplace

5.3.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes enfrentan desafíos al comprender y aplicar conceptos de probabilidad, incluyendo la identificación correcta del espacio muestral y eventos, la comprensión de la relación entre frecuencia y probabilidad, y la aplicación incorrecta de la fórmula de la regla de Laplace. Sin embargo, el trompo con probabilidad puede ser una herramienta efectiva para ayudar a los estudiantes a superar estas dificultades. A través de actividades como la visualización de la regla de Laplace, la práctica con ejemplos concretos, la resolución de problemas y juegos de probabilidad, los estudiantes pueden utilizar el trompo con probabilidad para representar los casos posibles y favorables, identificar los resultados posibles, calcular la probabilidad de cada resultado y aplicar la regla de Laplace para determinar las probabilidades de ganar en juegos.

5.3.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Los estudiantes conforman equipos de 5 estudiantes donde los roles serán compartidos.

5.3.7. Situación problemática

En una clase de matemática, un docente presenta la regla de Laplace, indicando que es una probabilidad teórica.

$$P(\text{suceso}) = \frac{\text{número de casos favorables}}{\text{número total de casos posibles (espacio muestral)}}$$

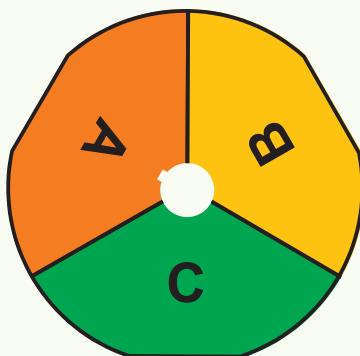
, simbólicamente

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(\Omega)}$$

En seguida, considera el suceso de obtener el “color verde” en un disco de tres sectores, según la regla de Laplace, y menciona que su probabilidad sería:

$$P(\text{verde}) = \frac{1}{3} = 0,33$$

Luego, les pide realizar 30 giros con el mismo disco y registrar los resultados obtenidos. A partir de estos registros, que calculen la probabilidad de obtener el "color verde" a los 10, 20 y 30 giros.



Una estudiante afirma lo siguiente: “la probabilidad de obtener el color verde en el experimento tiende a acercarse a 0,333 a medida que se realizan más giros”.

¡Comprueben y justifiquen esta afirmación!

5.3.8. Recomendación didáctica: Prácticas en laboratorio de matemática

La acción real ejercida por el estudiante

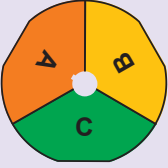
Se requiere la manipulación de material concreto, donde se representen las nociones y se logre su comprensión.

1. Los estudiantes empezarán manipulando los trompos de manera libre durante unos minutos. Esto les ayudará a familiarizarse el cómo se comportan los trompos cuando giran.
2. Solicite a los equipos que seleccionen el trompo con los sectores correspondientes y que cada uno a manera de prueba ejecuten sus propios de giros de trompo. Además, que cuenten con hojas para realizar el registro de resultados.
 - a) Observen el trompo, ¿cuántos colores tiene?
Tres.
 - b) ¿Cómo son los sectores que contienen a los colores?
Todos tienen la misma área (mismo tamaño), y los colores son diferentes.
 - c) ¿Cuál es el espacio muestral del trompo?
Verde, amarillo y anaranjado.
 - d) Si determino como condición o suceso obtener el color “verde”, ¿qué colores cumplen dicha condición y como se les llama?
Solo uno, y este sería el caso favorable.

La acción acompañada por el lenguaje

Cuando el estudiante realiza una actividad o acción, esta debe estar acompañada del lenguaje adecuado que describa y explique la acción que está llevando a cabo.

1. Indique a los estudiantes que realicen cada acción, y a la vez verbalizan y comuniquen de manera clara y precisa lo que están haciendo y porqué lo están haciendo, lo que permitirá el uso del lenguaje adecuado para facilitar la comunicación entre los estudiantes y el docente.
 - a) ¿Cuántos giros ejecutarán y qué representa cada uno de ellos?
Cada uno es un experimento aleatorio, se debe ejecutar 30 experimentos aleatorios.
 - b) Observen el trompo, ¿los tres colores tendrán la misma probabilidad de resultar? ¿por qué creen eso?
Si, porque solo hay un sector por cada color, además el disco está dividido en tres partes iguales.
 - c) Cuando se da ello, se trata de sucesos equiprobables que se caracterizan por tener todos los casos posibles con la misma probabilidad de ocurrir. En otras palabras, cada resultado tiene igual posibilidad de suceder. Luego, solicite que los estudiantes ejecuten los experimentos aleatorios con el trompo.

Número de experimento 	Resultados		
	A	B	C
1	X		
2		X	
3		X	
4	X		
5		X	
6		X	
7		X	
8		X	
9			X
10	X		
Frecuencia absoluta	3	6	1
11			X
12			X
13		X	
14			X
15	X		
16		X	
17	X		
18			X
19			X
20			X
Frecuencia absoluta	5	8	7
21		X	
22	X		
23	X		
24			X
25		X	
26		X	
27		X	
28	X		
29		X	
30			X
Frecuencia absoluta total	8	13	9

2. Indique a los estudiantes que deben calcular la probabilidad del suceso de obtener “color verde” pero, por tramos, es decir, a los 10, 20 y 30 giros para su posterior análisis.
- a) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial para el suceso a los 10 giros?

$$P(C) = \frac{1}{10}$$

$$P(C) = \frac{1}{10} = 0,1$$

- b) ¿Cómo lo interpretan?

0,1 es decir, existe una probabilidad del 10 % que resulte el color verde.

- c) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial para el suceso a los 20 giros?

$$P(C) = \frac{7}{20}$$

$$P(C) = \frac{7}{20} = 0,35$$

- d) ¿Cuál sería su interpretación?

0,35 es decir, existe una probabilidad del 35 % que resulte el color verde.

- e) ¿Cuál es la probabilidad frecuencial para el suceso a los 30 giros?

$$P(C) = \frac{9}{30}$$

$$P(C) = \frac{9}{30} = 0,3$$

- f) ¿Cuál es su interpretación?

0,30 es decir, existe una probabilidad del 30 % que resulte el color verde.

Relato

El estudiante llega a ser capaz de decir lo que hace. Así se inicia en el trabajo en un nivel abstracto.

1. El docente brindará algunas interrogantes para que a partir de ellas los estudiantes en equipo expliquen lo realizado en la etapa anterior sin llevar a cabo la acción física.
- a) ¿Qué han realizado con el trompo con probabilidad?

Hemos realizado experimentos aleatorios para determinar la probabilidad frecuencialista de obtener el “color verde” a los 10, 20 y 30 giros.

- b) ¿Cómo se han comportado esos valores de la probabilidad para el suceso a los 10, 20 y 30 giros?

Los valores se han ido incrementando.

- c) Ahora fijemos nuestra atención en la probabilidad obtenida aplicando la regla de Laplace (probabilidad teórica), relacionen este valor con los valores obtenidos (probabilidad frecuencialista) durante los experimentos aleatorios con el trompo, ¿existirá relación alguna?

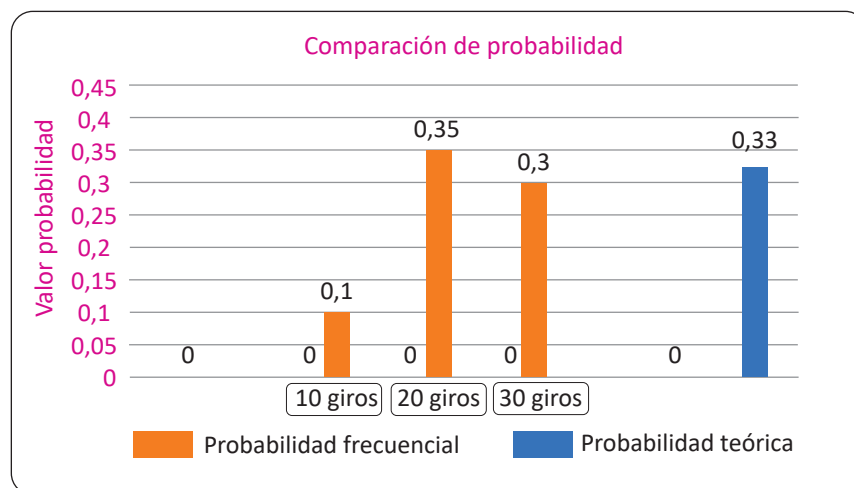
Según la regla de Laplace, la probabilidad para el suceso obtener el “color verde” fue de 0,33, y con la probabilidad frecuencialista los valores de la probabilidad fueron 0,1; 0,35 y 0,3.

Cuando fueron menos giros fue menor el valor, aumentamos los giros y los valores se fueron acercando al valor 0,33.

Representación gráfica

El estudiante logra las representaciones gráficas. Pueden, ante todo, ser muy concretas y luego irse alejando poco a poco de la realidad hasta llegar a convertirse en expresiones simbólicas.

1. Solicite a los equipos que realicen un gráfico (barras o circular) que represente la probabilidad frecuencial y la teórica.



A continuación, solicite a los equipos que respondan el reto planteado en la situación problemática.

La afirmación es verdadera, a medida que fueron aumentando los giros del trompo, la frecuencia tiende a acercarse a la probabilidad teórica de 0,33 lo que demuestra la validez de la regla de Laplace.

5.3.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos.

Realice un resumen destacando las nociones matemáticas abordadas. Además resalte que la probabilidad frecuencialista se puede utilizar para calcular la probabilidad de un suceso en un numero finito de repeticiones, mientras que la regla de Laplace (probabilidad teórica) se puede utilizar para calcular la probabilidad de un suceso en un número infinito de repeticiones y se aplica a sucesos equiprobables.

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- Invite a los estudiantes a responder las preguntas de metacognición para que reflexione sobre sus procesos de aprendizaje.
 - ¿Qué nociones matemáticas aprendí al experimentar con los trompos?
 - ¿Tuve dificultades para comprender la relación que existe entre la probabilidad frecuencialista y la teórica? ¿Cómo las supere?

- Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Representé la relación de la probabilidad de un suceso aplicando la regla de Laplace y la probabilidad frecuencial.			
Expresé el significado del valor para caracterizar y comparar la probabilidad teórica y frecuencial.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de un suceso de una situación aleatoria mediante la regla de Laplace y la probabilidad frecuencialista.			
Evalué afirmaciones y las justifiqué usando mis conocimientos probabilísticos.			

5.4.1. Nombre de la actividad

Comprendiendo la regla de la suma para sucesos mutuamente excluyentes

5.4.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.4.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucren la determinación de las condiciones de una situación aleatoria y la representación de sucesos mutuamente excluyentes. Expresa el significado del valor de la probabilidad al caracterizar sucesos mutuamente excluyentes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes mediante la regla de la suma, a partir de ello, evalúa afirmaciones y las justifica utilizando sus conocimientos probabilísticos.

5.4.4. Noción matemática a desarrollar

Regla de la suma para sucesos mutuamente excluyentes.

5.4.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes presentan dificultades para identificar eventos mutuamente excluyentes en los experimentos aleatorios. Y principalmente tienen dificultades para comprender por qué si los eventos no pueden ocurrir a la vez, se calcula la probabilidad sumando las probabilidades de dichos sucesos.

Para superar estas dificultades, la práctica repetida de actividades y juegos con el trompo con probabilidad son acciones efectivas para ayudar a los estudiantes a identificar eventos excluyentes dentro un mismo espacio muestral para interpretar la probabilidad de que ocurra uno u otro suceso.

5.4.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Los estudiantes se reúnen en equipos de 4 integrantes y se asignan roles rotativos, como secretario, portavoz, coordinador y otros que se considere pertinentes.

5.4.7. Situación problemática

En la clase de matemáticas, los estudiantes experimentarán haciendo girar el trompo con probabilidad, el cual está dividido en cinco sectores: verde claro, plomo, púrpura, verde limón y azul. Cada uno de los sectores tiene la misma probabilidad de detenerse al girar el trompo. Dos compañeros de un equipo, Juan y María, están jugando a apostar con en el trompo con probabilidad.



Trompo de 5 sectores con colores diferentes

María apuesta que, al girar el trompo se detendrá en el sector plomo o en el sector púrpura. Ante esto, Juan afirma: "Como tu apuesta indica que ganas cuando sale uno o cuando sale el otro color, entonces yo creo que la probabilidad" que gane es mayor. ¿Están de acuerdo? Justifiquen su respuesta.

5.4.8. Recomendación didáctica: Prácticas en laboratorio de matemática

La acción real ejercida por el estudiante

Se requiere la manipulación de material concreto, donde se representen las nociones y se logre su comprensión.

1. Los estudiantes empezarán manipulando los trompos de manera libre durante unos minutos. Esto les ayudará a familiarizarse el cómo se comportan los trompos cuando giran.
2. Solicite a los equipos que seleccionen el trompo con los sectores correspondientes y que cada uno a manera de prueba ejecuten sus propios de giros de trompo.
 - a) ¿Cuántos sectores tiene el trompo que se menciona en la situación problemática?
Tiene 5 sectores de colores diferentes.
 - b) ¿Cuál es el espacio muestral del trompo?
Verde claro, azul, verde limón, púrpura y plomo.
 - c) ¿Cuando giren el trompo, en cuántos colores se detendrá?
Solo se detendrá en un solo color
3. Invita a los estudiantes a realizar sus propios lanzamientos y registras los resultados de hasta 30 experimentos aleatorios con el dado seleccionado y que registren sus resultados.

 Número de experimento	Resultados				
	Verde	Plomo	Púrpura	Verde limón	Azul
1				X	
2			X		
3	X				
4	X				
5		X			
6				X	
7		X			
8			X		
9		X			
10	X				
11		X			
12		X			
13			X		
14		X			
15				X	
16				X	
17			X		
18	X				
19					X
20				X	
21		X			
22	X				
23					X
24	X				
25		X			
26				X	
27	X				
28	X				
29	X				
30				X	
Frecuencia absoluta	9	8	4	7	2

a) ¿Cuántos giros del trompo se realizaron en total?

30 giros.

b) ¿Cuál es la frecuencia relativa del color plomo y del color púrpura?

Plomo:

$P = \frac{8}{30} = 0,267$, es decir la probabilidad que ocurra el color plomo es 0,266 o 26,6 %.

Púrpura:

$P = \frac{4}{30} = 0,133$, es decir la probabilidad que ocurra el color púrpura es 0,133 o 13,3 %.

La acción acompañada por el lenguaje

Cuando el estudiante realiza una actividad o acción, esta debe estar acompañada del lenguaje adecuado que describa y explique la acción que está llevando a cabo.

1. Indique a los estudiantes que realicen cada acción, y a la vez verbalicen y comunican de manera clara y precisa lo que están haciendo y porqué lo están haciendo, lo que permitirá el uso del lenguaje adecuado para facilitar la comunicación entre los estudiantes y el docente, permitiendo una retroalimentación más efectiva y una comprensión compartida del proceso de aprendizaje.

a) ¿Qué resultados espera María que ocurran? Definan los sucesos a y b relacionados con ello.

María espera que se obtenga "plomo en el primer trompo y púrpura en el segundo trompo. Entonces, los sucesos serán:

Suceso A: "Obtener el color plomo" y el suceso B: "obtener el color púrpura".

b) Al detenerse el trompo solo se obtendrá un solo color. Entonces los sucesos que espera María, ¿cómo ocurrirán?

Ambos sucesos podrán obtenerse, uno primero y luego el otro sin importar el color. Pero, al mismo tiempo, nunca.

c) Señale que los sucesos que no pueden ocurrir a la vez, se les conoce como sucesos mutuamente excluyentes, y para calcular la probabilidad de que ocurra al menos uno de varios sucesos se aplica la regla de la suma. Se representa simbólicamente:

$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, donde $P(A)$ es la probabilidad que salga el color plomo y $P(B)$ es la probabilidad que salga púrpura.

Relato

El estudiante llega a ser capaz de decir lo que hace. Así se inicia en el trabajo en un nivel abstracto.

1. Brinda algunas interrogantes para que a partir de ellas los estudiantes en equipo describan y expliquen lo realizado en la etapa anterior sin llevar a cabo la acción física.

a) ¿Cuales son los sucesos que espera Maria y que ocurre con ellos?

Uno es que salga plomo y el otro que salga púrpura. No pueden ocurrir ambos a la vez.

b) ¿Cómo se llaman esos sucesos que si ocurre uno ya no puede ocurrir el otro?

Se llaman sucesos mutuamente excluyentes.

- c) ¿Cómo podemos calcular la probabilidad de los sucesos que María espera que ocurran?

Como ya tenemos las probabilidades tanto del color plomo $P(A) = 0,267$ y del color púrpura $P(B) = 0,133$, ahora aplicamos la expresión para determina la ocurrencia de sucesos mutuamente excluyentes.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

$$P(A \cup B) = 0,267 + 0,133$$

$P(A \cup B) = 0,4$, es decir, la probabilidad que ocurra el suceso A o el suceso B es 0,4 o 40 %.

- d) ¿Qué implica la regla de la suma para la interpretación de la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes? ¿Qué conclusiones se pueden extraer?

La regla de la suma implica que la probabilidad de que ocurra al menos uno de los sucesos mutuamente excluyentes es igual a la suma de las probabilidades individuales de cada suceso. Esto permitirá extraer conclusiones sobre la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes y su relación con la probabilidad de sucesos individuales.

Representación gráfica

El estudiante logra las representaciones gráficas. Pueden, ante todo, ser muy concretas y luego irse alejando poco a poco de la realidad hasta llegar a convertirse en expresiones simbólicas.

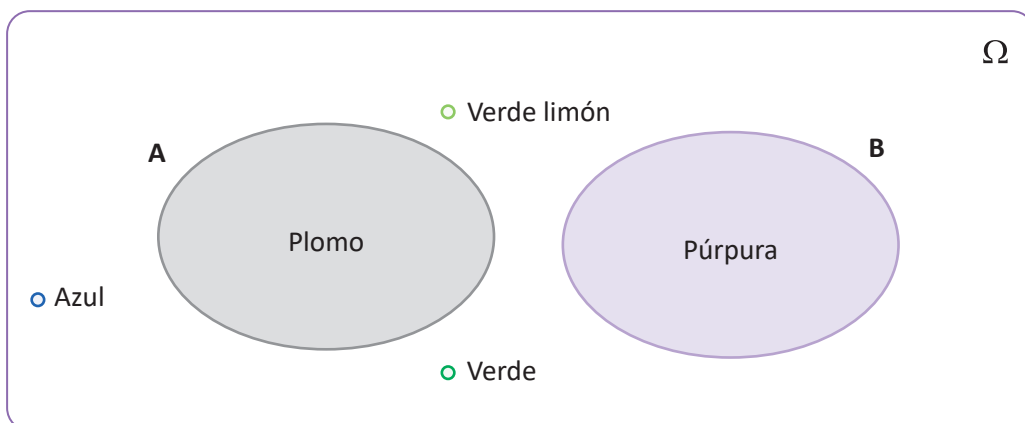
1. Solicite a los equipos que elaboren otra forma de representación, por ejemplo los diagrama de Venn del espacio muestral del experimento aleatorio y sus subconjuntos: sucesos A y suceso B.
2. Enseguida, solicite a los equipos que respondan el reto planteado en la situación problemática.

(Respuesta de un equipo). En nuestro conjunto de experimentos Juan no tiene la razón, porque la probabilidad de que ocurra un color o el otro color, es decir ocurra plomo o púrpura es 0,40 o el 40 % de la probabilidad total, que es el 1 o 100 %. Por lo tanto, la probabilidad que gane María es **menor** a que no gane.

5.4.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos

Invite a los equipos a socializar sus esquemas, gráficos y sus resultados de los procedimientos realizados.



Realice un resumen de las nociones matemáticas que se abordaron. Destaque cómo las nociones matemáticas se aplican en situaciones de la vida cotidiana.

Regla de la suma para eventos mutuamente excluyentes.

- Si A y B son dos, la probabilidad de que ocurra A o que ocurra B implica la unión de ambos sucesos. Por ello la probabilidad se denota: $P(A \cup B)$:
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- Invite a los estudiantes a responder las preguntas de metacognición de forma individual.
 - ¿Qué nociones matemáticas aprendí con los trompos?
 - ¿Tuve dificultades para comprender cuándo y cómo aplicar la regla de la suma? ¿Cómo las superé?
- Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones de una situación aleatoria y sucesos mutuamente excluyentes.			
Expresé el significado del valor de la probabilidad al caracterizar sucesos mutuamente excluyentes.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos mutuamente excluyentes mediante la regla de la suma.			
Evalué afirmaciones y las justifiqué utilizando sus conocimientos probabilísticos.			

5.5.1. Nombre de la actividad

Jugamos con dos trompos

5.5.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.5.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que involucran la determinación de las condiciones con diversas representaciones de una situación aleatoria con de sucesos independientes. Expresa el significado del valor de la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria mediante la regla del producto. Plantea afirmaciones y las justifica utilizando sus conocimientos.

5.5.4. Noción matemática a desarrollar

Sucesos independientes, regla del producto

5.5.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes a menudo encuentran difícil entender sucesos independientes en probabilidad y aplicar la regla del producto. Esto implica comprender que la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad del otro y saber por qué se multiplican las probabilidades en sucesos independientes.

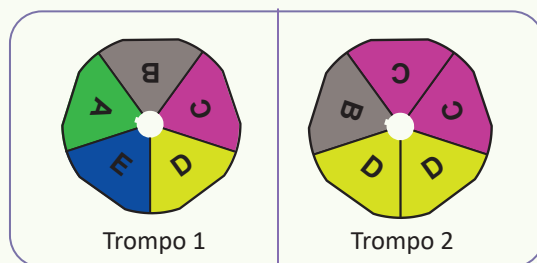
Utiliza los trompos con probabilidad para representar sucesos independientes claramente visualizados. Asigna diferentes colores a cada trompo y demuestra cómo la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad del otro suceso. Introduce la regla del producto, explicando que la probabilidad de que ocurran dos sucesos independientes es el producto de sus probabilidades individuales. Proporciona ejemplos prácticos donde los resultados de un trompo no influyen en los resultados de los otros, y fomenta la exploración mediante juegos y actividades interactivas que refuercen la comprensión de la independencia de los sucesos y la aplicación de la regla del producto en situaciones prácticas.

5.5.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Los estudiantes conforman equipos de 5 estudiantes donde los roles serán compartidos.

5.5.7. Situación problemática

Dos compañeros ejecutarán 20 giros consecutivos, cada uno con un Trompo con probabilidad con sectores de distinto color (los que se muestran en la imagen).



Germán afirma lo siguiente: “Yo creo que, después de 20 giros con ambos trompos, la probabilidad de obtener en ambos un mismo color es muy alta”. En cambio, Sofía replica: “Yo creo que la probabilidad de que ocurra lo que dices es muy baja”. ¿Quién tendrá la razón? Justifica tu respuesta.

5.5.8. Recomendación didáctica: Prácticas en laboratorio de matemática

La acción real ejercida por el estudiante

Se requiere la manipulación de material concreto, donde se representen las nociones y se logre su comprensión.

Disponga que, durante unos minutos, los estudiantes empiecen manipulando los trompos de manera libre. Esto les ayudará a familiarizarse con el cómo se comportan cuando giran.

1. Solicite a los equipos que seleccionen los trompos con los sectores que se mencionan y que cada uno, a manera de prueba, ejecute sus propios giros.
 - a) ¿Cuántos sectores tiene cada trompo que se menciona en la situación??

Tienen cinco sectores. Todos los sectores del trompo 1 tienen diferentes colores. En el trompo 2, solo se muestran tres sectores; y se repiten dos de estos.
 - b) ¿Cuál es el espacio muestral de cada trompo?

En el trompo 1, verde claro, azul, verde limón, púrpura y plomo; en el trompo 2, verde limón, verde limón, púrpura, púrpura y plomo.
 - c) ¿En qué orden se debe ejecutar los giros con los trompos?

Primero se girará el trompo 1 y luego el trompo 2.
2. Invite a los estudiantes a que realicen sus propios giros y registren los resultados de hasta 20 experimentos aleatorios con los trompos seleccionados, para comprobar quién tiene la razón.

Número de experimento	Trompo 1					Trompo 2		
	A	B	C	D	E	B	C	D
1					X			X
2	X					X		
3		X					X	
4			X					X
5		X						X
6			X			X		
7			X			X		
8				X			X	
9		X					X	
10		X				X		
11	X					X		
12		X						X
13		X					X	
14				X				X
15					X		X	
16			X					X
17				X		X		X
18					X		X	
19					X			
20		X					X	
Frecuencia absoluta	2	7	4	3	4	6	7	7

(Ejemplo de una experimentación. Cada equipo tendrá diversos resultados)

La acción acompañada por el lenguaje

Cuando el estudiante realiza una actividad o acción, esta debe estar acompañada del lenguaje adecuado que describa y explique la acción que está llevando a cabo.

1. Indique que efectúen las acciones necesarias, y verbalicen de manera clara y precisa lo que están haciendo y por qué. Esto permitirá guiarlos en el uso del lenguaje adecuado, y así se facilita la comunicación entre estudiante y docente, y se logra una retroalimentación más efectiva y una comprensión compartida del proceso de aprendizaje.
 - a) ¿Cuántos experimentos aleatorios realizaron en total con los trompos?
40 experimentos aleatorios, 20 con el trompo 1 y 20 con el trompo 2.
 - b) ¿Cuáles son las probabilidades relativas de cada uno de los colores en cada trompo, tomando los resultados obtenidos en la tabla? Interpretélas.

Trompo 1

- $P(\text{verde}) = \frac{2}{20} = 0,10$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color verde claro es 0,10 o 10 %
- $P(\text{plomo}) = \frac{7}{20} = 0,35$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color plomo es 0,35 o 35 %.
- $P(\text{púrpura}) = \frac{4}{20} = 0,20$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color púrpura es 0,20 o 20 %.
- $P(\text{verde limón}) = \frac{3}{20} = 0,15$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color verde limón es 0,15 o 15 %.
- $P(\text{azul}) = \frac{4}{20} = 0,20$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color azul es 0,20 o 20 %.

Trompo 2

- $P(\text{plomo}) = \frac{6}{20} = 0,3$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color plomo es 0,30 o 30 %.
- $P(\text{púrpura}) = \frac{7}{20} = 0,35$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color púrpura es 0,35 o 35 %.
- $P(\text{verde limón}) = \frac{7}{20} = 0,35$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color verde limón es 0,35 o 35 %.

Relato

El estudiante llega a ser capaz de decir lo que hace. Así se inicia en el trabajo en un nivel abstracto.

1. Haga algunas interrogantes para que a partir de estas los estudiantes, en equipo, describan y expliquen lo efectuado en la etapa anterior sin llevar a cabo la acción física.

- a) ¿Tenemos las probabilidades relativas estimadas para cada color y sector?, ¿y cómo llegamos a esas estimaciones?

Para llegar a ellas, tuvimos primero que experimentar con dos trompos e ir registrando los resultados. Luego tuvimos que calcular la frecuencia absoluta por sector o color y, a partir de ello, pudimos calcular sus frecuencias relativas. Estas estimaciones están basadas en la observación de los datos de la tabla.

- b) ¿Entonces qué probabilidad estamos empleando?

La probabilidad frecuencialista, que se basa en la frecuencia absoluta de sus sucesos, es decir, en el número de veces que ocurre en un conjunto de giros. Al estimar las frecuencias absolutas de los giros, se estima también la probabilidad de cada resultado.

- c) ¿Qué pasaría si realizamos otro conjunto de experimentos?

Es posible que varíen esas estimaciones si realizamos otro conjunto de experimentos.

- d) ¿Cuál es el suceso que nos plantea la situación?

Que en ambos giros de los trompos resulten los mismos colores; es decir, plomo (B) y plomo (B), o púrpura (C) y púrpura (C), o verde limón (D) y verde limón (D).

- e) Cuando giraron los trompos consecutivamente, ¿tuvieron alguna dificultad para obtener los colores en ambos trompos?

No, ninguna dificultad. Los colores fueron resultando libremente.

- f) Cuando realizamos experimentos aleatorios, simultáneamente como consecutivamente —donde la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad de que ocurra otro suceso—, se trata de sucesos independientes. Esto significa que la probabilidad de que ambos sucesos ocurran juntos es igual al producto de sus probabilidades individuales. Es decir:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

- g) Ahora estimen las probabilidades de los sucesos que nos plantea la situación.

- **Obtener el color plomo en ambos trompos:**

$P(\text{plomo y plomo}) = P(\text{plomo}) \times P(\text{plomo}) = 0,35 \times 0,3 = 0,105$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color plomo simultáneamente es 0,105 o 10,5 %.

- **Obtener el color púrpura en ambos trompos:**

$P(\text{púrpura y púrpura}) = P(\text{púrpura}) \times P(\text{púrpura}) = 0,20 \times 0,35 = 0,07$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color púrpura simultáneamente es 0,07 o 7 %.

- **Obtener el color verde limón en ambos trompos:**

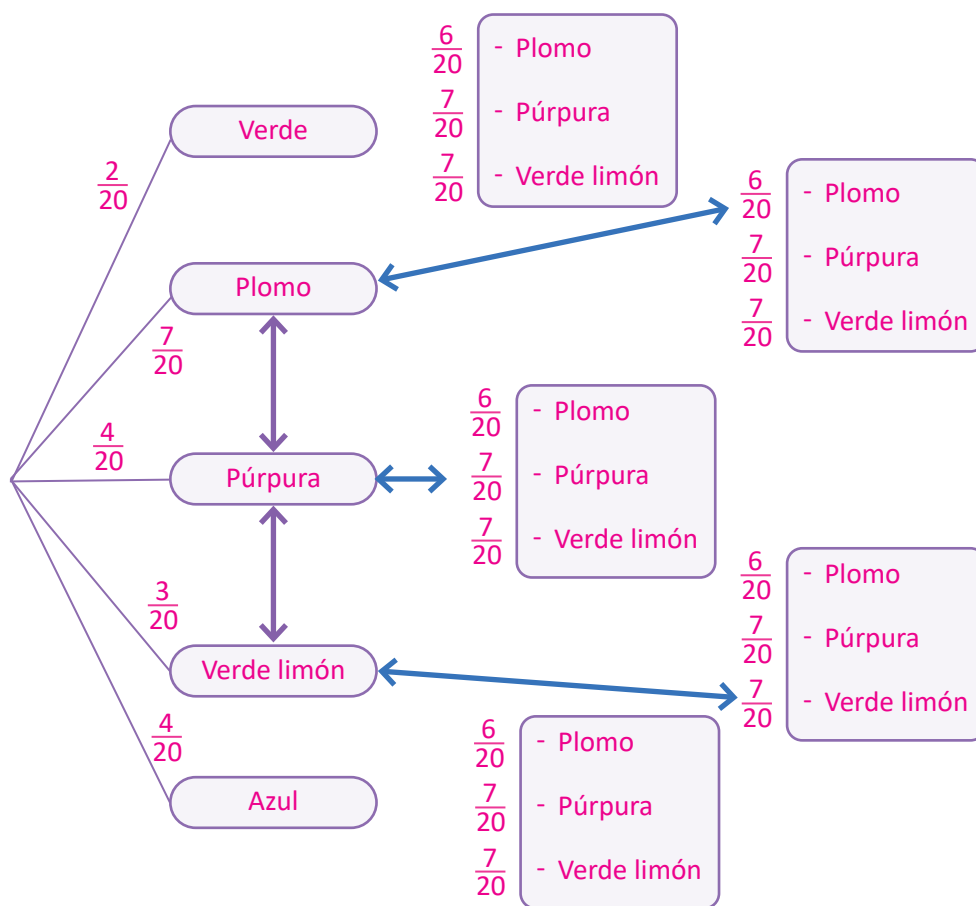
$P(\text{verde limón y verde limón}) = P(\text{verde limón}) \times P(\text{verde limón}) = 0,15 \times 0,35 = 0,0525$, es decir, la probabilidad de que ocurra el color verde limón simultáneamente es 0,0525 o 5,25 %.

- h) ¿Serán esas estimaciones suficientes para el suceso que nos plantea la situación?
No, hemos estimado si solo nos sale un solo color y tenemos tres colores que cumplen la condición del suceso de la situación.
- i) Correcto, tenemos tres posibilidades de colores que se pueden repetir en ambos trompos. ¿Los tres colores pudieron ocurrir a la vez?
No, solo un color a la vez puede ocurrir simultáneamente en ambos trompos.
- j) Cuando sucede eso, ¿en qué regla tenemos que pensar?
En la regla de la suma ya que obtenemos verde limón o púrpura, o plomo. No puede ocurrir los tres a la vez; es decir, ocurren por separado. Entonces:
- $$P(\text{plomo} \cup \text{púrpura} \cup \text{verde limón}) = P[(\text{plomo}) \times P(\text{plomo})] + P[(\text{púrpura}) \times P(\text{púrpura})] + P[(\text{verde limón}) \times P(\text{verde limón})]$$
- $$P(\text{plomo} \cup \text{púrpura} \cup \text{verde limón}) = [0,35 \times 0,3] + [0,2 \times 0,35] + [0,15 \times 0,35]$$
- $$P(\text{plomo} \cup \text{púrpura} \cup \text{verde limón}) = [0,105] + [0,07] + [0,0525]$$
- $$P(\text{plomo} \cup \text{púrpura} \cup \text{verde limón}) = 0,2275, \text{ es decir, la probabilidad de que ocurra un mismo color ya sea plomo o púrpura, o verde limón, simultáneamente es } 0,2275 \text{ o } 22,75 \%.$$
- k) ¿Qué pasaría si invertimos el orden de los trompos y, en consecuencia, también las estimaciones de sus probabilidades?
El orden en que se aplica las probabilidades no afecta el resultado cuando se utiliza la regla del producto. La probabilidad conjunta se calcula multiplicando las probabilidades de cada suceso individualmente, sin importar el orden en que se aplica las probabilidades.
- l) ¿Qué implica la regla del producto para la determinación de la probabilidad de sucesos independientes? ¿Qué conclusiones se puede extraer?
La regla del producto se utiliza cuando se tiene dos sucesos independientes y se quiere calcular la probabilidad de que ambos ocurran simultáneamente o consecutivamente. En este caso, se puede calcular al multiplicar las probabilidades individuales de cada uno de los sucesos, lo que facilita los cálculos y proporciona una estimación precisa de la probabilidad conjunta.

Representación gráfica

Las representaciones gráficas pueden, ante todo, ser muy concretas y luego irse alejando poco a poco de la realidad hasta llegar a convertirse en expresiones simbólicas.

Solicite a los equipos que, mediante el diagrama de árbol, representen las probabilidades relativas de cada uno de los colores de cada trompo y señalen las probabilidades que tomaron para estimar el suceso de la situación. Esto ayudará a visualizar y organizar los datos de manera efectiva, y aclarará las probabilidades relativas de cada color en cada trompo.



Enseguida pida a los equipos que respondan el reto planteado en la situación problemática. (Respuesta de un equipo). En nuestro conjunto de experimentos Sofía tiene la razón, porque la probabilidad de que ocurra un mismo color, ya sea plomo o púrpura, o verde limón, simultáneamente en ambos trompos, es 0,2275 o el 22,75 % de la probabilidad total, que es el 1 o 100 %.

Tenga en cuenta que la pregunta relacionada con el desafío es abierta, ya que dependerá de los resultados obtenidos en cada conjunto de experimentos realizados por cada equipo.

5.5.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos

Realice un resumen de las nociones matemáticas que se abordaron. Destaque cómo las nociones matemáticas se aplican en situaciones de la vida cotidiana.

Invite a los equipos a socializar sus esquemas, gráficos y sus resultados de los procedimientos realizados.

Regla de la multiplicación para eventos independientes.

La probabilidad del evento $A \cap B$ que indica que tanto A como B ocurran, es decir A y B, se denota y calcula así:

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \quad \text{o} \quad P(A \text{ y } B) = P(A) \times P(B)$$

Cuando A y B son sucesos independientes

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- Invite a los estudiantes a responder las preguntas de metacognición de forma individual.
 - ¿Qué nociones matemáticas aprendí con los trompos?
 - ¿Tuve dificultad para identificar un suceso independiente? ¿Tuve dificultad para comprender qué es y cómo aplicar la regla del producto? ¿Cómo las superé?
- Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones de una situación aleatoria y sucesos independientes.			
Expresé con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria.			
Empleé procedimientos y estrategias para determinar la probabilidad de sucesos independientes en una situación aleatoria mediante la regla del producto.			
Planteé afirmaciones y las justifiqué utilizando mis conocimientos probabilísticos			

5.6.1. Nombre de la actividad

Jugando con un trompo y bolas de colores

5.6.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.6.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que implican determinar las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos dependientes. Expresa con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos dependientes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos dependientes de una situación aleatoria. Evalúa afirmaciones sobre sucesos aleatorios dependientes y las justifica usando sus conocimientos probabilísticos.

5.6.4. Noción matemática a desarrollar

Probabilidad de sucesos dependientes

5.6.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Para abordar las dificultades de aprendizaje sobre sucesos dependientes utilizando el trompo con probabilidad, es recomendable emplear estrategias visuales y prácticas. Los trompos pueden ser usados para representar sucesos específicos mediante colores distintos, permitiendo a los estudiantes manipular y visualizar cómo la ocurrencia de un suceso afecta la probabilidad de otros sucesos. Es útil enseñar la secuencia de sucesos y cómo uno influye en el siguiente, proporcionando ejemplos prácticos y desafíos reflexivos para mejorar la comprensión. Juegos y simulaciones también pueden ser efectivos para involucrar a los estudiantes y aplicar conceptos de probabilidad condicional de manera interactiva y significativa.

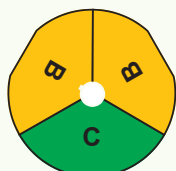
5.6.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Los estudiantes se reúnen en equipos de 4 a 6 integrantes y se asignan roles rotativos, como secretario, portavoz, coordinador y otros que se considere pertinentes.

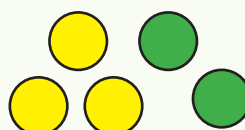
5.6.7. Situación problemática

Dos estudiantes llevan materiales para la clase de matemáticas. Entre estos se encuentra un trompo dividido en tres sectores, de colores verde y amarillo; y una bolsa con bolas cuyos colores corresponden a los del trompo: tres bolas amarillas y dos bolas verdes (tal como se muestra en la figura).

Trompo de dos sectores de color amarillo y un sector de color verde



Bolsa con tres bolas de color amarillo y dos bolas de color verde



Decidieron comenzar su experimento con el trompo, realizando 30 giros. Los resultados de estos giros serán utilizados para responder a los desafíos que les serán planteados. Ayudemos a los estudiantes a resolver estos retos.

5.6.8. Recomendación didáctica: Planteamiento de talleres matemáticos

Familiarización

Desarrollar un clima de confianza y motivación permanente es importante. Por ello los estudiantes deben resolver problemas de nivel elemental que les permita identificar los conceptos que se abordarán y luego resolver los retos planteados.

1. Invite a los estudiantes a comprender la situación problemática a través del planteamiento de interrogantes.

- a) ¿De qué trata la situación problemática?

La situación describe una actividad de aprendizaje en una clase de matemáticas, donde dos estudiantes utilizarán materiales específicos para realizar un experimento. Girarán el trompo 30 veces y usarán los resultados obtenidos para resolver una serie de desafíos matemáticos.

- b) ¿Cómo son esos materiales?

Los materiales incluyen un trompo dividido en sectores de colores verde y amarillo, y una bolsa con bolas de colores que coinciden con los del trompo (tres bolas amarillas y dos bolas verdes).

2. Solicite que recreen los 30 giros con el trompo y registren los resultados. A partir de eso, los estudiantes deberán ayudar a resolver los retos planteados a los dos compañeros de la situación problemática. Recreación de la situación:

Número de experimento	Resultados	
	B	C
1	X	
2		X
3	X	
4	X	
5		X
6		X
7		X
8	X	
9	X	
10	X	
11		X
12		X
13		X
14		X
15	X	
16		X
17	X	
18	X	
19		X
20	X	
21	X	
22		X
23		X
24		X
25		X
26		X
27	X	
28	X	
29	X	
30	X	
Frecuencia absoluta total	15	15

(Cada equipo obtendrá resultados diferentes)

Problemas de traducción simple

Se presentan problemas matemáticos que implican una traducción directa de una situación a una expresión matemática simple. Los problemas son de naturaleza más básica y se centran en la aplicación directa de fórmulas o conceptos previamente aprendidos

1. Presente el reto a los estudiantes.

Después de realizar los 30 giros, ¿cuál es la probabilidad de obtener el resultado "color verde"?

2. Haga preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución.

- a) ¿Cuántos experimentos aleatorios realizaron con el *Trompo con probabilidad*?

Realizamos 30 experimentos aleatorios.

- b) ¿Cuál es el espacio muestral?

Es amarillo, amarillo y verde.

- c) ¿Cuál es el suceso a estimar?

El suceso corresponde a obtener el color verde.

3. Oriente la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.

- a) ¿Qué elementos de la tabla deben considerar para poder responder al reto planteado?

Debemos tener en cuenta, por separado, las frecuencias absolutas de cada color; en este caso, del color verde. Y a partir de la tabla de datos elaborada, calcular la probabilidad correspondiente.

- b) ¿Cómo estimarán la probabilidad de obtener la ocurrencia del "color verde"?

Como estamos utilizando la probabilidad frecuencialista, la probabilidad se calcula con la razón entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles. Así:

$$P(\text{verde}) = \frac{15}{30} = 0,5$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener el color verde es 0,5 o 50 %.

- c) Si observan los colores del trompo después de 30 giros, ¿la frecuencia de obtener un resultado verde es significativamente mayor de lo esperado? ¿Qué hipótesis podrían plantear sobre la equidad del trompo?

Si después de 30 giros la frecuencia de obtener un resultado verde es significativamente mayor de lo esperado, se podría plantear la hipótesis de que el trompo no es completamente equitativo; es decir, no tiene la misma probabilidad de detenerse en cada sector. Para probarlo, se podría diseñar un experimento donde se aumente el número de giros —por ejemplo, 100, 200, 300, o incluso 1000— para obtener una muestra más grande y reducir el impacto del error muestral. También hay que registrar meticulosamente cada resultado y asegurarse de que el procedimiento de giro sea lo más consistente posible, para eliminar sesgos introducidos por la técnica del giro.

Problemas de traducción compleja

Se presentan problemas con características de ser complejos y abiertos; y se propicia el intercambio entre los estudiantes.

1. Presente el reto a los estudiantes.

Después de jugar con el trompo, los estudiantes deciden utilizar las bolas de colores. Dependiendo del color que haya obtenido una mayor frecuencia absoluta, sacan dos bolas consecutivamente y sin mirar de la bolsa ni reponerlas.

¿Cuál es la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde o amarillo, y luego saquen de la bolsa dos bolas del mismo color?

2. Haga preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución.

- a) ¿Cómo determinarías la frecuencia absoluta de cada color en el trompo después de jugar con él?

La frecuencia absoluta se determina contando cuántas veces el trompo se detiene en cada color después de muchos giros.

- b) ¿Qué significa sacar dos bolas "sin mirar ni reponerlas" de la bolsa?

Significa que las bolas se extraerán de la bolsa sin ver qué color son y que la primera bola extraída no se devuelva a la bolsa antes de extraer la segunda.

- c) ¿Cómo calcularías la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde?

La probabilidad se calcula dividiendo el número de veces que el trompo cae en un sector verde entre el total de giros realizados, lo cual ya se calculó en el anterior reto.

- d) ¿Cómo determinarías la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color de la bolsa, dado que el trompo cayó en un sector verde?

Esta probabilidad se calcula considerando cuántas bolas de cada color hay en la bolsa después de la extracción del trompo y utilizando el concepto de probabilidad condicional.

3. Oriente la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.

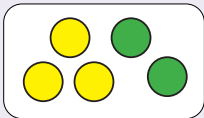
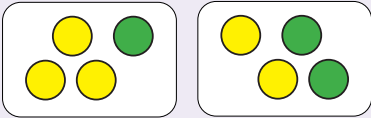
- a) ¿Qué estrategia utilizarías para determinar cuál color tiene la mayor frecuencia absoluta en el trompo?

Una estrategia efectiva sería contar el número de veces que el trompo se detiene en cada color y comparar estas frecuencias para identificar el color dominante. En el experimento realizado el color verde y amarillo tienen la misma frecuencia absoluta.

- b) ¿Cómo diseñarías un experimento para verificar la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color después de que el trompo caiga en un sector verde o amarillo?

Diseñaría un experimento donde, después de cada giro del trompo, extraiga consecutivamente dos bolas de la bolsa sin reponerlas y registrando los resultados. Repetiría este proceso varias veces para obtener datos suficientes.

- c) Ahora efectúen el experimento con las bolas de colores, las cuales deben introducir en una bolsa para su extracción, y registrar sus resultados.

Número de experimento	Resultados de la extracción			
	 Bola 1		 Bola 2 (sin reposición)	
1	amarillo		verde	
2	verde		verde	
3	amarillo		amarillo	
4	amarillo		verde	
5	verde		verde	
6	amarillo		verde	
7	verde		verde	
8	verde		amarillo	
9	amarillo		verde	
10	amarillo		amarillo	
11	amarillo		amarillo	
12	verde		verde	
13	amarillo		verde	
14	amarillo		verde	
15	amarillo		verde	
16	verde		amarillo	
17	verde		amarillo	
18	amarillo		verde	
19	amarillo		verde	
20	verde		amarillo	
21	amarillo		amarillo	
22	amarillo		amarillo	
23	amarillo		verde	
24	amarillo		verde	
25	amarillo		verde	
26	amarillo		verde	
27	verde		amarillo	
28	verde		amarillo	
29	amarillo		verde	
30	amarillo		verde	
Frecuencia absoluta total	20 amarillo	10 verde	11 amarillo	19 verde

(Cada equipo obtendrá resultados diferentes)

- d) A partir de las frecuencias absolutas de las bolas de colores que nos da la tabla, ¿qué podemos hacer?

Debemos calcular su frecuencia relativa o probabilidad.

- e) ¿Cómo calculan las probabilidades de cada uno de los colores?

Como estamos utilizando la probabilidad frecuencalista, la probabilidad se calcula con la razón entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles; como se presenta a continuación:

Bola 1		Bola 2	
Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación	Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación
$\frac{20}{30} = 0,667$	La probabilidad de que extraigamos la bola de color amarillo es 0,667 o 66,7 %.	$\frac{11}{30} = 0,367$	La probabilidad de que extraigamos la bola de color amarillo es 0,367 o 36,7 %.
$\frac{10}{30} = 0,333$	La probabilidad de que extraigamos la bola de color verde es 0,333 o 33,3 %.	$\frac{19}{30} = 0,633$	La probabilidad de que extraigamos la bola de color verde es 0,633 o 63,3 %.

- f) Retomemos el reto “¿Cuál es la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde o amarillo, y luego saquen dos bolas del mismo color de la bolsa?”. Ahora cuenten con las probabilidades del trompo y de las bolas de colores; y queda calcular la probabilidad que le corresponde al reto.

- g) ¿Los sucesos “color verde o amarillo” —que depende del color que haya obtenido una mayor frecuencia absoluta con el trompo— y “sacar dos bolas del mismo color” pueden ocurrir simultáneamente, o el trompo afecta o condiciona a las bolas de colores?

El trompo no afecta ni condiciona a las bolas de colores y sí puede darse simultáneamente.

- h) Entonces, de acuerdo a esas características, ¿de qué sucesos se trata?

De sucesos independientes, y para su cálculo podemos utilizar la regla del producto.

- i) ¿Qué regla, método o concepto utilizarían para calcular la probabilidad de sacar dos bolas del mismo color?

Utilizaría el concepto de probabilidad condicional.

- j) ¿Por qué utilizarían el concepto de la probabilidad condicional?

La probabilidad condicional se utiliza en sucesos sin reposición porque, cuando se extrae un elemento de un conjunto finito sin devolverlo, el espacio muestral y las probabilidades de los eventos restantes cambian.

k) ¿En qué consiste?

La fórmula de la probabilidad condicional se utiliza para calcular la probabilidad de que ocurra un evento A dado que ya ha ocurrido otro evento B . Se denota como $P(A/B)$ y se define de la siguiente manera:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

l) Ahora resuelvan el reto planteado. (Si los equipos obtienen diferentes frecuencias absolutas en el trompo, mayor y menor, se presentará un solo caso).

Para responder al reto, presentaremos dos casos ya que las frecuencias absolutas del trompo son iguales para ambos colores.

CASO 1		
Mayor frecuencia absoluta	Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación
Verde	$P(N) = P(\text{verde}) \times P(\text{amarillo}) \times P(\text{amarillo})$ $P(N) = \frac{15}{30} \times \frac{20}{30} \times \frac{11}{30}$ $P(N) = 0,5 \times 0,667 \times 0,367$ $P(N) = 0,122$	Por lo tanto, la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde y luego saquen dos bolas de color amarillo es 0,122 o 12,2 %.
	$P(N) = P(\text{verde}) \times P(\text{verde}) \times P(\text{verde})$ $P(N) = \frac{15}{30} \times \frac{10}{30} \times \frac{19}{30}$ $P(N) = 0,5 \times 0,333 \times 0,633$ $P(N) = 0,105$	Por consiguiente, la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde y luego saquen dos bolas de color verde es 0,105 o 10,5 %.

La probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde (mayor frecuencia absoluta) y luego saquen dos bolas del mismo color ($0,122 + 0,105 = 0,227$) es 0,227 o 22,7 %.

CASO 2		
Mayor frecuencia absoluta	Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación
Amarillo	$P(N) = P(\text{amarillo}) \times P(\text{amarillo}) \times P(\text{amarillo})$ $P(N) = \frac{15}{30} \times \frac{20}{30} \times \frac{11}{30}$ $P(N) = 0,5 \times 0,667 \times 0,367$ $P(N) = 0,122$	Por lo tanto, la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde y luego saquen dos bolas de color amarillo es 0,122 o 12,2 %.
	$P(N) = P(\text{amarillo}) \times P(\text{verde}) \times P(\text{verde})$ $P(N) = \frac{15}{30} \times \frac{10}{30} \times \frac{19}{30}$ $P(N) = 0,5 \times 0,333 \times 0,633$ $P(N) = 0,105$	Por consiguiente, la probabilidad de que el trompo caiga en un sector verde y luego saquen dos bolas de color verde es 0,105 o 10,5 %.

Por último, la probabilidad de que el trompo caiga en un sector amarillo (mayor frecuencia absoluta) y luego saquen dos bolas del mismo color ($0,122 + 0,105 = 0,227$) es 0,227 o 22,7 %.

Interpretación, aplicación y valoración

Se presentan problemas con características de ser complejos y abiertos. Se propicia el intercambio entre los estudiantes.

1. Presente el problema a los estudiantes.
Se plantea la siguiente afirmación: "La probabilidad de sacar dos bolas consecutivas del mismo color es mayor si el color predominante en los giros del trompo es amarillo". ¿Es correcta la afirmación? Justifiquen su respuesta.
2. Realice preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución.

a) ¿Qué se afirma en el reto?

Se afirma que "la probabilidad de sacar dos bolas consecutivas del mismo color es mayor si el color predominante en los giros del trompo es amarillo".

b) ¿Qué se pide en el reto?

Se pide justificar si la afirmación es correcta o no.

3. Oriente la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.
- a) ¿La afirmación es correcta o no?

No es correcta.

b) ¿Por qué la afirmación no es correcta?

La afirmación no es correcta porque la probabilidad de sacar dos bolas consecutivas del mismo color no depende del color predominante en los giros del trompo, sino de la composición de la urna de bolas y si las bolas se extraen con o sin reposición.

- Probabilidad de sacar dos bolas verdes consecutivas:

$$P(V1 \text{ y } V2) = \frac{10}{30} \times \frac{19}{30} = 0,333 \times 0,633 = 0,21$$

- Probabilidad de sacar dos bolas amarillas consecutivas:

$$P(A1 \text{ y } A2) = \frac{20}{30} \times \frac{11}{30} = 0,667 \times 0,367 = 0,244$$

La probabilidad de estos sucesos no cambia independientemente de cuál color es predominante en los giros del trompo. Esto se debe a que las bolas se extraen de la bolsa, cuya composición es fija: 3 amarillas y 2 verdes. Por lo tanto, el resultado de los giros del trompo no influye en la probabilidad de sacar dos bolas consecutivas del mismo color.

5.6.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos.

Realice un resumen de las nociones matemáticas que se abordaron. Destaque la aplicación de la regla del producto y de la suma en el cálculo de la probabilidad en situaciones aleatorias, así como su aplicación en distintas situaciones de la vida de otros contextos.

Invite a los equipos a socializar sus esquemas/gráficos y sus resultados de los procedimientos realizados.

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- **Invite a responder las preguntas de metacognición.**
 - ¿Qué nociones matemáticas consolide con el uso de los trompos?
 - ¿Tuve dificultad para identificar un suceso dependiente? ¿Tuve dificultad para identificar y cómo aplicar la regla del producto y de la suma? ¿Cómo las supere?
- **Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:**

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos dependientes.			
Expresé con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos dependientes.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos dependientes de una situación aleatoria.			
Evalué afirmaciones sobre sucesos aleatorios dependientes y los justifiqué usando sus conocimientos probabilísticos.			

5.7.1. Nombre de la actividad

Jugamos en familia

5.7.2. Competencia y capacidades

Competencia	Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre
Capacidades	• Representa datos con gráficos y medidas estadísticas o probabilísticas. • Comunica su comprensión de los conceptos estadísticos y probabilísticos. • Usa estrategias y procedimientos para recopilar y procesar datos. • Sustenta conclusiones o decisiones con base en la información obtenida.

5.7.3. Propósito de aprendizaje

Resuelve problemas que implican determinar las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos mutuamente excluyentes y sucesos independientes. Expresa con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos independientes y mutuamente excluyentes. Emplea procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos independientes de una situación aleatoria. Evalúa afirmaciones sobre sucesos aleatorios y la justifica usando sus conocimientos probabilísticos.

5.7.4. Noción matemática a desarrollar

Probabilidad en sucesos independientes

5.7.5. Recomendaciones de uso según las necesidades de aprendizaje identificadas por el docente

Los estudiantes enfrentan dificultades en la resolución de problemas al identificar el tipo de sucesos involucrados, si se trata de independientes o dependientes y la determinación de su probabilidad.

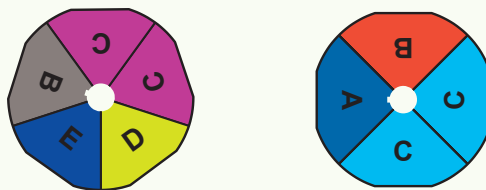
Utiliza los trompos con probabilidad como herramientas visuales para representar sucesos independientes de manera clara. Asigna colores diferentes a cada trompo y muestra cómo la ocurrencia de un suceso no afecta la probabilidad de otro evento. Proporciona ejemplos prácticos donde los resultados de un trompo no influyen en los resultados de otras, y fomenta la exploración mediante juegos y actividades interactivas que refuercen la comprensión de la independencia de los sucesos.

5.7.6. Sugerencias de organización de estudiantes

Los estudiantes se reúnen en equipos de hasta 4 integrantes y se asignan roles rotativos, como secretario, portavoz, coordinador y otros que se considere pertinentes.

5.7.7. Situación problemática

En una fiesta familiar, con la participación de padres, madres e hijos, se ha disfrutado de diversos juegos de mesa y azar. Uno de estos consiste en girar dos trompos y lograr obtener en cada trompo un color específico determinado por un juez.



En total participan 10 hijos. Cada uno debe ejecutar los giros mientras un juez observa y canta los colores obtenidos para confirmar los resultados. Una vez que se consigan los resultados esperados, el participante recibirá el premio y el juego se dará por terminado. Si todos los participantes giran los trompos una vez y nadie gana aún, volverán a girar un turno más.

5.7.8. Recomendación didáctica: Planteamiento de talleres matemáticos

Familiarización

Desarrollar un clima de confianza y motivación permanente es importante. Por ello los estudiantes deben resolver problemas de nivel elemental que les permita identificar los conceptos que se abordarán y luego resolver los retos planteados.

1. Procure que los estudiantes comprendan la situación problemática a través del planteamiento de interrogantes.

- a) ¿De qué trata la situación problemática?

Trata de un juego de azar con trompos en una fiesta familiar, donde 10 hijos participan girando los trompos para obtener colores específicos y ganar un premio.

- b) ¿Qué personajes intervienen?

En la situación descrita intervienen los siguientes personajes:

- 10 hijos que participan en el juego de azar con trompos.
- 1 juez que observa los giros de los trompos y canta los colores obtenidos para confirmar los resultados.
- Padres y madres que están presentes en la fiesta donde se lleva a cabo el juego.

- c) ¿En qué consiste el juego?

En que cada uno de los 10 hijos gire los trompos y el juez verifica si obtienen los colores requeridos para ganar el premio. Si un participante logra los resultados esperados, recibe el premio y el juego termina. Si nadie gana después de la primera ronda, todos tienen un turno más para intentarlo.

2. Indique que realicen 10 giros simultáneos con ambos trompos y registren los resultados, y que a partir de estos resuelvan los retos planteados. Recreación de la situación:

Traducción simple

Se presentan problemas matemáticos que requieren la traducción directa de una situación a una expresión matemática simple. Estos problemas son de naturaleza básica y se enfocan en la aplicación directa de fórmulas o conceptos previamente aprendidos.

Número de Experimento	Trompo 1				Número de Experimento	Trompo 2		
	B (plomo)	C (púrpura)	D (verde limón)	E (azul)		A (azul)	B (rojo)	C (celeste)
1				X	11			X
2		X			12	X		
3	X				13		X	
4	X				14	X		
5				X	15			X
6	X				16		X	
7	X				17			X
8			X		18	X		
9		X			19	X		
10			X		20	X		
Frecuencia absoluta	4	2	2	2	Frecuencia absoluta	5	2	3

1. Presente el reto a los estudiantes.

Después de haber experimentado la primera ronda de los 10 giros simultáneos con ambos trompos y registrado los resultados, ¿cuál es la probabilidad de que se obtenga el color azul en el primer trompo y el color rojo en el segundo trompo si ese es el resultado que se busca para ganar?

2. Realice preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución.

- a) ¿Cuántos experimentos aleatorios de realizaron con cada uno de los trompos?

Se realizaron 10 experimentos aleatorios con cada uno de los trompos con probabilidad.

- b) ¿Cuáles son los sucesos que se espera que resulten?

En las ejecuciones simultáneas, se espera que el primer trompo muestre el suceso A "color azul" y el segundo trompo muestre el suceso B "color rojo".

3. Oriente para la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.

- a) ¿Qué elementos de la tabla deben considerar para poder responder al reto planteado?

Debemos tener en cuenta, por separado para cada uno de los trompos, las frecuencias absolutas de cada color a partir de la tabla de datos dada; y calcular su probabilidad.

- b) ¿Cómo estimarán las probabilidades de cada uno de los colores?

Como estamos utilizando la probabilidad frecuencialista, la probabilidad se calcula con la razón entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles. Así:

Trompo 1		Trompo 2	
Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación	Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación
$\frac{4}{10} = 0,4$	La probabilidad de que ocurra el color plomo es 0,4 o 40 %.	$\frac{5}{10} = 0,5$	La probabilidad de que ocurra el color azul es 0,5 o 50 %.
$\frac{2}{10} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color púrpura es 0,2 o 20 %.	$\frac{2}{10} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color rojo es 0,2 o 20 %.
$\frac{2}{10} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color verde limón es 0,2 o 20 %.	$\frac{3}{10} = 0,3$	La probabilidad de que ocurra el color celeste es 0,3 o 30 %.
$\frac{2}{10} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color azul es 0,2 o 20 %.		

- c) ¿En este caso ambos sucesos pudieron darse simultáneamente? ¿El primero afectó al segundo?

Sí, se dieron de manera simultánea. Y el resultado del primer trompo no afectó ni condicionó el resultado del segundo.

- d) Entonces, de acuerdo a esas características, ¿de qué sucesos se trata?

De sucesos independientes.

- e) Para estimar la probabilidad de obtener el color azul y el color rojo simultáneamente con los trompos, ¿qué debo aplicar?

En este caso corresponde aplicar la regla del producto, de la siguiente manera:

$$P(\text{azul y rojo}) = P(\text{azul}) \times P(\text{rojo})$$

$$= 0,2 \times 0,2 = 0,04$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener el color azul y rojo simultáneamente es 0,04 o el 4 %.

Traducción compleja

Se presentan problemas con características de ser complejos y abiertos; y se propicia el intercambio entre los estudiantes.

1. Presente el reto a los estudiantes.

En el juego familiar, después de que todos los participantes intentaron dos rondas sin éxito, los jueces han decidido flexibilizar las condiciones cambiando las reglas del juego. Ahora se podrá ganar si en el primer trompo sale azul o plomo, y si en el segundo sale rojo o celeste, y además podrán ejecutar las rondas necesarias hasta que resulte el ganador. ¿Cuál es la probabilidad de ganar que tienen ahora?

2. Efectúe preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución. Luego invítelos a experimentar nuevamente con los trompos.

- a) Con el fin de continuar de recreando la situación, ¿cuántas veces más necesitan girar cada uno de los trompos en una nueva ronda?

Se necesita girar 10 veces cada uno de los trompos. Es decir, realizar 20 experimentos aleatorios más.

Número de Experimento	Trompo 1				Número de Experimento	Trompo 2		
	B (plomo)	C (púrpura)	D (verde limón)	E (Azul)		A (azul)	B (rojo)	C (celeste)
1				X	11			X
2		X			12	X		
3	X				13		X	
4	X				14	X		
5				X	15			X
6	X				16		X	
7	X				17			X
8			X		18	X		
9		X			19	X		
10			X		20	X		
Frecuencia absoluta	4	2	2	2	Frecuencia absoluta	5	2	3
21			X		31			
22		X			32	X		X
23	X				33		X	
24	X				34	X		
25				X	35			X
26	X				36			
27	X				37			X
28			X		38	X		
29		X			39		X	
30				X	40	X		
Frecuencia absoluta	8	4	4	4	Frecuencia absoluta	9	4	7

- b) ¿Fue suficiente realizar esta segunda ronda para obtener al ganador?

No, una segunda ronda de giros no fue suficiente ya que el objetivo era obtener específicamente el suceso A "color azul" en el primer trompo y el suceso B "color rojo" en el segundo, y en una sola ejecución simultánea de ambos trompos.

- c) Ante esto, ¿qué proponen los jueces?

Ellos han decidido flexibilizar las condiciones cambiando las reglas del juego. Por eso ahora se podrá ganar con más opciones de colores, y además se podrá realizar más rondas hasta que resulte un ganador.

- d) ¿Cuáles son los sucesos que se espera obtener al girar simultáneamente los dos trompos ahora?

En las ejecuciones simultáneas se espera que el primer trompo muestre el suceso C "color azul o plomo"; y el segundo, el suceso D "color rojo o celeste".

3. Oriente para la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.

- a) ¿Qué elementos de la tabla deben considerar para poder responder al reto planteado?

Debemos tener en cuenta, por separado para cada uno de los trompos, las frecuencias absolutas de cada color a partir de la tabla de datos dada; y calcular su probabilidad.

- b) ¿Cómo estimarán las probabilidades de cada uno de los colores?

Como estamos utilizando la probabilidad frecuencialista, la probabilidad se calcula con la razón entre el número de resultados favorables y el número total de resultados posibles. Así:

Trompo 1		Trompo 2	
Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación	Probabilidad (frecuencia relativa)	Interpretación
$\frac{8}{20} = 0,4$	La probabilidad de que ocurra el color plomo es 0,4 o 40 %.	$\frac{9}{20} = 0,45$	La probabilidad de que ocurra el color azul es 0,45 o 45 %.
$\frac{4}{20} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color púrpura es 0,2 o 20 %.	$\frac{4}{20} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color rojo es 0,2 o 20 %.
$\frac{4}{20} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color verde limón es 0,2 o 20 %.	$\frac{7}{20} = 0,35$	La probabilidad de que ocurra el color celeste es 0,35 o 35 %.
$\frac{4}{20} = 0,2$	La probabilidad de que ocurra el color azul es 0,2 o 20 %.		

- c) En el suceso C "obtener el color azul o plomo" en el trompo 1, y de la misma forma en el suceso D "obtener el color rojo o celeste" en el trompo 2, ¿ambos sucesos se pueden dar simultáneamente en cada trompo?

No, no puede ocurrir a la vez dos colores en un mismo trompo. En el trompo 1, o sale azul o sale plomo. Lo mismo sucede en el trompo 2, o sale rojo o sale celeste.

- d) Si no puede ocurrir a la vez, ¿de qué sucesos se trata?

Se trata de los sucesos mutuamente excluyentes.

- e) En este caso, ¿qué deberán aplicar para estimar la probabilidad de ambos sucesos mutuamente excluyentes (sucesos C y D)?

En este caso corresponde aplicar la regla de la suma, de la siguiente manera:

Trompo 1

$$P(C) = P(\text{plomo}) + P(\text{azul})$$

$= 0,4 + 0,2 = 0,6$, es decir la probabilidad de obtener el color plomo o azul es 0,6 o el 60 %.

Trompo 2

$$P(D) = P(\text{rojo}) + P(\text{celeste})$$

$= 0,2 + 0,35 = 0,55$, es decir la probabilidad de obtener el color rojo o celeste es 0,55 o el 55 %.

- f) Entonces, ¿podemos decir que ya tenemos estimada la probabilidad de ganar?

Aún no. Para estimar la probabilidad de ganar se debe juntar las probabilidades del trompo 1 y del trompo 2 ya que, en este caso, ambos resultados sí se pueden dar de manera simultánea; y se trataría de sucesos independientes.

- g) ¿Qué deberán aplicar para estimar la probabilidad de ganar si los sucesos en los trompos 1 y 2 son sucesos independientes?

Corresponde aplicar la regla del producto, de la siguiente manera:

Probabilidad de ganar

$$P(\text{ganar}) = P[(\text{plomo}) + P(\text{azul})] \times P[(\text{rojo}) + P(\text{celeste})]$$

$$= (0,6) \times (0,55)$$

$$= 0,33$$

Por lo tanto, la probabilidad de ganar, después de la flexibilización por parte de los jueces, es 0,33 o el 33 %.

Interpretación, aplicación y valoración

1. Presente el problema a los estudiantes.

Un adolescente, tras observar los cambios en las reglas del juego y prestar atención a los resultados de los trompos, afirmó: "la probabilidad de ganar el premio es menor que la probabilidad de no ganar el premio". Comprueben y justifiquen su respuesta.

2. Haga preguntas que ayuden a comprender el reto y a determinar qué datos necesitarán para su solución.

- a) ¿Cuál es la probabilidad de ganar en el juego con las nuevas reglas?

La probabilidad de ganar en el juego es de 0,33 o el 33 %.

- b) ¿Qué debe ocurrir para no ganar el juego?

Se debe considerar cualquier combinación de colores obtenida en los dos trompos, excluyendo los casos en los que se obtenga el color azul o plomo en el primer trompo, y el color rojo o celeste en el segundo.

3. Oriente para la elaboración del plan y la aplicación de las estrategias.

a) El adolescente, en su afirmación, ¿qué nos dice?

Nos dice que la probabilidad de ganar el premio es menor que la probabilidad de no ganar el premio.

b) ¿Cómo podemos estimar la probabilidad de no ganar?

Como la probabilidad total es de 1 o 100 %, le restamos la probabilidad de ganar. Así:

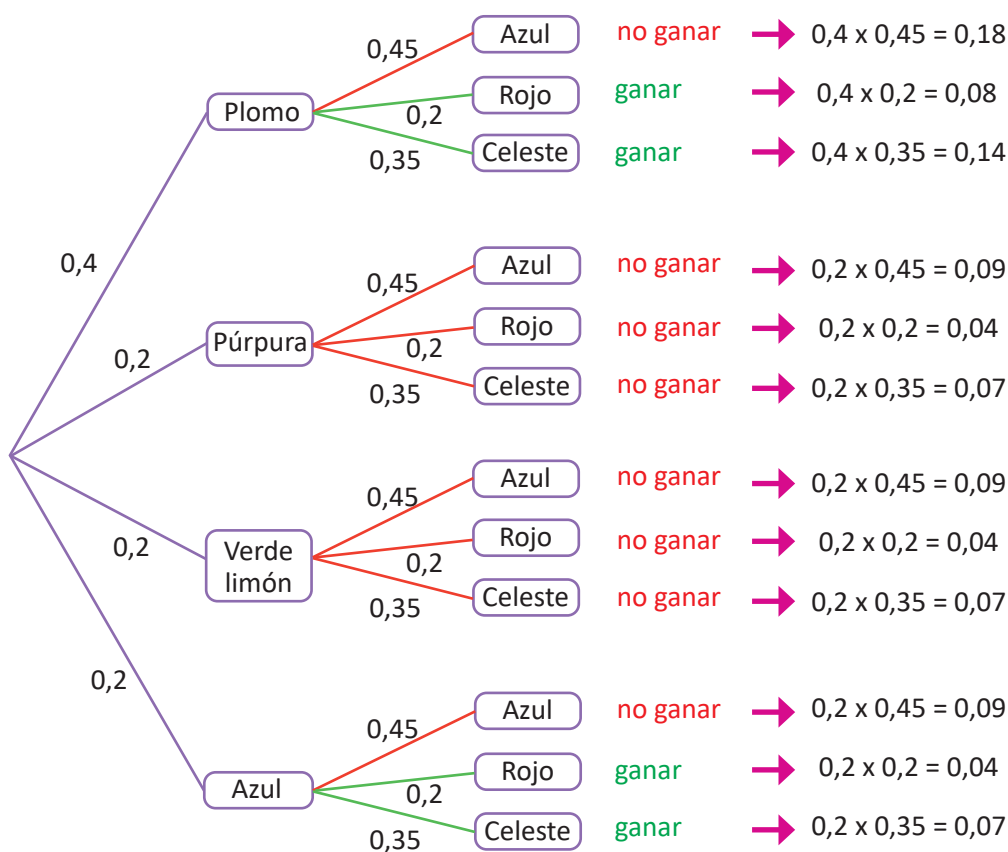
$$\begin{aligned} \text{Probabilidad de no ganar} &= \text{Probabilidad total} - \text{Probabilidad de ganar} \\ &= 1 - 0,33 \\ &= 0,67 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la probabilidad de no ganar es 0,67 o el 67 %.

En consecuencia, lo que afirma el adolescente es correcto.

c) ¿Existirá otra forma?

También podemos hacerlo gráficamente mediante el diagrama del árbol, de la siguiente manera:



$$\text{No ganar} = 0,18 + 0,09 + 0,04 + 0,07 + 0,09 + 0,04 + 0,07 + 0,09 = 0,67$$

$$\text{Ganar} = 0,08 + 0,14 + 0,04 + 0,07 = 0,33$$

Comparando: Ganar, donde su probabilidad es de 0,33, es menor que no ganar, donde su probabilidad es de 0,67. En consecuencia, lo que afirma el adolescente es correcto.

5.7.9. Socialización-institucionalización

Aquí se generaliza y se abstrae los conocimientos en base a los procedimientos realizados y resultados obtenidos.

Realice un resumen de las nociones matemáticas que se abordaron. Destaque la aplicación de la regla del producto y de la suma en el cálculo de la probabilidad en situaciones aleatorias, así como su aplicación en distintas situaciones de la vida de otros contextos.

Invite a los equipos a socializar sus esquemas/gráficos y sus resultados de los procedimientos realizados.

Reflexión y evaluación del aprendizaje

- **Invite a los estudiantes a responder las preguntas de metacognición.**
 - ¿Qué nociones matemáticas consolide con el uso de los trompos?
 - ¿Tuve dificultad para identificar un suceso independiente? ¿Tuve dificultad para identificar y aplicar la regla del producto y de la suma? ¿Cómo las supere?
- **Invite a los estudiantes a autoevaluarse con la siguiente ficha:**

Criterios	Lo logré	Estoy en proceso de lograrlo	¿Qué puedo hacer para mejorar mis aprendizajes?
Determiné las condiciones y restricciones de una situación aleatoria analizando la ocurrencia de sucesos independientes.			
Expresé con diversas representaciones el significado del valor de la probabilidad caracterizando la ocurrencia de sucesos mutuamente excluyente y sucesos independientes.			
Empleé procedimientos para determinar la probabilidad de sucesos mutuamente excluyente y sucesos independientes de una situación aleatoria.			
Evalué afirmaciones sobre sucesos aleatorios y la justifica usando sus conocimientos probabilísticos.			

Referencias bibliográficas

- Méndez, D y Gonzáles, G. (2022). *Neuroaprendizaje aplicada a la enseñanza-aprendizaje de la matemática en ciclo básico*. Revista Académica Sociedad del Conocimiento Cunzac, 2(2), 211-215.
- Meneses, N. (2019) Neuroeducación. *Sólo se puede aprender aquello que se ama, de Francisco Mora Teruel* *Perfiles educativos*, XLI(165), Julio-Septiembre, pp. 210-216 Universidad Nacional Autónoma de México, Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación.
- Minedu (2015). *Rutas del aprendizaje. ¿Qué y cómo aprenden nuestros estudiantes? VI Ciclo. Área curricular matemática*. Quad Graphics Perú. <https://www.minedu.gob.pe/DeInteres/pdf/documentos-secundaria-matematica-vi.pdf>
- Minedu. (2023a). *Curso virtual Aportes de la neuroeducación en el proceso de enseñanza aprendizaje*. Unidad 2 sesión 1 Mecanismos para mejorar la eficiencia en el proceso de enseñanza aprendizaje.
- Minedu. (2023b). *Curso virtual Aportes de la neuroeducación en el proceso de enseñanza aprendizaje*. Unidad 2 sesión 2 Estrategias basadas en la neuroeducación para el logro del aprendizaje.